Gino Fano

Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **43** (1908), p. 973–984

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1908_2>

Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.

Nota di GINO FANO.

1. — È noto da tempo (Clebsch) che le curve algebriche di genere zero sono tutte razionali (e viceversa). E per una superficie algebrica è stato dimostrato dal Sig. Castelnuovo [1] che condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia razionale, cioè rappresentabile sul piano, è che siano nulli il suo genere numerico (p_n) e il bigenere (P_2); nel qual caso sono pure nulli, in conseguenza, il genere geometrico (p_g) e tutti gli altri plurigeneri.

Invece per le varietà algebriche a tre dimensioni l'annullarsi di tutti i generi (analoghi ai precedenti) non è ancora condizione sufficiente perchè esse possano rappresentarsi biunivocamente sullo spazio S_3; e scopo di questa breve Nota è appunto di assodare l'esistenza — che si presenta per la prima volta nel caso di varietà a tre dimensioni — di *tipi birazionalmente distinti di varietà aventi tutti i generi nulli*. Hanno infatti tutti i generi nulli tanto la varietà generale del 4° ordine (V^4) dello spazio S_4, quanto la varietà M_3^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica e di una varietà cubica di quest'ultimo spazio; poichè sono entrambe varietà regolari (aventi nulle tutte due le irregolarità [2]), e su ciascuna di esse il sistema lineare di superficie (F^{4n} o rispett. F^{6n}) segato dalle varietà di un ordine qualunque $n (\geq 2)$ ha per sistema i-aggiunto quello segato dalle

---

(1) *Le superficie di genere zero*, " Mem. della Soc. It. delle Scienze ", (3), vol. 10 (1896).

(2) F. Severi, *Alcune proprietà fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, " Rend. Acc. dei Lincei ", (5), vol. 16, 2° sem. (1907), p. 337.

varietà di ordine $i(n-1)$, il quale non contiene mai il sistema i^{plo} del precedente (ma anzi vi è parzialmente contenuto). Con tutto ciò queste due varietà (V^4 di S_4, e M_3^6 di S_5), che noi supporremo prive di punti doppi, non si possono rappresentare (come faremo vedere) sullo spazio S_3; e di qui risulterà la prova di quanto sopra abbiamo affermato.

Le stesse considerazioni si potrebbero estendere facilmente alla varietà di 8° ordine intersezione generale di tre quadriche dello spazio S_6, e, probabilmente, alle eventuali varietà analoghe di spazi superiori (corrispondenti al tipo generale M_3^{2p-2} di S_{p+1}, con curve canoniche di genere p come sezioni).

Si osservi infine che la varietà M_3^6 di S_5 della quale ci occuperemo, se contenuta in una quadrica non degenere, è immagine del *complesso di rette generale del 3° ordine* dello spazio ordinario; risulterà perciò anche stabilita l'impossibilità di rappresentare questo complesso sullo spazio S_3.

2. — Si abbia, se possibile, sopra una V^4 di S_4 priva di punti doppi un sistema omaloidico di superficie (Γ). Queste superficie saranno necessariamente intersezioni complete (F^{4n}) di V^4 con altre varietà a tre dimensioni, di un certo ordine n (¹).

Il sistema omaloidico Γ determinerà una rappresentazione di V^4 sullo spazio S_3, nella quale alle sezioni iperpiane di V^4 corrisponderanno superficie di un sistema lineare ∞^4 (Σ). A ogni curva base C di quest'ultimo sistema corrisponderà generalmente sopra V^4 una superficie luogo di ∞^1 curve γ, fondamentali per il sistema omaloidico Γ; e una tal superficie si può supporre esistente senza scapito di generalità, perchè, se non vi fosse, basterebbe prendere in S_3 un sistema omaloidico Δ che sia esso stesso dotato di una ∞^1 di curve fondamentali δ non aventi posizioni particolari rispetto agli elementi basi di Σ (²), e sostituire a Γ quell'altro sistema omaloidico sopra V^4 che corrisponde a Δ nella stessa rappresentazione spaziale di V^4 già stabilita.

(¹) F. Severi, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, “Rend. Acc. dei Lincei„, (5), vol. 15, 2° sem. (1906), p. 691.

(²) Per es., il sistema delle quadriche aventi a comune una conica e un punto fuori di questa conica.

Se una δ generica è irriducibile e non passa per nessun punto base di Σ, anche la γ ad essa omologa sarà irriducibile.

Possiamo anche supporre che una δ generica non abbia punti multipli, non si appoggi in più di un punto a nessuna curva fondamentale di Σ, e incontri quelle superficie fondamentali e luoghi di linee fondamentali di Σ, che sono fra loro distinte, in punti complessivamente anche tutti distinti. Allora una γ generica non potrà avere punti multipli che nei punti basi isolati del sistema omaloidico Γ (ai quali corrispondono le superficie fondamentali di Σ) [1]; ciò non sarebbe necessario per quanto segue, ma può servire a render più chiaro il ragionamento.

3. — Le ∞^3 superficie F^{4n} del sistema omaloidico Γ incontreranno una qualunque delle ∞^1 curve fondamentali γ in punti, che saranno tutti punti basi del sistema Γ medesimo. Alcuni di questi punti potranno essere comuni a tutte le curve γ, e saranno punti basi isolati del sistema Γ; gli altri, variabili da una γ all'altra, costituiranno linee basi di quello stesso sistema. E noi possiamo supporre che soltanto fra i primi si trovino gli eventuali punti multipli delle γ.

Se uno qualunque di questi punti è k^{plo} per le superficie F^{4n} costituenti il sistema Γ, le V^n seganti queste F^{4n} (per effetto di loro multiplicità o di contatti con V^4) avranno ivi con ogni ramo lineare di curva tracciato sopra V^4 e passante per questo punto almeno k intersezioni coincidenti, e con ogni ramo di ordine μ ne avranno almeno μk. Ciò avverrà in particolare per ogni ramo di una curva γ; e se per uno di questi rami venisse a coincidere col punto considerato un maggior numero di intersezioni con tutte (le V^n, ossia) le F^{4n} del sistema Γ, si potrà dire che queste F^{4n} hanno un ulteriore punto base, di una certa multiplicità, consecutivo al primo sopra quel ramo di curva.

[1] E se nessuna di queste superficie fondamentali contiene parti multiple (il che non si può tuttavia escludere *a priori*), le γ passeranno per i loro punti multipli soltanto con rami lineari. Non possono invece contenere parti multiple le curve fondamentali di Σ e quindi le superficie luoghi di tali curve, perchè se no una superficie generica di Σ verrebbe a contenere punti multipli variabili fuori degli elementi basi del sistema.

Per ogni punto base isolato (k^{plo}) del sistema Γ si indichi con h la multiplicità (≥ 0) ch'esso ha per una γ generica. Di più, questa γ incontrerà le curve basi del sistema Γ in un numero complessivo i di punti, semplici per essa, e che per la F^{4n} avranno certe multiplicità k' (saranno cioè punti di linee k'^{ple}). Dovendo da tali punti (che potranno in parte essere infinitamente vicini tra loro) risultare assorbite tutte le intersezioni delle V^n seganti le F^{4n} colle curve γ, delle quali indicheremo con ν l'ordine, si avrà la relazione:

$$\Sigma hk + \Sigma k' = \nu \, . \, n \tag{1}$$

dove la seconda somma si compone di i termini.

4. — Faremo vedere ora che, nella relazione precedente, le k sono certamente tutte $\leq 2n$, e le k' sono tutte $\leq n$; ossia che il sistema omaloidico Γ di superficie F^{4n}, supposto esistente, non può avere nè punti di multiplicità $> 2n$, nè linee di multiplicità $> n$.

Infatti la superficie di ordine $4n$ intersezione generale di V^4 con una varietà V^n è di genere (geom° = num°) eguale al numero delle $F^{4(n-1)}$ linearmente indipendenti contenute in V^4 (le quali sono le sue “ aggiunte „); onde:

$$p = \binom{n+3}{4} - \binom{n-1}{4} = 4\binom{n}{3} + n(n+1) - 1.$$

Ora un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ isolato abbasserebbe il genere numerico della F^{4n} di $\binom{2n+1}{3}$ unità (¹); e questo numero, come immediatamente si verifica, è eguale al precedente per $n = 1$, ma lo supera per $n > 1$. Il genere numerico della F^{4n} diventerebbe dunque negativo, rendendo così impossibile l'esistenza di sistemi omaloidici.

(¹) Infatti questo punto dovrebbe essere $(2n-1)^{\text{plo}}$ per le $F^{4(n-1)}$ aggiunte; e le varietà di ordine $n-1$ che segnano sopra V^4 queste aggiunte dovrebbero perciò avere ivi con V^4 un contatto per il quale si richiedono appunto $\binom{2n+1}{3}$ condizioni.

Quanto al caso $n = 1$, è evidente che con sezioni iperpiane di V^4 si potrebbe formare un sistema omaloidico soltanto se V^4 avesse un punto triplo.

Veniamo alle linee multiple. Una linea base k'^{pla} del sistema Γ, la quale sia di ordine ξ, conta nell' intersezione di due F^{4n}, che è di ordine $4n^2$, come parte di multiplicità k'^2, e perciò di ordine $\xi \,.\, k'^2$. Perciò, se una k' fosse $> n$, l'ordine ξ della relativa linea sarebbe < 4, ossia ≤ 3; non potrebbe dunque trattarsi che di una retta, di una conica, oppure di una cubica piana o sghemba.

Questa linea multipla (almeno $(n+1)^{\text{pla}}$) non può essere una retta; perchè gli ∞^2 piani di S_4 passanti per questa retta incontrerebbero ulteriormente V^4 secondo cubiche, ognuna delle quali nei tre punti che ha a comune con quella retta avrebbe già raccolte, complessivamente, almeno $3(n+1)$ delle sue intersezioni colle V^n seganti le superficie del sistema Γ; sicchè queste V^n dovrebbero contenere per intero tutte quelle cubiche, e quindi la V^4.

La linea multipla non può nemmeno essere una conica, perchè le quadriche di S_3 passanti per questa conica segherebbero ulteriormente V^4 secondo sestiche di genere 4 aventi colla conica 6 punti a comune; e per queste sestiche varrebbero considerazioni analoghe alle precedenti.

La linea multipla non può essere una cubica sghemba, perchè le ∞^2 quadriche del suo S_3 che passano per essa (e che non hanno altri punti fissi a comune) incontrerebbero ulteriormente V^4, ossia la superficie, certo irriducibile [1], sua sezione con quello stesso S_3, secondo curve del 5° ordine e genere 2 aventi colla cubica 8 punti a comune: sicchè le F^{4n} del sistema Γ dovrebbero contenere tutte queste ultime curve, e perciò anche la superficie anzidetta, sezione iperpiana di V^4.

Infine la linea multipla non può nemmeno essere una cubica piana, perchè una qualsiasi sezione iperpiana F^4 passante per quella cubica verrebbe incontrata dalle solite V^n secondo curve di ordine $4n$ contenenti la cubica come parte $(n+1)^{\text{pla}}$; e ciò

(1) Una varietà V^4 con una sezione iperpiana riducibile, e perciò o spezzata in due quadriche, oppure contenente un piano, ha certo qualche punto doppio sulla linea intersezione delle due quadriche o rispett. sul piano.

è manifestamente impossibile, perchè una tal curva di ordine $4n$, quando contenesse la cubica contata n volte, dovrebbe avere come parte residua la retta di F^4 situata nel medesimo piano, contata pure n volte.

Tutto queste curve di ordine ≤ 3 si sono supposte irriducibili, perchè se no si sarebbe potuto ragionare analogamente sopra una qualunque loro parte.

Essendo pertanto nella relazione (1) ogni $k \leq 2n$, e ogni $k' \leq n$, sarà pure:

$$\Sigma hk + \Sigma h' = \nu \,.\, n \leq 2n \,.\, \Sigma h + n \,.\, i$$

e quindi:

$$2\Sigma h + i \geq \nu. \tag{2}$$

5. — D'altra parte, nella rappresentazione di V^4 sullo spazio S_3 determinata dal sistema omaloidico Γ, alle sezioni iperpiane di V^4 devono corrispondere in S_3 superficie φ regolari di genere uno; alle ∞^1 curve fondamentali γ di ordine ν corrisponderanno i punti di una curva C, che sarà curva base ν^{pla} per il sistema lineare ∞^4 delle φ; ai punti basi isolati del sistema omaloidico Γ, h^{pli} per le curve γ, corrisponderanno in S_3 superficie fondamentali del sistema $|\varphi|$ passanti per C colla multiplicità h; e ad ogni linea base del sistema Γ la quale si appoggi alle γ in α punti ($\Sigma\alpha = i$; cfr. N° **3**) — che saranno tutti semplici per queste ultime curve — corrisponderà una superficie luogo di linee fondamentali e avente C come linea α^{pla}. Queste due categorie di superficie, le prime contate due volte, le seconde semplicemente, devono formare insieme l'unica superficie aggiunta del sistema lineare $|\varphi|$ (¹); e poichè questa superficie complessiva deve avere C come curva multipla di ordine $\nu - 1$ (²), così sarà:

$$2\Sigma h + \Sigma\alpha \equiv 2\Sigma h + i = \nu - 1. \tag{3}$$

(¹) M. Pannelli, *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni . . .*, " Rend. Acc. dei Lincei ", (5), vol. 15, 1° sem. (1906), p. 620-21). Per la proprietà analoga delle superficie cfr.: Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. 37 (1901); n° **21**.

(²) E non maggiore. La multiplicità di C per le φ sarebbe maggiore soltanto quando la curva C fosse eccezionale per le φ; il che qui non può avvenire, perchè alle superficie φ corrispondono le F^4, sezioni iperpiane di V^4, e alla curva C comune alle φ corrisponde una curva sopra ognuna di queste F^4, le quali sono notoriamente prive di curve eccezionali.

Questa relazione sussiste anche se fra i punti basi del nostro sistema omaloidico appartenenti a una linea γ ve ne sono di infinitamente vicini. In tal caso alcune fra le superficie fondamentali o luoghi di linee fondamentali del sistema $|\varphi|$ in S_3 diventano infinitamente vicine ad altre, oppure a parti di queste altre; ma esse entrano egualmente come componenti autonome nell'unica superficie aggiunta.

Essendo la relazione (3) manifestamente incompatibile colla (2), sarà assurda l'ipotesi fatta dell'esistenza sopra V^4 di un sistema omaloidico di superficie; il che appunto si voleva dimostrare.

La relazione $2\Sigma h + i = \nu - 1$ è, più generalmente, una condizione necessaria perchè le curve γ di ordine ν da noi considerate possano mutarsi, per trasformazione birazionale, in punti semplici di un'altra varietà. E mi riservo di mostrarlo in altro lavoro, con un ragionamento più lungo, ma che si addentra maggiormente nella questione. Da queste considerazioni ulteriori risulterà provato altresì che la V^4 priva di punti doppi e la M_3^6 di S_5, della quale passiamo adesso ad occuparci, sono birazionalmente distinte anche tra loro.

6. — La varietà M_3^6 di S_5, intersezione generale di una quadrica (Q) con una varietà cubica (V_4^3), contiene anch' essa soltanto superficie (di ordine $6n$) sue intersezioni complete con varietà di ordine n.

Cominciamo col dimostrare, mediante un'opportuna enumerazione di costanti, che la superficie F^6, sezione iperpiana generica della M_3^6 anzidetta e perciò intersezione generale di una quadrica e di una V_3^3 di S_4, non contiene altre curve all'infuori di quelle di ordine $6n$, sue intersezioni complete con varietà V_3^n di S_4.

Si abbia infatti sopra una tale F^6 una curva irriducibile C_p^n. Possiamo supporre che il sistema lineare $|C|$ individuato da questa curva non contenga (parzialmente) il sistema $|\eta|$ delle sezioni iperpiane di F^6; perchè se no si potrebbe sostituire a C_p^n la curva generica del sistema lineare ottenuto sottraendo da $|C|$ il sistema $|\eta|$ il maggior numero di volte possibile. (E se C_p^n non è intersezione completa, queste operazioni condurranno certo a un sistema, o almeno a una curva effettiva ultima residua). La dimensione del sistema $|C|$, che è $=p$ (perchè la sua serie caratteristica non è altro che la serie canonica delle C, di dimensione $p-1$), sarà dunque eguale alla dimensione della serie lineare g_n che $|C|$ stesso sega sulle sezioni iperpiane η_4^6. Ora questa g_n sulle η_4^6 è certo non speciale se le C_p^n appartengono allo spazio S_4 (perchè i suoi gruppi non staranno in piani); la sua dimensione sarà allora $\leq n-4$, e sarà perciò anche $p \leq n-4$. Si tratterà dunque di curve C_p^n di S_4 dipendenti *precisamente* da $5n-p+1$ costanti (1). Che se poi le C_p^n stessero in spazi S_3 (e vi fossero perciò spazi S_3 incontranti F^6 secondo curve riducibili), la F^6 dovrebbe certo contenere o una retta, o una conica, oppure una cubica sghemba (2), tutte linee le quali dipendono pure, in S_4, da $5n-p+1$ parametri; e allora s'intenderà presa come C_p^n una di queste ultime linee.

Per una tale C_p^n di S_4 il dover star sopra una data quadrica (Q_3^2) equivale a $2n-p+1$ condizioni distinte; e sopra ogni quadrica se ne trovano perciò ∞^{3n} (3). Similmente il dover stare sopra una data varietà cubica V_3^3 equivale per la C_p^n a $3n-p+1$ condizioni; e sopra una tale varietà ve ne sono perciò ∞^{2n}. E poichè le quadriche di S_4 sono ∞^{14}, così fra le ∞^{2n} curve C_p^n contenute in una data V_3^3 quelle che sono pure contenute in una qualsiasi quadrica e perciò anche nella F^6 intersezione di quella V_3^3 con questa quadrica dipenderanno da $2n-(2n-p+1)+14=p+13$ parametri. D'altra parte una F^6 generica la quale contenga una tale C_p^n deve contenerne ∞^p (essendo appunto $=p$, come già si è detto, la dimensione del sistema completo $|C|$); saranno dunque soltanto ∞^{13} le F^6 che

---

(1) C. Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, " Math. Ann. ", vol. 30 (1887), p. 207.

(2) Si può prescindere dal caso che F^6 contenga delle cubiche piane, perchè essa sarebbe allora contenuta in un cono quadrico di S_4, e dipenderebbe perciò certo da una costante di meno che non la F^6 generale.

(3) Ciò risulta anche confermato dal fatto che, nella proiezione stereografica della quadrica sopra S_3, a queste $C_p{}^n$ devono corrispondere curve $C_p{}^n$ di S_3 appoggiate in n punti alla conica fondamentale, e si può verificare anche direttamente che queste ultime curve dipendono proprio da $3n$ parametri.

contengono curve così fatte, e una F^6 generica non potrà perciò contenerne, come appunto si voleva dimostrare.

Consideriamo ora sulla $M_3^6 \equiv Q \, . \, V_4^3$ generale di S_5 una superficie qualunque Φ. La curva sezione iperpiana generica di questa superficie, dovendo stare sulla F^6 intersezione dello stesso iperpiano (S_4) colla M_3^6, sarà intersezione completa di questa F^6 con una V_3^n (o V_4^n di S_5). La superficie Φ e le superficie $F^{6n} \equiv M_3^6 \, . \, V_4^n$ segneranno dunque sopra una F^6 sezione iperpiana generica di M_3^6 curve equivalenti. Riferendoci pertanto a un fascio di tali F^6 nel quale non sia contenuta nessuna superficie riducibile (fascio certo esistente, perchè se no fra le ∞^5 sezioni iperpiane della M_3^6 ve ne dovrebbero essere ∞^4 riducibili), potremo concludere, per un teorema del Sig. SEVERI (1), che la Φ è equivalente alle F^{6n} anzidette. E poichè infine il sistema lineare formato da queste F^{6n} sulla M_3^6 è completo (2), così la Φ sarà essa stessa intersezione di M_3^6 con una V_4^n, c. s. v. d.

7. — La varietà M_3^6 considerata contiene ∞^1 rette (3), e da una qualunque di queste (a) essa si proietta in un S_3 doppio con superficie limite del 6° ordine: infatti gli spazi S_3 passanti per a incontrano ulteriormente la varietà secondo curve di 5° ordine e genere 2, aventi a come trisecante, e alle quali si possono condurre per a sei piani tangenti.

I singoli piani passanti per a segano pertanto sopra M_3^6 le coppie di un'involuzione razionale I_2, sulla quale dobbiamo fare qualche osservazione.

Gli spazi S_3 tangenti a M_3^6 nei punti di a formano un cono cubico μ, generato dalla corrispondenza proiettiva tra il fascio degli S_4 tangenti in quei punti alla quadrica Q e il cono qua-

(1) *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (" Atti Ist. Veneto ", vol. 65; 1905-06; p. 625); teorema IV.

(2) Perchè è certamente completo il suo sistema lineare caratteristico. Cfr. F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. di Palermo ", vol. 17 (1903); n° 13.

(3) Corrispondenti agli ∞^1 fasci di rette contenuti nel complesso cubico generale, e già considerati da Voss (*Ueber Complexen und Congruenzen*, " Math. Ann. ", IX; 1876) e VENERONI (*Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso cubico generale*, " Rend. Istituto Lomb. ", (2), vol. 31; 1898).

drico-inviluppo degli S_4 tangenti a V_4^3. Ognuno di quegli S_3 sega M_3^6 (oltre che in a) secondo una C^5 avente nel suo punto di contatto un punto triplo, e che è la curva fondamentale corrispondente a questo punto di contatto nella I_2. Luogo di queste ∞^1 curve C^5 è la superficie F^{18}, intersezione di M_3^6 col cono cubico μ; e la retta a, essendo tripla per il cono μ e per di più linea di contatto di esso con M_3^6, sarà quadrupla per F^{18}.

Alle ∞^1 rette di M_3^6 corrispondono nella I_2 quartiche razionali; perciò alle sezioni iperpiane F^6 (che incontrano queste quartiche in 4 punti) corrisponderanno superficie F^{24}, segate da varietà V_4^4, aventi a come retta quintupla e la F^{18} suddetta come (unica) superficie aggiunta.

Più generalmente, alle superficie $F^{6n} \equiv M_3^6 \,.\, V^n$ corrisponderanno superficie di ordine $24n$, segate da varietà V^{4n} e aventi a come retta $(5n)^{\text{pla}}$. Quando però la F^{6n} abbia essa stessa a come retta k^{pla}, dalla superficie corrispondente si staccherà la F^{18} contata k volte, e rimarrà soltanto una superficie di ordine $6(4n-3k)$ con a come multipla di ordine $5n-4k$. E pertanto, se $k > n$, questa nuova superficie sarà di ordine $6n' < 6n$, e avrà a come multipla di ordine $< n'$.

Sulla M_3^6 esistono dunque sistemi lineari di superficie F^{6n} aventi rette multiple di ordine $> n$; ma le involuzioni I_2 esistenti sulla varietà permettono sempre di trasformare birazionalmente ogni sistema così fatto in un altro di ordine inferiore e pel quale nessuna retta abbia multiplicità superiore al nuovo valore di n.

8. — L'impossibilità dell'esistenza sulla M_3^6 di un sistema omaloidico di superficie (F^{6n}) si può stabilire colle stesse considerazioni già svolte ai N[i] **2-5** per la V^4 di S_4, fra le quali soltanto quelle del N° **4** vanno leggermente modificate.

Il genere (geom° = num°) della F^{6n} intersezione generale di M_3^6 con una varietà V^n è dato dal numero delle $F^{6(n-1)}$ linearmente indipendenti esistenti sulla M_3^6, e perciò dalla stessa postulazione di quest'ultima varietà rispetto alle V^{n-1}. Si ha quindi [1]:

$$p = \binom{n+4}{5} - \binom{n+2}{5} - \binom{n+1}{5} + \binom{n-1}{5}.$$

[1] F. Severi, *Su alcune questioni di postulazione*, n° 1.

E anche questo numero $\left(\text{che si riduce a } n^3 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n - 1\right)$ è superiore, per $n > 1$, alla diminuzione $\binom{2n+1}{3}$ che sarebbe portata nel genere da un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$; e la eguaglia per $n = 1$. D'altra parte, se la M_3^6 è priva di punti multipli, con sue sezioni iperpiane non si possono certo formare sistemi omaloidici.

L'eventuale sistema omaloidico non può dunque avere punti basi di multiplicità $> 2n$.

Dico, similmente, che le eventuali curve multiple di questo sistema si possono ritenere tutte di multiplicità $\leq n$. Infatti una curva di multiplicità $< n$ dovrebbe essere (cfr. N° **4**) di ordine certo inferiore a 6, dunque ≤ 5; e si può anche supporre (cfr. N° **7**) che non sia una retta. L'ordine dovrebbe dunque essere eguale a uno dei numeri 2, 3, 4, 5.

Non vi può essere una conica $(n+1)^{\text{pla}}$, perchè gli spazi S_3 passanti per il suo piano incontrerebbero ulteriormente M_3^6 secondo quartiche aventi colla conica 4 punti a comune, e che avrebbero perciò in questi punti colle V^n seganti le F^{6n} già più intersezioni di quanto comportano i loro ordini.

Se ci fosse una cubica piana $(n+1)^{\text{pla}}$, si potrebbe applicare questo stesso ragionamento alle altre cubiche segate dagli spazi S_3 passanti per la prima.

Supponiamo adesso che vi sia una curva $(n+1)^{\text{pla}}$ irriducibile di ordine 3, 4 o 5 appartenente a uno spazio S_3. Per questo S_3 passa un fascio di S_4 incontranti M_3^6 secondo superficie F^6; e sopra queste F^6 le F^{6n} devono segare curve appartenenti al sistema n^{plo} delle sezioni iperpiane. Ora, sopra una di queste F^6, una curva di ordine < 6 e appartenente a S_3 ha certo per residua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane una curva unica, isolata (di ordine 3, 2, 1); perciò, rispetto al sistema lineare n^{plo} del precedente, la prima contata n volte non può avere per residua che la seconda contata pure n volte; e nessuna curva del sistema n^{plo} può quindi contenere la prima parte contata $n+1$ volta.

Una curva $(n+1)^{\text{pla}}$ irriducibile appartenente a uno spazio S_4 non potrebbe essere che una quartica razionale normale, oppure una quintica, ellittica o razionale. Per questa curva passerebbero in ogni caso, nello stesso spazio S_4, delle quadriche non contenenti la F^6 intersezione di M_3^6 collo spazio medesimo; e queste quadriche incontrerebbero ulteriormente la F^6 suddetta secondo curve di ordine 8 o 7 (e di genere rispettivamente 4, 3, 2) aventi colla prima curva rispettivamente 10, 10 e 12 punti a comune. Queste ultime curve avrebbero pertanto colle V^n seganti le F^{6n} un numero di intersezioni superiore al prodotto dei loro ordini.

Infine una curva razionale normale di 5° ordine esistente sulla M_3^6 appartiene a ∞^9 quadriche di S_5; perciò a un sistema lineare ∞^8 di quadriche delle quali nessuna contiene la M_3^6. L'intersezione ulteriore della M_3^6 con due di queste quadriche è una curva di ordine 19 (e genere 21) avente colla quintica 17 punti a comune. Le due quadriche si possono però obbligare a passare ancora, p. es., per una conica della M_3^6 (certo esistente) che non incontri affatto la quintica; e l'intersezione residua è allora una curva di ordine 17 avente colla quintica pure 17 punti a comune. Così si vede che una V^n la quale segasse M_3^6 secondo superficie aventi la quintica come curva $(n+1)^{\text{pla}}$ dovrebbe contenere tutte queste ultime curve (di ordine 17), e perciò l'intera M_3^6.

Queste osservazioni permettono di concludere, analogamente a quanto si è fatto per la V^4, che anche sulla M_3^6 non esistono sistemi omaloidici di superficie, e che perciò la M_3^6 stessa non è rappresentabile sullo spazio S_3.

Torino, maggio 1908.