Gino Fano

Sul sistema ∞^3 di rette contenuto in una quadrica dello spazio a quattro dimensioni

Giornale di Matematiche, Vol. **43** (1905), p. 1–5

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1905_1>

GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI
PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI
NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

SUL SISTEMA ∞^3 DI RETTE
CONTENUTO
IN UNA QUADRICA DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

NOTA

DI

GINO FANO

Le rette dello spazio a quattro dimensioni si possono rappresentare analiticamente con dieci coordinate omogenee $r_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots 5; r_{ik} = -r_{ki})$ legate da alcune relazioni quadratiche (che si riducono a tre indipendenti) (1). E considerando le r_{ik} come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio S_9, le ∞^6 rette di S_4 hanno per immagini in questo spazio i punti di una varietà a 6 dimensioni del 5° ordine, a curve sezioni ellittiche (2).

Qualunque sistema ∞^k di rette dello spazio S_4 avrà a sua volta come immagine una varietà M_k contenuta nella M^5_6 suddetta. In un lavoro recente (3) io

(1) Le questioni fondamentali riguardanti la geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni furono trattate dal Sig. Castelnuovo nella Memoria: *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni.* (Atti Ist. Ven., ser. II, vol. VII; 1891).

(2) Perchè sei complessi lineari di rette hanno in generale 5 elementi a comune (Castelnuovo, Mem. cit., p. 46), e la rigata di 5° ordine intersezione generale di 5 complessi lineari è di genere 1 (ciò segue pure da quanto è detto nella stessa Mem. cit., n. 10).

(3) Atti della R. Acc. di Torino, vol. 39°; 1904.

ho studiata quella superficie che è immagine del sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica di S_4 priva di punti doppi. E in quest'occasione mi sono pure domandato quale sia la varietà M_3 immagine del sistema ∞^3 di rette contenuto in una quadrica non degenere di S_4.

A tale questione viene risposto nella presente Nota.

1. Determiniamo anzitutto l'ordine di questa M_3. Esso sarà altresì l'ordine della rigata formata da quelle rette della data quadrica Q, che appartengono in pari tempo a due complessi lineari: in particolare da quelle rette che si appoggiano a due piani assegnati. Ora questi due piani incontreranno la quadrica Q secondo coniche; e per ogni punto di una di queste coniche passeranno due rette della quadrica che si appoggiano anche all'altra conica (nelle sue intersezioni collo spazio S_3 tangente alla quadrica nel punto considerato). La rigata in discorso verrà dunque generata da una corrispondenza (2 , 2) fra quelle coniche; essa sarà perciò di 8° ordine e di genere 1. La varietà M_3 di cui si tratta sarà pertanto di 8° ordine; e si può anche affermare che le sue curve sezioni avranno il genere 1, perchè la curva immagine della rigata dianzi considerata non avrà in generale punti doppi, ossia sarà l'intersezione della M_3 con uno spazio S_7 non tangente ad essa; sicchè il suo genere sarà quello stesso della curva sezione più generale.

La varietà a tre dimensioni immagine del sistema di rette contenuto in una quadrica non degenere di S_4 *è di 8° ordine, a curve sezioni ellittiche.*

2. *La varietà* M^8_3 *sopra considerata appartiene allo spazio* S_9, ossia il sistema ∞^3 delle rette giacenti sulla data quadrica Q (sistema che d'ora in poi indicheremo brevemente con Γ) non è contenuto in alcun complesso lineare. Infatti lo spazio polare di un punto qualunque di quella quadrica rispetto a un tale complesso (se uno ve ne fosse) non potrebbe essere che lo spazio tangente alla quadrica in quel medesimo punto; e questi spazi tangenti dovrebbero allora passare tutti per un medesimo punto — il *centro* del complesso —, il che non avviene. — Il sistema Γ è però contenuto in infiniti complessi quadratici; p. e. in tutti quelli composti delle rette di S_4 che si appoggiano a una sezione iperpiana della quadrica Q, come anche nel complesso di tutte le tangenti di questa quadrica. Riservandoci di determinare in seguito (cfr. n. 5) la dimensione del sistema lineare formato da tutti i complessi quadratici che contengono il sistema di rette Γ, ci limiteremo qui a osservare che quest'ultimo sistema potrà ottenersi in infiniti modi come intersezione parziale di tre complessi quadratici. Ad es., se si indicano con μ_1 , μ_2 , μ_3 tre quadriche sezioni di Q con spazi S_3 presi nel modo più generale, i complessi quadratici formati dalle rette di S_4 che si appoggiano rispett. a queste tre superficie avranno a comune:

1.° il sistema Γ;

2.° i tre sistemi ∞^3 formati da quelle rette che si appoggiano a una delle tre superficie μ e alla conica intersezione delle due rimanenti (sistemi che hanno per immagini varietà del 10° ordine);

3.° le due stelle ∞^3 che hanno per centri i due punti comuni alle tre superficie μ.

3. Il Sig. Enriques ha già da tempo classificate dal punto di vista proiettivo tutte le varietà a tre dimensioni a curve sezioni iperellittiche, e in particolare anche ellittiche o razionali, che appartengono a uno spazio qualunque S_n (1). Da questa classificazione risulta che una varietà M^8_3 di S_9 a curve sezioni ellittiche o è un cono, oppure è razionale e si può rappresentare sullo spazio S_3 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le ∞^9 quadriche di questo ultimo spazio. Ora la M^8_3 immagine del nostro sistema di rette Γ non è certamente un cono, perchè se no il sistema Γ dovrebbe comporsi di fasci di rette aventi un elemento a comune. Perciò potremo concludere:

La varietà M^8_3 *di* S_9 *immagine del sistema di rette contenuto in una quadrica non degenere di* S_4 *è quella stessa che rappresenta il sistema lineare* ∞^9 *di tutte le quadriche dello spazio* S_3.

E potremo anche aggiungere: *Il sistema* ∞^3 *di rette contenuto in una quadrica non degenere dello spazio* S_4 *è razionale e si può rappresentare sullo spazio* S_3 *in modo che alle congruenze sue intersezioni cogli* ∞^9 *complessi lineari corrispondano le quadriche di quest' ultimo spazio.* In questa rappresentazione alle ∞^4 rette dello spazio S_3 corrisponderanno nel sistema Γ rigate incontrate da ogni complesso lineare secondo 2 generatrici, vale a dire rigate quadriche (o coni quadrici). La proprietà nota che sulla M^8_3 sopra considerata esistono soltanto curve di ordine pari trova la sua conferma nell'altra proprietà, pure nota, che sopra una quadrica non degenere di S_4 esistono solamente superficie, e in particolare superficie rigate, di ordine pari.

4. La rappresentazione suaccennata del sistema di rette Γ sullo spazio S_3 si può anche stabilire direttamente, nel modo che ora indicheremo.

Due rette di una quadrica non degenere Q dello spazio S_4 individuano sempre, secondo che sono sghembe o incidenti, una rigata quadrica o un cono quadrico di Q in cui sono entrambe contenute. E tre rette non appartenenti a una stessa schiera rigata o cono quadrico hanno sempre sopra Q una e una sola secante comune (che può essere in particolare una di esse). Se si indicano pertanto con σ le ∞^4 schiere rigate e coni quadrici contenuti in Q, e con Σ le ∞^3 congruenze formate dalle rette di Q che si appoggiano a una retta fissa (pure contenuta in Q), potremo dire che per due rette di Q passa sempre una e una sola σ, e per tre rette non appartenenti a una stessa σ passa una e una sola Σ. Viceversa, due congruenze Σ hanno a comune una σ; e tre Σ generiche hanno a comune una e una sola retta. Brevemente, le rette della quadrica Q, le rigate e coni σ, e le congruenze Σ soddisfanno (senza eccezioni) a tutti i postulati fondamentali dei punti, rette e piani nella geometria proiettiva dello spazio S_3; e perciò per quel medesimo sistema di enti varrà tutta quanta questa geometria. In particolare si potrà riferire *proiettivamente* il sistema ∞^3 delle rette contenute

(1) V. la Nota: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*; Math. Ann., vol. 46, p. 179 e seg. V. anche due note precedenti nei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, ser. 5a vol. III; maggio-giugno 1894.

nella quadrica Q allo spazio S_3 di punti; si potrà cioè stabilire fra queste due varietà ∞^3 (e in ∞^{15} modi diversi) una corrispondenza biunivoca tale che alle congruenze Σ corrispondano i piani dello spazio S_3, e quindi alle rigate σ le rette di questo spazio. Questa rappresentazione del sistema di rette Γ sullo spazio S_3 sarà appunto quella di cui al n. prec. si era riconosciuta la possibilità; perchè alle ∞^9 congruenze segate sul sistema Γ dai complessi lineari di S_4, le quali con ogni rigata σ hanno due rette a comune, corrisponderanno in S_3 superficie di 2° ordine, e perciò il sistema lineare ∞^9 di tutte le quadriche.

Facendo corrispondere a ogni retta della quadrica Q la congruenza Σ di cui essa è direttrice, si ha una corrispondenza che si rappresenta in S_3 secondo una reciprocità nulla. Di qui si vede che nella nostra rappresentazione *ai coni quadrici della quadrica* Q *corrispondono rette di un complesso lineare, e a due rigate quadriche giacenti sopra una medesima superficie di 2° ordine corrispondono rette coniugate rispetto a questo complesso.* La proprietà nota che la geometria proiettiva di una quadrica non degenere dello spazio S_4 coincide con quella di un complesso lineare non speciale di S_3 trova qui la sua conferma nel fatto che le rette di quella quadrica possono proprio considerarsi come punti di uno spazio S_3, nel quale i coni (e perciò i punti) della stessa quadrica rappresentano le rette di un complesso lineare (non speciale).

5. Determiniamo ora il numero dei complessi quadratici di rette dello spazio S_4 che passano per il sistema di rette Γ.

I complessi quadratici di rette dello spazio S_4 *sono in numero di* ∞^{49}. Infatti sulla varietà M^5_6 di S_9 immagine del sistema di tutte le rette di S_4 questi complessi saranno rappresentati dalle intersezioni di tale varietà colle quadriche del medesimo spazio S_9. Ora le quadriche di S_9 dipendono da $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ parametri, e fra esse ve ne sono ∞^4 che contengono l' intera varietà M^5_6 sopra nominata (1); perciò il sistema lineare ch' esse segano sopra questa M^5_6 avrà la dimensione $54-4-1=49$. Gli ∞^{49} complessi quadratici segheranno poi sopra Γ un sistema lineare di congruenze contenente (totalmente) tutte le coppie di congruenze segate dai complessi lineari, e al quale si vede perciò immediatamente che nella rappresentazione di Γ sullo spazio S_3 deve corrispondere il sistema lineare di *tutte* le superficie del 4° ordine. Quel sistema avrà dunque, al pari di quest'ultimo, la dimensione 34; e sarà perciò $49 - 34 - 1 = 14$ la dimensione del sistema dei complessi quadratici passanti per Γ.

Il sistema di rette* Γ *è contenuto in un sistema lineare* ∞^{14} *di complessi quadratici.

---

(1) Castelnuovo, Mem. cit., p. 4. Questo sistema lineare ∞^4 è determinato dalle cinque quadriche $r_i = 0$, dove

$$r_i = r_{kl} r_{mn} + r_{km} r_{nl} + r_{kn} r_{lm}$$

e *iklmn* è una qualsiasi permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4, 5.

6. La varietà delle rette contenute in un *cono quadrico di 1ª specie* dello spazio S_4 si spezza in due sistemi ∞^3 distinti (Γ', Γ''), secondo che queste rette stanno in piani dell'uno o dell'altro dei due sistemi ∞^1 contenuti nel cono medesimo. Questi due sistemi avranno a comune la varietà ∞^2 di quelle loro rette che passano pel vertice del cono.

Ciascuno dei due sistemi Γ', Γ'' ha per immagine una varietà del 4° ordine: poichè il cono proposto è incontrato da due piani generici secondo coniche, le quali dai piani di un determinato sistema del cono stesso vengono punteggiate proiettivamente; sicchè le rette sia di Γ' che di Γ'' che si appoggiano a queste due coniche formeranno una rigata razionale del 4° ordine.—Le due varietà $M^4{}_3$ immagini di Γ' e Γ'' appartengono a spazi S_6 (poichè, come si verifica facilmente, tanto Γ' quanto Γ'' sono contenuti in una rete di complessi lineari, fra i quali ∞^1 sono singolari (1)): esse sono varietà ∞^1 razionali normali di piani, e hanno a comune la loro unica rigata quadrica direttrice (2), la quale sarà immagine del sistema delle ∞^2 rette generatrici del cono proposto.

7. Il sistema delle rette contenute in un *cono quadrico di 2ª specie* dello spazio S_4 ha anche per immagine una varietà $M^4{}_3$ di S_6, razionale normale e composta di ∞^1 piani; ma questa $M^4{}_3$ è un cono, proiettante una rigata razionale normale del 4° ordine con ∞^1 coniche direttrici. Lo spazio S_6 a cui questa varietà appartiene incontra la $M^5{}_6$ di S_9 immagine del sistema di tutte le rette di S_4 secondo una $M^3{}_4$, immagine del sistema ∞^4 di tutte le rette che si appoggiano all'asse del cono quadrico proposto.

Torino, aprile 1904.

---

(1) Castelnuovo, Mem. cit., p. 22 (caso IV).

(2) Cfr. C. Segre: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani.* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 21; 1885); capo II.