I Grandi Matematici Italiani online

GINO FANO

GINO FANO

Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **44** (1909), p. 633–648

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1909_1>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

LETTURE

Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme.

Nota di GINO FANO.

1. — Il Prof. SEVERI ha dimostrato (1) che *Sopra una forma algebrica* V (o varietà di dimensione $r-1$) *priva di punti multipli dello spazio* S_r (dove $r \geq 4$) *ogni varietà algebrica a* $r-2$ *dimensioni è la completa intersezione di* V *con un'altra forma.* Questa proposizione era già nota per le quadriche di uno spazio qualunque (sempre di dimensione ≥ 4) (2) e per la varietà cubica di S_4 (3).

Nello spazio S_3 è pure noto da ricerche del Sig. NOETHER, appoggiate essenzialmente sopra un computo di costanti, che la superficie generale di un ordine qualsiasi ≥ 4 non contiene altre curve all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'altra superficie (4): proprietà analoga a quella che è oggetto del teorema suddetto del SEVERI, ma il cui enunciato non ha, nè può ricevere una forma altrettanto precisa. Mentre se $r > 4$ l'esistenza, sopra una V_{r-1} appartenente a S_r, di una M_{r-2} che non ne sia la completa intersezione con un'altra forma

---

(1) *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, “Rend. Acc. dei Lincei„ (5), vol. 15°, 2° sem. 1906; p. 691.

(2) F. KLEIN, *Ueber einen liniengeometrischen Satz;* “Gött. Nachr.„, 1872; “Math. Ann.„, vol. 22 (1883), p. 234.

(3) V. la mia Nota: *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, “Atti della R. Acc. di Torino„, vol. XXXIX (1904). Dopo la pubblicazione di questa Nota io avevo trovata anche una dimostrazione, che però non pubblicai, la quale permetteva di estendere la proprietà di cui si tratta alle varietà cubiche di uno spazio qualunque S_r, dove $r > 3$.

(4) M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, Preisgekrönte Schrift, “Berliner Abhandl.„, 1882.

porta di conseguenza, necessariamente, l'esistenza su di essa di qualche punto doppio, ciò non avviene più per $r = 3$ (nemmeno per le superficie di ordine ≥ 4).

La proprietà accennata si può estendere dal caso di una forma di S_r al caso di una varietà intersezione completa di forme. Però quest'estensione, che è appunto oggetto della presente Nota, non posso darla per ora che nella forma seguente, più prossima a quella del teorema di NOETHER (benchè io non faccia alcun uso di computo di costanti) che a quella di SEVERI:

In uno spazio qualunque S_r *una varietà algebrica di dimensione* $k \geq 2$ *la quale sia completa intersezione di* $r - k$ *forme*, e se $k = 2$ non sia una superficie razionale (1), *non contiene* IN GENERALE *altre varietà* M_{k-1} *all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $[(r - k + 1)^{\text{sima}}]$ *forma.*

In altri termini: Una forma di S_r priva di punti multipli non contiene (come è già noto) altre M_{r-2} all'infuori delle sue intersezioni con un'altra forma. La più generale fra queste M_{r-2} di un dato ordine, ossia *la* M_{r-2} *generica di un sistema lineare completo sulla prima forma* non conterrà altre M_{r-3} all'infuori di quelle segate su di essa da una terza forma; e così di seguito.

Come ho detto, per ora non mi è riescito di dare al teorema forma più precisa. Per le varietà M_k di dimensione $k \geq 3$ è possibile (forse con qualche restrizione) che il fatto di contenere una M_{k-1}, la quale non ne sia intersezione completa con una forma, porti di conseguenza l'esistenza su di essa di qualche punto doppio, e che perciò l'essere la M_k priva di punti doppi sia condizione sufficiente (benchè, probabilmente, non necessaria) perchè ogni sua M_{k-1} ne costituisca l'intersezione completa con una forma. Ma per le superficie è probabile che anche in uno spazio di dimensione ≥ 4 non si possa assolutamente dare del teorema un enunciato più preciso.

La superficie intersezione generale di $r - 2$ forme di S_r avrà pertanto il numero base ρ eguale all'unità (essendo soltanto esclusi i tre casi in cui essa è razionale (1)); e si potrà

(1) Questa restrizione conduce ad escludere i tre casi elementari delle superficie di 2° e 3° ordine in S_3, e della F^4 intersezione di due quadriche di S_4. Se invece l'intersezione è una superficie di genere uno (il che av-

determinarne in conseguenza il numero degli integrali doppi di 2ª specie distinti.

2. — Il teorema enunciato si può far discendere per induzione completa dal seguente altro, la cui dimostrazione costituisce la parte essenziale del presente lavoro:

Si abbia in S_r $(r \geq 4)$ *una varietà algebrica* M_3 *priva di punti multipli e completa intersezione di* $r - 3$ *forme, della quale sia noto che non contiene altre superficie algebriche all'infuori di quelle che ne sono intersezioni complete con una forma ulteriore.* (Per $r = 4$ dunque un'unica forma, per la quale è già noto che la proprietà qui ammessa come ipotesi sussiste effettivamente). *Dico che la superficie generica di un sistema lineare completo qualsiasi sopra tale* M_3 (*ove essa sia di genere* > 0) *contiene a sua volta soltanto curve che sono sue intersezioni complete con una nuova* $[(r-1)^{\text{sima}}]$ *forma.*

Indichiamo con $m_1, m_2, \ldots m_{r-3}$ gli ordini delle forme di cui la M_3 è intersezione; con $m \equiv m_1 m_2 \ldots m_{r-3}$ l'ordine di questa M_3; con $n \equiv m \,.\, m_{r-2}$ l'ordine della superficie F segata sulla M_3 da una forma ulteriore di ordine m_{r-2}.

Si consideri sopra M_3 un fascio generico Φ di superficie F^n, la cui curva base φ sarà irriducibile; e sopra una superficie generica del fascio una curva qualunque γ, anche irriducibile. Questa curva individua sopra F^n il sistema lineare completo $|\gamma|$ che la contiene totalmente, e la cui dimensione (≥ 0) indicheremo con s. Possiamo supporre senza scapito di generalità che il sistema $|\gamma|$ non contenga nemmeno parzialmente la curva φ; in caso diverso basterebbe sostituirgli nelle considerazioni che andiamo ad esporre il sistema residuo di esso rispetto a φ o a una curva convenientemente multipla di φ; sistema residuo le cui curve saranno o non saranno, sopra F^n, intersezioni complete secondo che sono o non sono tali le γ. In questo secondo caso esisterà certo un ultimo sistema residuo non contenente più la φ.

---

viene pure in tre casi; cfr. nº 4) è già noto, in seguito a ricerche recenti dei sig.ri Enriques e Severi, ch'essa contiene soltanto curve intersezioni complete (Enriques, *Le superficie di genere uno,* " Rend. Acc. di Bologna ", 13 dic. 1908; Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica di ordine zero,* " Atti Ist. Veneto ", vol. LXVIII_2 (1908-09), p. 249).

Sulla curva φ si prendano s punti $A_1\ A_2 \dots A_s$, certo esistenti, pei quali passi sulla F^n considerata una sola curva γ_0 del sistema $|\gamma|$ (se $s = 0$, sarà γ_0 l'unica γ esistente sopra F^n); e si faccia poi variare la superficie F^n descrivendo con continuità il fascio Φ, mentre i punti $A_1\ A_2 \dots A_s$ rimangono fissi e la curva γ_0 segue la F nel suo movimento. Quando F, dopo uno spostamento qualunque nel fascio Φ, ritorna alla posizione iniziale, il sistema $|\gamma|$ e, per conseguenza, la curva γ_0 potranno o riprendere sempre, o anche non riprendere sempre le rispettive posizioni.

Nel primo caso, quando F descrive l'intero fascio Φ, la curva γ_0 descriverà una determinata superficie algebrica Γ, contenuta nella data M_3, e che per l'ipotesi fatta sarà intersezione completa della M_3 con una certa forma. Se questa superficie non passa per la curva φ, la curva γ_0 sarà a sua volta intersezione completa della superficie F colla medesima forma. La superficie Γ potrebbe però contenere la curva φ, perchè il sistema $|\gamma|$, pur non contenendo la φ sopra una F generica del fascio, potrebbe contenerla sopra qualche F particolare; comunque, anche allora γ_0 sarebbe sopra F^n intersezione completa, soltanto con una forma di ordine inferiore.

Se dunque esistono sopra F curve che non sono intersezioni complete, queste curve, nelle circostanze accennate, dovranno variare in modo da assumere sopra F medesima anche posizioni diverse da quelle iniziali.

3. — Supponiamo pertanto che F possa spostarsi nel fascio Φ e tornare alla posizione iniziale in modo che il sistema $|\gamma|$ e per conseguenza la linea γ_0 assumano sopra F medesima posizioni diverse dalle primitive. Dovranno allora esistere sopra F altri sistemi lineari $|\delta|$, $|\varepsilon|$,... composti di curve di egual ordine e aventi i medesimi caratteri di $|\gamma|$; sistemi che saranno però certo in numero finito, perchè l'insieme di tutte le curve aventi lo stesso ordine delle γ e contenute in F^n deve essere un sistema algebrico, perciò composto di un numero finito di sistemi continui completi; e, essendo F superficie regolare, i sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... sono essi stessi completi anche come sistemi continui.

In questo caso, quando F descrive l'intero fascio Φ, la curva γ_0 descriverà bensì una superficie Γ che sarà intersezione completa della data M_3 con una certa forma; ma questa forma segherà sopra F una curva $\gamma + \delta + \epsilon + \ldots$ Il sistema lineare $|\gamma|$ descriverà, corrispondentemente, una varietà algebrica ∞^1, di genere ≥ 0; e in questa varietà i gruppi di sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$, $|\epsilon|$,... appartenenti a una stessa F^n, formeranno una serie ∞^1 in corrispondenza biunivoca col fascio Φ, e perciò razionale. Questa *serie lineare* avrà certo dei gruppi con un elemento doppio (o comunque multiplo); esisteranno dunque certo nel fascio Φ delle superficie F^n sulle quali due dei sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... vengono a coincidere. E poichè, se il fascio Φ è stato scelto nella M_3 in modo generale, nessuna sua superficie può avere punti multipli all' infuori eventualmente di un solo punto doppio, così anche le particolari F^n sulle quali due fra i sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... coincidono potranno avere al più un punto doppio (conico).

Per vedere dunque se e quando possano esistere sopra F^n altre curve, all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con forme di S_r, dovremo esaminare le conseguenze che discendono dall' esistenza sopra F^n, ossia sopra ogni superficie del fascio Φ, di due o più sistemi lineari completi $|\gamma|$, $|\delta|$,..., fra loro distinti e aventi gli stessi caratteri; e dal fatto che sopra alcune particolari F^n del fascio, aventi al più un punto doppio conico e non altri punti multipli, due di questi sistemi lineari vengono a coincidere.

È appunto questo che avviene quando la superficie F^n generica è razionale. Una quadrica di S_3, acquistando un punto doppio, diventa un cono, e allora coincidono i suoi due sistemi di rette (e, per conseguenza, anche altre coppie di sistemi lineari); e similmente sopra una superficie generale di 3° ordine l'acquisto di un punto doppio conico fa sì che 12 rette coincidano a due a due. Escluderemo pertanto d'ora in poi (come già nell'enunciato del n° **2**) che F sia una superficie razionale; poichè l'ordine $\sum_1^{r-2} m_i - r - 1$ delle forme che segnano sopra F^n, in generale, il sistema canonico deve in tal caso risultare negativo, ossia deve essere $\sum_1^{r-2} m_i \leq r$, ciò sarà possibile soltanto nei due casi testè indicati e quando F sia l'intersezione di due quadriche di S_4. Esclusi questi casi, la F^n generica sarà una superficie regolare di genere $p_a = p_g = P > 0$.

4. — Dimostriamo anzitutto che sulla superficie generica F^n del fascio Φ non possono esistere due sistemi lineari distinti $|\gamma|$, $|\delta|$ composti di curve dello stesso ordine, aventi lo stesso grado (virtuale) ν, e tali che due loro curve generiche si incontrino pure in ν punti. Se due sistemi così fatti esistessero, nella *matrice discriminante* delle due curve γ e δ (1) sarebbero nulli tutti i determinanti di 2° ordine; le due curve sarebbero perciò legate algebricamente, anzi linearmente (essendo F^n superficie regolare), e esisterebbe perciò un intero minimo i ($\geqq 2$) tale che i sistemi lineari $i\gamma$ e $i\delta$ coincidano ($i\gamma \equiv i\delta$). Si tratta dunque, in altri termini, di dimostrare che *Sulla superficie* F^n *la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca* (2).

Ora, se la F^n è di genere $P = 1$ (F^4 di S_3, F^6 di S_4 intersezione di una quadrica e di una varietà cubica, F^8 intersezione di tre quadriche di S_5: i tre casi in cui $\sum_1^{r-2} m_i - r - 1 = 0$), essa ha altresì la curva canonica di ordine zero; e per questo caso è stato già riconosciuto dal Sig. Severi che la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca (3). Possiamo dunque supporre $P > 1$; la superficie F^n avrà allora un sistema canonico $|K|$ di dimensione virtuale P e dimensione effettiva $P - 1$ ($\geqq r$, e perciò $\geqq 3$). Dico che anche in questo caso la divisione dei sistemi lineari è sopra F^n operazione univoca.

Supponiamo che ciò non sia; e indichiamo con σ (> 1) il numero massimo di sistemi lineari distinti che si possono ottenere applicando l'operazione di divisione a un sistema lineare qualsiasi della superficie. Siano inoltre $|\gamma|$, $|\gamma_2|, \ldots |\gamma_\sigma|$ sistemi lineari distinti e tali che

$$|i\gamma| \equiv |i\gamma_2| \equiv \ldots \equiv |i\gamma_\sigma|$$

senza che tali relazioni abbiano luogo tutte per un intero $< i$.

(1) F. Severi, *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, " Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc. ", 6 febbr. 1905; *Sulla totalità delle curve...*, " Math. Ann. ", vol. 62 (1905-06), p. 194.

(2) F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, " Ann. Éc. Norm. Sup. " (3), vol. 25 (1908), p. 449.

(3) F. Severi, *La base minima...*, n° 4.

Esisteranno allora sopra F^n anche i $\sigma - 1$ sistemi:

$$(1) \qquad |K_h| \equiv |K + \gamma - \gamma_h| \qquad h = 2, 3, \dots \sigma$$

tutti distinti fra loro e da $|K|$, e tali che il multiplo secondo i di ognuno di essi coinciderà con $|iK|$, senza che esistano sopra F^n altri sistemi lineari soddisfacenti a queste condizioni. Questi $\sigma - 1$ sistemi avranno, al pari di $|K|$, la dimensione virtuale P; ma avranno dimensione effettiva $\geq P$, non essendo essi *speciali* (cioè contenuti nel sistema canonico). Inoltre le curve di questi sistemi non saranno certo sopra F^n intersezioni complete, perchè sono tali le curve canoniche, le quali hanno lo stesso ordine delle prime e ne sono distinte.

Segue da ciò che, facendo variare F^n nel fascio Φ e tornare nei vari modi possibili alla sua posizione iniziale, i sistemi lineari (1) non potranno assolutamente (cfr. n° **2**) riprendere sempre tutti le primitive posizioni; siccome però essi sono sopra F^n i soli sistemi i cui multipli secondo i coincidono con $|iK|$, essi risulteranno soltanto permutati fra loro. Da ciò segue ancora (n° **3**) che sopra qualche particolare F^n del fascio due dei sistemi (1), p. e. $|K_h|$ e $|K_l|$, dovranno coincidere. E sopra questa stessa F^n il sistema $|K + K_h - K_l| \equiv |K - \gamma_h + \gamma_l|$, che è ancora uno dei sistemi (1), coinciderà col sistema canonico $|K|$.

Ora ciò è manifestamente assurdo; perchè un sistema lineare il quale sopra una superficie generica del fascio Φ ha dimensione effettiva $\geqq P$ non può ridursi alla dimensione $P - 1$ sopra una superficie particolare di questo fascio. Rimane così dimostrato che sulla F^n la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca.

5. — Se la superficie generica F^n del fascio Φ contiene curve che non sono intersezioni complete, e contiene perciò anche (cfr. n° **2**) più sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... di curve di eguale ordine e aventi i medesimi caratteri, in particolare il medesimo grado (virtuale) ν, le curve di due qualunque di questi sistemi si taglieranno reciprocamente, per quanto si è detto, in un numero di punti $\nu' \neq \nu$ (il quale potrà anche cambiare dall'una all'altra coppia di sistemi). D'altra parte sopra qualche particolare superficie del fascio Φ due di quei sistemi, p. e. $|\gamma|$ e $|\delta|$, devono coincidere; sopra questa superficie la curva virtuale $\gamma - \delta$, di ordine zero e grado virtuale $2(\nu - \nu') \neq 0$, dovrà dunque ridursi a un punto o a un gruppo di punti, i quali saranno punti basi per il sistema con cui $|\gamma|$ e $|\delta|$ sono venuti a coincidere.

Per maggior chiarezza (per quanto ciò non sarebbe necessario) consideriamo ancora sopra F^n il sistema lineare $|\xi|$ segato da tutte le forme di un ordine abbastanza elevato perchè $|\gamma|$ vi risulti parzialmente contenuto. Esisterà allora certo sopra F^n il sistema $|\xi + \delta - \gamma|$, il quale avrà caratteri differenti e in particolare grado differente da quello da $|\xi|$, ma si comporrà di curve del medesimo ordine. Quando $|\gamma|$ e $|\delta|$ vengono a coincidere, dovranno pure coincidere $|\xi|$ e $|\xi + \delta - \gamma|$; e ciò non è assolutamente possibile che in un solo modo: quando cioè il secondo di questi due ultimi sistemi risulti composto, al limite, di quelle curve del primo che passano per certi punti della superficie con determinate multiplicità. La curva virtuale $|\gamma - \delta|$ si sarà dunque ridotta a una " somma di punti ", presi con certe multiplicità. Il grado di una curva virtuale così fatta è indubbiamente negativo; e sarà perciò $\nu' > \nu$.

Siccome poi la superficie F^n, descrivendo il fascio Φ, può soltanto acquistare in posizioni particolari un punto doppio, così quei punti dovranno essere per F^n tutti punti semplici, all'infuori di uno solo al più, che potrà esserne punto doppio (conico). Vedremo subito che si tratterà proprio di un solo punto, il quale sarà doppio per F^n.

Infatti un punto semplice di una superficie, contato p volte, costituisce una curva di grado virtuale $-p^2$ e genere $-\binom{p}{2} - p + 1 = -\binom{p+1}{2} + 1$; aggiungendo questa curva a un sistema lineare di grado ν e genere π, il quale abbia in quel punto la multiplicità i, i caratteri del nuovo sistema diventeranno:

$$\nu_1 = \nu - p^2 + 2ip$$

$$\pi_1 = \pi - \binom{p+1}{2} + ip$$

Similmente, un punto doppio della superficie F^n contato q volte costituisce una curva di grado virtuale $-2q^2$ e genere

$-q^2+1$; aggiungendo questa curva a un sistema lineare che abbia in quel punto la multiplicità l, il sistema somma avrà i caratteri :

$$\nu_2 = \nu - 2q^2 + 2lq$$
$$\pi_2 = \pi - q^2 + lq$$

Ritenuto pertanto che i due sistemi lineari $|\gamma|$ e $|\delta|$, i quali vengono a coincidere a meno di punti basi, hanno lo stesso grado e lo stesso genere, e che di questi punti basi uno solo può essere doppio per la superficie F^n e tutti gli altri sono per essa punti semplici, avremo le due relazioni:

$$\Sigma\,(p^2 - 2ip) + 2q^2 - 2lq = 0$$
$$\Sigma\left(\left[\frac{p+1}{2}\right] - ip\right) + q^2 - lq = 0$$

nelle quali le somme s' intendono estese ai diversi eventuali punti basi che sono semplici per F. Sottraendo la seconda relazione moltiplicata per 2 dalla prima, si ha:

$$\Sigma\, p = 0$$

E siccome le p, per i punti semplici di F che effettivamente concorrono a formare il gruppo di punti limite della curva virtuale $|\gamma - \delta|$, sono necessariamente positive, così di tali punti non ve ne saranno affatto. La coincidenza dei sistemi $|\gamma|$ e $|\delta|$ non potrà dunque aver luogo che sopra le F^n dotate di un punto doppio; e la curva virtuale $|\gamma - \delta|$ dovrà ridursi a questo medesimo punto, contato una o più volte (tante volte — poichè sarà $q = l$ — quant'è la multiplicità del sistema unico $|\gamma| \equiv |\delta|$ in quel punto).

È precisamente questo che avviene quando la superficie F^n generica è razionale. Quando una quadrica di S_3 diventa un cono, la curva virtuale differenza di due generatrici di sistema opposto ($\nu = 0$, $\nu' = 1$) si riduce al punto doppio (vertice). Similmente quando una superficie di 3° ordine acquista un punto doppio (conico) alcune coppie di rette sghembe ($\nu = -1$, $\nu' = 0$) vengono a coincidere in rette che passano semplicemente pel punto doppio; e il sistema delle sezioni piane passanti pel punto doppio è posizione limite di due reti di cubiche sghembe, la cui differenza virtuale ($\nu = 1$, $\nu' = 5$) si riduce al punto doppio contato due volte ($l = q = 2$). In questi casi, quando la F^n acquista un punto doppio, il suo numero-base ρ *inteso in senso proiettivo* (prescindendo cioè dalla conica infinitesima che costituisce l'intorno del punto doppio) risulta diminuito di un'unità, perchè la coincidenza di due sistemi lineari, prima distinti, dà una relazione lineare tra le curve della base primitiva. Noi faremo vedere ora che questo, invece, non può avvenire quando F^n abbia genere > 0.

6. — Dobbiamo valerci a tal uopo di alcune proprietà degli integrali doppi di 2ª specie appartenenti alle superficie F^n del fascio Φ; integrali la cui teoria generale è stata creata dal Sig. Picard, che vi ha dedicati parecchi lavori, e l'ha poi esposta ordinatamente nel 2° volume del suo trattato delle funzioni algebriche di 2 variabili [1].

Il numero ρ_0 degli integrali doppi di 2ª specie distinti appartenenti a una superficie algebrica e il numero-base ρ di questa superficie [2] sono legati da un'importante relazione, dovuta appunto al Sig. Picard, la quale nel caso di una superficie regolare e introducendo l'invariante relativo I di Zeuthen-Segre assume la forma:

$$\rho_0 + \rho = I + 2 \ [3]$$

Se però il carattere ρ si vuol intendere, come l'intende il Sig. Picard, in senso proiettivo, cioè senza tener conto degli intorni degli eventuali punti multipli isolati della superficie, allora, supponendo che la superficie abbia soltanto d (≥ 0) punti

---

[1] E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vol.; Paris, 1897-1906. In part. vol. 2°, cap. VII e seg.

[2] Numero massimo di curve algebricamente distinte (e, se la superficie è regolare, anche linearmente distinte) esistenti sulla superficie. Cfr. i lavori cit. del Severi, " Compt. Rend. „, 6 febbr. 1905; " Math. Ann. „, vol. 62.

[3] In questa relazione ρ_0 è un invariante assoluto della superficie, mentre ρ ed I sono soltanto invarianti relativi, e crescono o diminuiscono entrambi di un'unità per ogni curva eccezionale che compaia in più o scompaia per effetto di trasformazioni birazionali.

doppi conici (ed è appunto il caso che a noi interessa), la stessa relazione dovrà scriversi:

$$\rho_0 + \rho + d = I + 2 \tag{1}$$

Sarà bene ricordare brevemente la via per la quale il Sig. PICARD è giunto a questa relazione. — Supponendo che si tratti di una superficie $f(x\,y\,z) = 0$ dello spazio S_3, quale sarebbe ad es. la proiezione più generale della nostra F^n, il Sig. PICARD ha determinato in primo luogo il numero dei periodi distinti, assegnabili ad arbitrio, e relativi a cicli a due dimensioni situati al finito dell'integrale doppio di 2ª specie

$$\int\int \frac{Q(x\,y\,z)}{f'_z}\,dx\,dy \tag{2}$$

dove Q è un polinomio aggiunto ad f (di grado limitato): numero la cui espressione si riduce a $I - d + 1$; e in secondo luogo il numero, che si trova $= \rho - 1$, delle costanti da cui dipende un integrale doppio a periodi non tutti nulli il quale abbia la forma speciale:

$$\int\int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{3}$$

dove A e B indicano funzioni razionali della superficie. Poichè non si ritengono distinti due o più integrali una cui combinazione lineare sia di quest'ultimo tipo, il numero ρ_0 risulterà dalla differenza $(I - d + 1) - (\rho - 1)$, conforme alla relazione (1).

Le superficie F^n del fascio Φ da noi considerato sono tutte prive di curve eccezionali. Ciò è stato dimostrato dal Sig. SEVERI [1] per il caso in cui non vi siano punti multipli, ed è pur vero se vi è un punto doppio conico (o un numero finito qualunque di tali punti), perchè il sistema canonico è sempre segato da tutte le forme di un dato ordine, e perciò da un sistema di forme che non ha punti-basi su F. L'invariante I avrà dunque il medesimo valore sopra tutte quante le superficie del fascio.

---

[1] *Su alcune questioni di postulazione,* " Rend. di Palermo ", vol. XVII (1903); in part. n° 12, 13.

Quando la superficie F^n, descrivendo il fascio Φ, acquista un punto doppio — prescindendo da altre circostanze eventualmente concomitanti, ma indipendenti dal punto doppio e che in generale non si presenteranno nemmeno [1] — il termine $\mathit{\Delta}$ della relazione (1) crescerà di un'unità; e poichè I rimane invariato, dovrà diminuire di un'unità uno dei caratteri ρ_0 e ρ. Più particolarmente, il numero $(= I - d + 1)$ dei periodi assegnabili ad arbitrio di un integrale doppio di 2ª specie diminuisce di un'unità, e diminuisce perchè due periodi, prima distinti, si sono ora identificati [2]; si perdono di conseguenza quegli integrali relativi a una F^n generica del fascio pei quali questi due periodi hanno valori assegnati, fra loro diversi; p. es. quell'integrale pel quale uno di questi periodi ha un valore assegnato diverso da zero, e gli altri periodi sono tutti nulli [3]. Se nessuno di questi integrali che si perdono aveva la forma (3), risulterà diminuito ρ_0 di un'unità; se invece se ne perdono di quelli aventi questa forma, la diminuzione di un'unità avrà colpito il carattere ρ, inteso sempre in senso proiettivo.

---

(1) Sulla superficie F^n potrebbe cioè comparire, contemporaneamente al punto doppio, qualche nuova curva, prima non esistente su di essa; ma la comparsa di una tal curva farebbe aumentare di un'unità il numero-base ρ e diminuire pure di un'unità il numero ρ_0, senza influire pertanto su quella diminuzione di uno dei due caratteri che è dovuta all'aumento di d.

(2) Infatti sulla superficie $f(x\,y\,z) = 0$ di S_3 proiezione generica di F^n, e che insieme con essa acquisterà un punto doppio isolato, due dei piani $y = b_i$ ad essa tangenti ($i = 1, 2, \ldots, N$, dove N è la classe della superficie) vengono ora a coincidere con quel piano $y =$ cost. che passa nel punto doppio. Perciò di quei certi periodi relativi alle sezioni piane $f(x\,\bar{y}\,z) = 0$ (y parametro) che il sig. Picard indica con $\Omega_i(y)$ e che sono completamente caratterizzati dal loro rispettivo comportamento per $y = b_i$, anche due vengono a coincidere; si identificano quindi due delle relazioni lineari distinte esistenti fra le stesse $\Omega_i(y)$, relazioni che conducono singolarmente ai cicli e periodi sopra nominati (oltre che ai residui nei punti all'infinito della superficie, i quali per un integrale di 2ª specie sono tutti nulli): poichè per ogni relazione $\Sigma\, m_i \Omega_i(y) = 0$, dove le m_i sono interi non tutti nulli, si ha un corrispondente periodo $\Sigma\, m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy$ (che non dipende dal punto a) — L'identificarsi di due periodi distinti porta naturalmente di conseguenza che il periodo loro differenza, prima arbitrario, si annulla e cessa perciò di essere un periodo.

(3) A questo, e agli integrali che permangono, si riconducono evidentemente tutti gli altri.

D'altra parte, per ragioni di continuità, ogni qualvolta la superficie F^n nella M_3 acquista un punto doppio, dovrà verificarsi sempre lo stesso di questi due casi. E poichè l'acquisto di un punto doppio da parte della F^n è il modo elementare e più generale per mezzo del quale si riduce il numero dei periodi distinti degli integrali doppi di 2ª specie e, conseguentemente, si eliminano di questi integrali, non potrebbe avvenire che questa eliminazione equivalesse sempre a quella di un integrale della forma speciale (3) senza che tutti quanti gli integrali doppi di 2ª specie abbiano tale forma. Ora questo, se la F^n ha genere > 0, non è possibile; perchè essa ad es. possiede certo integrali doppi di 1ª specie, che sono particolari integrali di 2ª specie e non hanno la forma (3). Concludiamo pertanto che l'acquisto di un punto doppio (ove la F^n abbia genere > 0) farà diminuire di un'unità il carattere ρ_0; e allora ρ, inteso proiettivamente, resterà invariato. Ciò equivale a dire che curve, e perciò anche sistemi lineari distinti tra loro sulla F^n generica, devono conservarsi tali sulla F^n con punto doppio, anche a meno del punto doppio (contato una o più volte); contrariamente al risultato a cui eravamo pervenuti al n° **5**, in base all'ipotesi che la F^n contenesse curve che non fossero intersezioni complete.

Il teorema enunciato al n° **2** è dunque completamente dimostrato [1].

---

[1] La dimostrazione che abbiamo data di questo teorema (dal n° 2 in poi) ha probabilmente una portata e un campo di applicabilità più vasto di quanto non appaia dall'enunciato del teorema medesimo. Considerata una M_3 e la superficie generica di un sistema lineare entro di essa, supposto questo sistema di dimensione > 0 e a intersezioni variabili irriducibili, e supposto altresì che quella superficie abbia genere geometrico > 0 (e soddisfi forse a qualche condizione ulteriore), è presumibile che ogni linea algebrica tracciata su questa superficie ne sia l'intersezione completa con un'altra superficie contenuta nella M_3; in particolare che sulla sezione iperpiana generica della M_3 ogni curva algebrica sia a sua volta sezione iperpiana di una superficie contenuta nella M_3. La varietà M_3 avrebbe perciò a comune colla superficie generica di un suo sistema lineare completo — salvo qualche restrizione — il numero-base ρ e il carattere σ (n° **4**), come già ha a comune con essa la irregolarità (Castelnuovo ed Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce...*, " Ann. Éc. Norm. Sup. ", (3), vol. 22 (1906), p. 339).

Per le superficie prive di integrali doppi di 2ª specie non aventi la forma (3), in particolare per le superficie razionali, essendo $\rho_0 = 0$, l'aumento di un'unità nel valore di d deve invece di necessità far diminuire di un' unità il carattere ρ, inteso in senso proiettivo; come appunto al nº **5** abbiamo verificato su qualche esempio [1].

7. — Dico ora che *In uno spazio qualunque* S_r ($r \geqq 4$):

1) *La varietà* M_3 *intersezione generale di* $r - 3$ *forme algebriche di ordini comunque assegnati non contiene altre superficie algebriche all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $(r - 2)^{\text{sima}}$ *forma.*

2) *La superficie intersezione generale di* $r - 2$ *forme di ordini arbitrari non contiene altre curve algebriche all' infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $(r - 1)^{\text{sima}}$ *forma* (fatta solo eccezione in S_4 per la F^4 intersezione di due quadriche).

Questo doppio teorema è oramai dimostrato per $r = 4$; la prima parte dal lavoro del Severi citato al nº **1**; la seconda parte dalle considerazioni che qui abbiamo svolte ai nⁱ **2-6** [2]. Basterà dunque dimostrare che il teorema è vero per uno spazio qualunque S_r ($r > 4$) quando lo si supponga già dimostrato per S_{r-1}. E delle due parti basterà dimostrare la prima, perchè la seconda ne seguirà tosto, per ogni singolo spazio, in forza delle stesse nostre considerazioni precedenti.

Si abbia dunque in S_r una M_3^n intersezione generale di $r - 3$ forme algebriche di certi ordini. La sua sezione iperpiana generica sarà una superficie μ^n di S_{r-1}, intersezione generale di $r - 3$ forme di quest'ultimo spazio; e noi possiamo supporre dimostrato ch'essa contiene soltanto curve sue intersezioni complete con una forma ulteriore. Perciò una qualsiasi superficie

(1) In senso invariantivo, essendo sempre $\rho_0 + \rho = I + 2$, dovremo dire che sulle F^n di genere > 0 il punto doppio, quando compare, si aggiunge alla base precedente come nuovo elemento in più (conica infinitesima); mentre sulle F^n razionali esso, in un certo senso, “ preesisteva già „ allo stato di “ curva virtuale „.

(2) Queste stesse considerazioni dànno anche una nuova dimostrazione del teorema di Noether (cfr. nº 1) sulle superficie algebriche di S_3 di ordine $\geqq 4$.

algebrica η contenuta nella M_3^n dovrà segare sulla μ^n una curva di ordine kn (k intero positivo) che sarà in pari tempo intersezione di μ^n con una forma di ordine k. Ciò basta per concludere che nella M_3^n i due sistemi lineari di superficie $|\eta|$ e $|k\mu|$ coincidono (1), ossia che la superficie η è intersezione completa della M_3 con una forma di ordine k, come appunto si voleva dimostrare.

Con ciò il teorema enunciato al n° **1** risulta completamente dimostrato per le superficie e varietà a 3 dimensioni. Esso può estendersi senz'altro alle varietà di dimensione > 3 per mezzo di un ulteriore ragionamento di induzione completa, analogo al precedente; poichè il teorema del SEVERI di cui ci siamo valsi si estende a sua volta alle varietà di dimensione superiore.

8. — Il genere ($p_a = p_g = P$) della superficie intersezione generale di $r-2$ forme di S_r degli ordini $n_1, n_2, \dots n_{r-2}$ è dato dalla formola (2):

$$P = \binom{n_1+n_2+\dots+n_{r-2}-1}{r} - \Sigma\binom{n_1+n_2+\dots+n_{r-3}-1}{r}$$
$$+\Sigma\binom{n_1+n_2+\dots+n_{r-4}-1}{r} - \dots + (-1)^{r-3}\Sigma\binom{n_1-1}{r}$$

dove le somme vanno estese a tutte le combinazioni di classe $r-3$, $r-4$, ... dei vari indici, colla convenzione di attribuire il valore zero a quei simboli combinatori nei quali il numero degli elementi è $< r$.

La stessa superficie ha il *genere lineare* (genere della curva canonica):

$$p^{(1)} = n_1\, n_2 \dots n_{r-2}\,(\Sigma\, n_i - r - 1)^2 + 1\,;$$

e non contenendo essa curve eccezionali, sussisterà la relazione:

$$p^{(1)} + I = 12\, P + 9$$

(1) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, " Atti Ist. Veneto ", vol. LXV$_2$ (1905-06), p. 625; teorema IV, p. 635.

(2) Cfr. ad es. il lavoro cit. del sig. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. di Palermo ", vol. XVII (1903); n° 4.

Ricavando di qui I, e sostituendone l'espressione nell'altra relazione:

$$\rho_0 + \rho = I + 2$$

(cfr. n° **6**), nella quale sappiamo doversi porre $\rho = 1$, si trova:

$$\rho_0 = 12\,P - n_1 . n_2 \ldots n_{r-2} (\Sigma\, n_i - r - 1)^2 + 9$$

Questo è dunque il numero degli integrali doppi di 2ª specie distinti esistenti sulla superficie di S_r intersezione generale di $r-2$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots n_{r-2}$.

Torino, aprile 1909.