GINO FANO

Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **39** (1904), p. 597–613

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1904_4>

Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni.

Nota di GINO FANO.

Le quadriche dello spazio a quattro dimensioni che non hanno punti doppî, ossia non sono coni, godono della proprietà notevolissima (che il sig. KLEIN ha stabilita fino dal 1872) di non contenere altre superficie algebriche all'infuori di quelle che sono loro intersezioni complete con ulteriori varietà algebriche a tre dimensioni del medesimo spazio (*). In questa Nota viene dimostrato che la stessa proprietà spetta altresì alle varietà cubiche dello spazio S_4 prive di punti doppî, e ad alcune varietà cubiche con punti doppî, le quali vengono tutte determinate. Per le varietà cubiche che non contengono piani viene pure indicato come si possano costruire tutte le superficie algebriche che vi sono contenute, siano o non siano queste loro intersezioni complete con altre varietà.

1. — Sia F una superficie algebrica, contenuta in una varietà cubica V dello spazio S_4 con un numero finito (≥ 0) di punti doppî, e che incontri tutte le ∞^2 rette esistenti sopra V in un medesimo numero n di punti. Essa sarà evidentemente di ordine $3n$ (poichè sarà questo il numero dei punti comuni ad essa e a uno qualunque dei piani che incontrano V secondo cubiche spezzate in tre rette). — Se le rette esistenti sopra V formano un sistema ∞^2 unico (irriducibile), è chiaro

(*) *Ueber einen liniengeometrische Satz* („Gött. Nachr.„, 1872; o anche „Math. Ann.„, t. 22, p. 234 e seg.). Più generalmente, il sig. KLEIN ha anche dimostrato che le varietà algebriche di dimensione $r-2\,(r \geq 5)$ contenute in una quadrica dello spazio S_r, la quale non sia un cono oppure sia tale di specie $\leq r-4$, si possono tutte ottenere come intersezioni complete di quella quadrica con varietà M_{r-1} del medesimo spazio S_r.

che ogni superficie algebrica contenuta in V dovrà soddisfare alla condizione sopra indicata; mentre se quelle rette si ripartiscono in due o più sistemi ∞^2 distinti, potrà avvenire che vi sia sopra V qualche superficie incontrante le rette di questi sistemi rispett. in un diverso numero di punti. In ogni caso, qualsiasi superficie F^{3n} la quale sia intersezione completa di V con una varietà M_3^n del medesimo spazio S_4 dovrà certamente incontrare ogni retta di V che non stia per intero su di essa in n punti. Dico che questa proposizione è invertibile, ossia:

Ogni superficie algebrica irriducibile contenuta in una varietà cubica di S_4 *con un numero finito* ≥ 0 *di punti doppî, e incontrante ogni retta di questa varietà in un medesimo numero* n *di punti, è l'intersezione completa* (*di ordine* 3n) *di quella varietà con un'altra varietà algebrica* (*di ordine* n).

Uno spazio S_3 generico incontrerà la varietà cubica proposta V e la data superficie F^{3n} in essa contenuta secondo una superficie f^3 priva di punti doppî e secondo una curva γ^{3n} contenuta in questa f^3. E questa curva γ^{3n} avrà a comune precisamente n punti con ognuna delle 27 rette (tutte distinte) (*) contenute nella f^3. *Dico che questa curva è l'intersezione completa della superficie* f^3 *con una superficie di ordine* n.

Infatti in questa f^3 sono contenute delle reti di curve sghembe del 3° ordine, in ciascuna delle quali vi sono delle curve spezzate in tre fra le 27 rette: da ciò si vede che tutte quelle cubiche dovranno incontrare la curva γ^{3n} in $3n$ punti. Ora, nella solita rappresentazione piana della f^3, a una di queste reti di cubiche corrispondono le rette del piano rappresentativo; perciò nella stessa rappresentazione alla curva γ^{3n} corrisponderà una curva piana pure di ordine $3n$, la quale dovrà avere un punto n^{plo} in ciascuno dei 6 punti fondamentali. Ed è noto (e si può anche verificare direttamente, contando le costanti da cui dipendono i due sistemi di curve) che, rappresentata una f^3 sul piano nel modo consueto, le curve di ordine $3n$ di questo piano le quali nei 6 punti fondamentali della rappresentazione hanno altrettanti punti n^{pli}, sono *tutte* immagini di curve intersezioni complete della superficie f^3 con superficie di ordine n.

(*) Klein, *Ueber Flächen dritter Ordnung*; " Math. Ann. ", vol. 6°, p. 566.

2. — Consideriamo ora n sezioni iperpiane generiche γ^{3n} della data superficie F^{3n}, e domandiamoci quante condizioni distinte imponga a una varietà M_3^n di S_4 il passaggio per tutte queste n curve — successivamente — e per un punto ulteriore di F^{3n}; dal che seguirà altresì che questa stessa M_3^n dovrà contenere l'intera superficie F^{3n}. Se questo numero complessivo di condizioni sarà tale che vi sia almeno una M_3^n passante per F^{3n} e non contenente la varietà V come parte — vale a dire se si troverà che vi sono almeno $\binom{n+1}{4}+1$ varietà M_3^n linearmente indipendenti passanti per F^{3n} —, si potrà concludere che questa superficie sarà appunto l'intersezione completa di V con una M_3^n.

Cominciamo col considerare una prima fra le n curve γ^{3n}. Questa curva, essendo intersezione completa di una f^3 con una f^n, starà sopra $\binom{n}{3}+1$ superficie f^n linearmente indipendenti; essa imporrà perciò a una f^n che debba contenerla un numero di condizioni eguale a

$$\binom{n+3}{3}-\binom{n}{3}-1=3\binom{n+1}{2}.$$

E questo stesso numero di condizioni essa imporrà altresì a una M_3^n di S_4 la quale pure debba contenerla.

Per la seconda fra le n curve γ^{3n}, bisognerà determinare quante condizioni ulteriori essa impone a una f^n (o a una M_3^n di S_4) che già passa per i $3n$ punti sue intersezioni con un piano (ossia collo spazio S_3 della prima curva γ^{3n}); ovvero anche qual'è la dimensione della serie lineare che viene segata su di essa dalle f^n o M_3^n passanti per questi stessi $3n$ punti. Dico che questa serie lineare è *precisamente* la stessa che quella segata dal sistema di tutte le superficie f^{n-1} di quello spazio S_3. Infatti, ricorrendo di nuovo alla rappresentazione piana della superficie f^3 su cui sta la curva γ^{3n}, alla serie lineare segata sopra quest'ultima curva dalle superficie f^n corrisponde, sulla curva immagine C^{3n} dotata di 6 punti n^{pli}, la serie caratteristica del sistema lineare formato da tutte le C^{3n} con questi medesimi 6 punti n^{pli}; e al gruppo di $3n$ punti segato sopra γ^{3n} da un piano corrisponde un gruppo G_{3n} segato da una cubica che passa (in generale semplicemente) per quei 6 punti. Perciò i gruppi residui di quest'ultimo rispetto alla serie dianzi considerata si potranno *tutti* segare sulla C^{3n} piana mediante curve di ordine $3(n-1)$ avanti la multiplicità $n-1$ in ognuno dei 6 punti fondamentali; e a queste curve corrispondono sulla superficie f^3 precisamente quelle che vengono segate su di essa da superficie di ordine $n-1$.

La seconda curva γ^{3n} imporrà dunque a una f^n o M_3^n già passante per quei primi $3n$ punti e che debba contenerla per intero tante condizioni quante ne impone a una f^{n-1} generica del suo S_3 che pure debba contenerla. Ora le f^{n-1} che contengono questa curva γ^{3n} devono anche contenere come parte la f^3 su cui essa giace, e fra esse ve ne sono perciò $\binom{n-1}{3}$ linearmente indipendenti. Dunque il numero di condizioni che il passaggio per la curva γ^{3n} impone a queste f^{n-1} sarà dato dalla differenza:

$$\binom{n+2}{3}-\binom{n-1}{3}=3\binom{n}{2}+1\,;$$

e un egual numero di condizioni imporrà questa (seconda) curva γ^{3n} a una M_3^n di S_4 la quale già passi per la prima.

Similmente, la terza curva γ^{3n} imporrà a una M_3^n che già passi per le prime due tante condizioni quante essa ne impone a una superficie f^{n-2} del suo spazio S_3 la quale debba contenerla, vale a dire:

$$\binom{n+1}{3}-\binom{n-2}{3}=3\binom{n-1}{2}+1$$

e così di seguito. La quarta curva γ^{3n} imporrà $3\binom{n-2}{2}+1$ condizioni ulteriori; ecc. L'n^{sima} ed ultima curva γ^{3n} imporrà $3\binom{2}{2}+1$ condizioni. Complessivamente, queste n curve γ^{3n} e un punto ulteriore preso sopra F^{3n} imporranno a una M_3^n di S_4 condizioni in numero di:

$$3\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\right]+n=3\binom{n+2}{3}+n$$

e perciò il numero delle M_3^n linearmente indipendenti che soddisfanno a tutte queste condizioni, e passano di conseguenza per la superficie F^{3n}, sarà dato dalla differenza:

$$\binom{n+4}{4} - 3\binom{n+2}{3} - n = \binom{n+1}{4} + 1.$$

Il nostro teorema è dunque dimostrato.

3. — Il teorema precedente sarà applicabile a *tutte* le superficie algebriche contenute in una data varietà cubica, ogni qual volta le rette giacenti sopra questa varietà formino un sistema ∞^2 unico (e in questo caso si potrà anche prescindere dalla condizione di irriducibilità finora imposta alla superficie F). Dico che ciò avviene certamente quando la varietà proposta V *non ha punti doppî*, oppure *ne ha un numero finito* ≤ 5 *fra loro indipendenti.*

Consideriamo dapprima una varietà V priva di punti doppî. Per assicurarci che le ∞^2 rette in essa contenute non possono ripartirsi in due o più sistemi distinti basteranno le osservazioni seguenti:

1) Se il sistema ∞^2 delle rette contenute in una varietà V priva di punti doppî si spezzasse in due sistemi distinti, questi due sistemi non potrebbero avere nessuna retta a comune. — Infatti una tal retta conterebbe come due almeno fra le 27 rette contenute nella superficie f^3 intersezione di V con un qualsiasi spazio S_3 passante per essa: sicchè tutte queste ∞^2 superficie dovrebbero avere sopra quella retta qualche punto doppio (*), il che non può avvenire senza che V stessa abbia sulla medesima retta anche un punto doppio (**);

2) Nessuno di quei sistemi parziali potrebbe contenere un cono. Infatti questo cono dovrebbe stare in uno spazio S_3, e sarebbe certamente un cono cubico (non quadrico, perchè se no il suo spazio incontrerebbe ulteriormente V secondo un piano, e in questo piano vi sarebbero 4 punti doppî della varietà V). Esso esaurirebbe dunque l'insieme delle rette di V uscenti dal

(*) Klein, " Math. Ann. ", 6°, l. c.

(**) Perchè se no vi sarebbero soltanto ∞^1 sezioni iperpiane aventi un punto doppio sulla retta considerata: quelle cioè determinate dagli spazi S_3 tangenti a V nei singoli punti di questa retta.

suo vertice; e le rette del sistema residuo che escono da questo medesimo vertice sarebbero perciò anche generatrici di quel cono, vale a dire elementi comuni ai due sistemi di rette;

3) Poichè dunque da ogni punto di V (senza eccezioni) non può escire che un numero finito di rette contenute in questa varietà, fra questi punti ve ne saranno certo di quelli pei quali le 6 rette che ne escono coincidono a due a due (i punti di contatto degli spazi quadritangenti, e le intersezioni colla curva doppia della varietà Hessiana). Se dunque il sistema ∞^2 complessivo (di 6° ordine) delle rette contenute in V si spezza in due o più sistemi senza elementi comuni, esso non potrà spezzarsi che in sistemi di ordine 2, o multiplo di 2; e uno di questi sarà anzi certamente di ordine 2. In questo sistema di 2° ordine saranno contenute indubbiamente delle *rette speciali* (*) (perchè le coppie di rette di questo sistema che escono dai punti di una retta del sistema residuo formano una rigata iperellittica, nella quale vi sono certo delle coppie costituite da rette coincidenti; e queste saranno altrettante rette speciali). Queste rette speciali p formeranno una sviluppabile, che non può essere un cono, e avrà perciò uno spigolo di regresso. Ora per ogni punto di quest' ultima linea la corrispondente retta p dovrà contare come 3 almeno fra le 6 rette di V che ne escono; e ciò non può avvenire senza che quella retta appartenga in pari tempo al sistema residuo.

Da tutte queste osservazioni risulta pertanto che, se sopra una varietà cubica di S_4 le ∞^2 rette si ripartiscono in due o più sistemi distinti, la varietà deve certo avere qualche punto doppio.

4. — Consideriamo ora una varietà V con un numero finito di punti doppî. Da uno qualunque X di questi punti escirà un cono sestico Γ di rette contenute in V (intersezione di due coni a tre dimensioni, rispett. di 2° e di 3° ordine); e tutte le (altre) ∞^2 rette contenute in V saranno corde di questo cono (**).

(*) Cfr. la mia Memoria: *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni...* (che sarà pubblicata nel vol. X (serie III) degli " Annali di Matematica ").

(**) Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni...* (" Mem. Acc. di Torino ", ser. II, t. 39). Cfr. in particolare n° 4.

Rappresentando birazionalmente la varietà V sopra uno spazio S_3 mediante proiezione dal suo punto doppio X, le sue ∞^2 rette si proietteranno secondo le corde della sestica γ, traccia del cono Γ (la quale sarà intersezione di una quadrica con una superficie del 3° ordine); e perciò il sistema di quelle rette non potrà certo spezzarsi, fin tanto che non si spezzi questa sestica. Ora questa sestica, se è riducibile, o si spezza in due cubiche con *cinque* punti a comune, oppure contiene come parte una retta o una conica, ed ha allora sopra quest'ultima linea *tre* o rispett. *quattro* punti doppî: essa non si spezzerà dunque certamente, fin tanto che i suoi punti doppî siano non più di quattro e fra loro indipendenti. E siccome questi punti doppî sono le tracce delle generatrici doppie del cono Γ, ossia delle rette che congiungono X agli altri eventuali punti doppî di V, così non sarà certo possibile lo spezzamento fin tanto che questi punti doppî siano complessivamente in numero ≤ 5 e fra loro indipendenti.

Concludiamo pertanto: *Le ∞^2 rette contenute in una varietà cubica dello spazio* S_4 *la quale non abbia punti doppî, oppure ne abbia soltanto un numero finito ≤ 5 fra loro indipendenti, formano sempre un sistema irriducibile;* e perciò *ogni superficie algebrica contenuta in una tale varietà è intersezione completa di questa con un'altra varietà pure a tre dimensioni.*

5. — Si può dimostrare anche direttamente, facendo uso in parte di considerazioni analitiche, che quando una varietà cubica V ha un punto doppio dal quale esce un cono sestico irriducibile di rette in essa contenute (sicchè la varietà non potrà avere in tutto che cinque punti doppî al più, fra loro indipendenti), ogni superficie algebrica contenuta in V medesima deve costituirne l'intersezione completa con un'altra varietà a tre dimensioni.

L'equazione della varietà V si potrà scrivere infatti sotto la forma:

$$x_0 f - \varphi = 0$$

dove f e φ sono forme rispett. di 2° e di 3° grado nelle quattro coordinate x_1, x_2, x_3, x_4, e il punto fondamentale $[O]$ è il punto doppio che si vuol considerare. Da questo punto la varietà V

si proietta univocamente sullo spazio $x_0 = 0$, e ogni superficie in essa contenuta ha per immagine una certa superficie di questo spazio, ad eccezione del cono sestico Γ uscente dal punto $[O]$ che ha per immagine la sola sestica fondamentale sua traccia $f = \varphi = 0$. Siccome però questo cono è l'intersezione completa di V col cono quadrico $f = 0$, così basterà dimostrare che, data nello spazio rappresentativo $x_0 = 0$ una qualsiasi superficie F, di equazione $F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$, quella superficie (F) contenuta in V e che ha la prima per immagine potrà sempre ottenersi come intersezione completa di V stessa con un'altra varietà a tre dimensioni.

Ora il cono che proietta la superficie proposta F dal punto $[O]$ non può avere a comune con V, all'infuori della superficie (F), che il solo cono Γ (da noi supposto irriducibile), contato eventualmente più volte. Perciò, se la superficie F non passa per la sestica $f = \varphi = 0$, la (F) sarà l'intersezione completa di V col cono proiettante sopra nominato.

Supponiamo invece che la superficie F (di ordine n) passi per la sestica $f = \varphi = 0$ (dello spazio $x_0 = 0$), e perciò il cono a tre dimensioni $F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ che la proietta dal punto $[O]$ passi a sua volta per il cono sestico Γ — che in S_4 è rappresentato dalle stesse equazioni $f = \varphi = 0$ —, e eventualmente anche con una multiplicità > 1. La forma quaternaria F si potrà allora esprimere come combinazione lineare delle due forme f e φ (*):

$$F \equiv Af + B\varphi$$

dove A e B sono certe forme ulteriori (di gradi rispett. $n - 2$ e $n - 3$); e l'intersezione complessiva della varietà V col cono $F = 0$, ossia delle due varietà:

$$(1) \qquad x_0 f - \varphi = 0 \qquad F \equiv Af + B\varphi = 0$$

dovrà anche appartenere alla varietà (pure di ordine n):

$$f \cdot (A + Bx_0) = 0$$

(*) NOETHER, "Math. Ann.", vol. 2° (1870), pag. 314-315; oppure anche SEVERI, *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre* ("Rend. Acc. dei Lincei", ser. 5ª, vol. XI, 1902).

la cui equazione è conseguenza delle (1). Anzi quest'ultima equazione si potrà proprio sostituire alla $F=0$ nel sistema (1); ossia l'intersezione delle due varietà (1) sarà *precisamente* la stessa che quella delle due varietà:

$$x_0 f - \varphi = 0 \qquad f.(A + Bx_0) = 0.$$

Se ora nella seconda di queste equazioni noi sopprimiamo il fattore f, ciò equivarrà soltanto a prescindere, nell'intersezione complessiva di queste due varietà, dal cono Γ (che ne è parte) contato semplicemente; e perciò l'intersezione (di ordine $3[n-2]$) delle due varietà:

$$x_0 f - \varphi = 0 \qquad A + Bx_0 = 0$$

sarà costituita dalla sola superficie (F) se il cono Γ era parte non multipla dell'intersezione precedente; mentre invece se esso ne era parte multipla, la sua multiplicità sarà ora diminuita di un'unità. In quest'ultimo caso si potrà ragionare sulla forma $A + Bx_0$ come già si è fatto per la F; dovrà cioè essere identicamente:

$$A + Bx_0 \equiv A_1 f + B_1 \varphi$$

e la varietà (di ordine $n-4$):

$$A_1 + B_1 x_0 = 0$$

avrà a comune con V la sola superficie (F) più, eventualmente, il cono Γ contato ancora una volta di meno; e così di seguito, finchè non si ottenga un'intersezione della quale il cono Γ non sia più parte. Se l'intersezione delle due varietà (1) comprendeva il cono Γ contato k volte (sicchè certamente $6k < 3n$, ossia $n > 2k$), dopo k operazioni del tipo indicato si troverà un'equazione di grado $n-2k$, rappresentante una varietà che avrà a comune con V la sola superficie (F).

6. — Il teorema enunciato alla fine del n° 4 non è certo valido per altre varietà cubiche con un numero finito di punti doppî, all'infuori di quelle ivi considerate. Infatti le varietà con 6 punti doppî indipendenti contengono *tre* diversi sistemi di rette (due di 1° ordine, generabili con reti proiettive di spazi S_3 (*), e uno di 4° ordine); e il cono sestico uscente da uno qualunque dei loro punti doppî si spezza in due coni cubici, che non sono (separatamente) intersezioni complete di due varietà a tre dimensioni. E tutte le rimanenti varietà cubiche con un numero finito di punti doppî contengono dei piani (**).

Quanto poi alle varietà con infiniti punti doppî, risulta dall'enumerazione fattane dal sig. SEGRE (***) che le sole le quali non contengano piani sono le seguenti:

1° *Le varietà più generali con una (sola) retta doppia* (e nessun punto doppio fuori di questa retta);

2° *La varietà con una quartica doppia (irriducibile)*, la quale contiene tutte le ∞^2 corde di questa quartica (ed è precisamente il luogo di tali corde).

Sopra quest'ultima varietà esistono però infiniti coni cubici (quelli che proiettano la quartica doppia dai singoli suoi punti) e anche infinite altre rigate cubiche normali (determinate dalle involuzioni quadratiche sulla quartica): tutte superficie che non sono intersezioni complete di due varietà a tre dimensioni.

Invece *per le varietà cubiche con una (sola) retta doppia di 1ª specie* (****) (SEGRE, Mem. cit., n° 33), *oppure con una (sola) retta doppia di 2ª specie del tipo più generale* (e senza spazio tangente fisso lungo questa retta: Mem. cit., n° 46) *sussiste ancora la proprietà che ogni superficie in esse contenuta è loro intersezione completa con un'altra varietà a tre dimensioni.* — Le rette contenute in una tale varietà si ripartiscono infatti in

---

(*) SEGRE, Mem. cit., ni 12, 13.

(**) Infatti in qualsiasi altro caso il cono sestico uscente da uno qualunque dei punti doppi dovrà contenere come parte un piano, oppure un cono quadrico; e anche in quest'ultima ipotesi la varietà dovrà contenere almeno un piano (come intersezione residua collo spazio S_3 di quel cono quadrico). Per le varietà cubiche contenenti piani si vegga la Mem. cit. del sig. SEGRE, n° 5 e seg. Nel seguito di questa Nota si prescinde completamente dalla considerazione di queste ultime varietà, alle quali il teorema del n° 4 non può evidentemente applicarsi.

(***) SEGRE, Mem. cit., n° 32 e seg.

(****) Un punto doppio di una varietà si dice " di r^{sima} specie " quando il cono quadrico ivi tangente a questa varietà è appunto " di specie r ", ossia è un S_{r-1}-cono. E una linea doppia di r^{sima} specie è una linea i cui punti generici sono doppi di specie $r+1$ (v. Mem. SEGRE, n° 46).

due (soli) sistemi; un sistema (1,6) di rette appoggiantisi alla retta doppia d, e un sistema residuo (4,15) o rispett. (3,9). E fra i piani tritangenti (ossia che incontrano la varietà proposta secondo una terna di rette) quelli che non si appoggiano a d contengono tre rette del secondo sistema, e quelli che si appoggiano a d ne contengono due del primo e una del secondo. Segue da ciò che una superficie algebrica contenuta nella varietà proposta e che dalle rette del secondo sistema sia incontrata in m punti avrà l'ordine $3m$, e dovrà incontrare le rette del primo sistema o nello stesso numero m di punti, o, più generalmente, in $m-h$ punti ($h \geq 0$), avendo inoltre la retta d come multipla di ordine $2h$ (sicchè si potrà sempre dire, in un certo senso, che essa incontra tutte quante le rette della varietà cubica in m punti; soltanto per tutte le rette del primo sistema h delle m intersezioni coinciderebbero sopra la retta d). Ora a queste varietà cubiche con una (sola) retta doppia è ancora applicabile l'intero ragionamento dei n^i 1-2; poichè le loro sezioni iperpiane generiche sono superficie cubiche con un unico punto doppio, rispett. conico o biplanare (del tipo più generale), e si possono rappresentare sul piano come una superficie priva di punti doppî, colla sola differenza che i 6 punti fondamentali staranno sopra una conica, o rispett. si ripartiranno a 3 a 3 sopra due rette (essendo però sempre tutti distinti). Anzi la dimostrazione riesce in questo caso alquanto semplificata, poichè la rappresentazione piana suaccennata di queste superficie coincide con quella che per ciascuna di esse può stabilirsi direttamente mediante proiezione dall'unico punto doppio, sicchè tutte le considerazioni che si appoggiano sopra tale rappresentazione diventano molto più ovvie e intuitive. — Quelle superficie che incontrano le rette del secondo sistema ([4,15] o rispett. [3,9]) in m punti, e le rette del sistema (1,6) in soli $m-h$ punti (fuori di d), si potranno segare con varietà di ordine m aventi la retta d come multipla di ordine h.

Tenendo conto pertanto del risultato ottenuto al n° 4, e delle diverse considerazioni esposte in questo n°, possiamo concludere:

Le sole varietà cubiche dello spazio S_4, *sulle quali esistono superficie algebriche che non sono loro intersezioni complete con altre varietà, sono le seguenti:*

1) *Quelle che contengono piani* (*):
2) *La varietà con 6 punti doppî indipendenti;*
3) *La varietà con quartica doppia.*

Queste ultime due varietà contengono sistemi di rette di 1° ordine generabili con reti proiettive di spazi S_3 (e sono le sole che contengano di questi sistemi, all'infuori di quei loro casi particolari che contengono anche dei piani, e rientrano perciò nel tipo 1)). La varietà con 6 punti doppî indipendenti contiene (come già si è detto) due sistemi (1,6), fra loro " coniugati ", cioè tali che le rette di ciascuno di essi sono proiettate da quelle dell'altro sistema secondo reti proiettive di spazi S_3. Invece la varietà con quartica doppia (Segre, Mem. cit., n^i 43-44) contiene un solo sistema (1,6), che si può dire " coniugato di sè stesso ", e le cui rette sono proiettate da due qualunque fra esse secondo reti proiettive di spazi S_3. In questi due casi le superficie algebriche contenute nella varietà, pur non essendo sempre intersezioni complete con altre varietà, si possono però tutte ottenere in modo abbastanza semplice, come ora mostreremo.

7. — Sopra una varietà cubica V con (soli) 6 punti doppî indipendenti le ∞^2 rette si ripartiscono fra due sistemi (1,6) e un sistema residuo (4,15); e un piano tritangente che non passi per alcun punto doppio contiene sempre o tre rette di quest'ultimo sistema, oppure una retta di ciascuno dei tre. Una superficie algebrica contenuta nella varietà V e che dalle rette del terzo sistema sia incontrata in m punti sarà dunque di ordine $3m$; e perciò *ogni superficie algebrica contenuta nella varietà* V *avrà l'ordine multiplo di tre.* Se questa stessa superficie è incontrata anche dalle rette dei due sistemi (1,6) nel medesimo numero m di punti — e se è irriducibile, o composta di parti irriducibili tutte soddisfacenti alla condizione suaccennata —, essa sarà dunque l'intersezione completa della varietà V con una varietà di ordine m (cfr. n^i 1-2). In caso contrario, essa dovrà incontrare le rette di uno dei due sistemi (1,6) in un certo

(*) Fra queste varietà sono compresi anche i coni a tre dimensioni, e tutte le varietà riducibili.

numero $m-h$ di punti ($0 \leq h \leq m$), e quelle dell'altro sistema (1,6) in $m+h$ punti.

Ora, in ciascuno dei due sistemi (1,6) sono contenute ∞^2 rigate cubiche normali, formate da quelle rette del sistema che si appoggiano a una retta arbitraria del sistema residuo (4,15) (Segre, Mem. cit., n° 14); e fra queste rigate sono compresi anche i coni cubici di rette del medesimo sistema che escono dai singoli punti doppî di V. Ciascuna di queste rigate non ha alcun punto a comune colle (altre) rette di quel sistema (1,6) a cui appartengono le sue generatrici; è incontrata in due punti dalle rette dell'altro sistema (1,6), e in un solo punto dalle rette del sistema (4,15). Pertanto, se insieme a una qualunque superficie F contenuta in V, la quale incontri le rette dei due sistemi (1,6) e del sistema (4,15) rispett. in $m+h$, $m-h$, e m punti, noi consideriamo h di quelle rigate cubiche, appartenenti al 1° sistema (1,6) — ossia a quello le cui rette incontrano F in $m+h$ punti —, otterremo, complessivamente, una superficie (riducibile) di ordine $3(m+h)$ la quale incontrerà le rette di tutti tre i sistemi esistenti sopra V nel medesimo numero $m+h$ di punti. *Dico che questa superficie è l'intersezione completa della varietà proposta* V *con una varietà di ordine* m + h. Ad essa è infatti applicabile lo stesso ragionamento dei n[i] 1-2, completato con poche osservazioni. Anzitutto le sezioni iperpiane generiche di questa superficie $\Phi^{3(m+h)} \equiv \Phi^{3n}$ saranno curve γ^{3n}, riducibili sì, ma sempre intersezioni complete di una superficie cubica generale con una superficie di ordine n. In secondo luogo queste stesse curve, essendo casi particolari delle γ^{3n} irriducibili considerate ai n[i] 1-2, e ottenibili da queste con deformazioni continue, non potranno certo imporre a una M_3^n che debba contenerle un maggior numero di condizioni di quanto avveniva, per ogni singola curva, nel caso generale. Infine è vero sì che una varietà di ordine n obbligata a passare per n sezioni iperpiane e per un punto ulteriore di una data superficie è obbligata a contenere in conseguenza, se la superficie è riducibile, soltanto quella parte di essa sulla quale è stato preso l'ultimo punto; ma, se questa parte ha a comune con ognuna delle rimanenti qualche punto che non appartenga a nessuna delle n sezioni iperpiane considerate, si vede immediatamente che la stessa varietà dovrà passare in conseguenza anche per tutte queste altre parti. Ora due superficie algebriche contenute nella nostra varietà cubica hanno certo (come due superficie qualunque nello spazio S_4) qualche punto a comune; basterà dunque, se la superficie Φ^{3n} si compone di k parti diverse, scegliere $k-1$ punti comuni a una di queste parti e rispett. a ciascuna delle altre, e valersi di n sezioni iperpiane non passanti per alcuno di questi k punti, per poter arrivare senz'altro alla conclusione che a noi occorre.

Diremo pertanto: *Anche sopra una varietà cubica con 6 punti doppî indipendenti ogni superficie algebrica ha ordine multiplo di 3; e se essa non è l'intersezione completa di quella varietà con un'altra varietà a tre dimensioni, si potrà tuttavia segare con una varietà passante per un certo numero di rigate cubiche appartenenti a un medesimo sistema di rette* (1,6) (*). Più esattamente, occorrono a tal uopo tante rigate cubiche, quant'è la semi-differenza fra i numeri dei punti in cui la superficie è incontrata dalle rette dei due sistemi (1,6); e le rigate devono appartenere a quel sistema (1,6) le cui rette incontrano la superficie nel numero di punti maggiore. P. es., una qualunque di queste stesse rigate cubiche si può sempre segare con una quadrica (e precisamente con un cono quadrico) passante per una (qualsiasi) rigata cubica del sistema opposto.

Sopra una varietà cubica con 6 punti doppî indipendenti le superficie di dato ordine $3n$ si ripartiranno in $2n+1$ sistemi, a seconda del numero (variabile da 0 a $2n$) dei punti che esse hanno a comune colle rette di uno qualunque dei due sistemi (1,6) contenuti nella varietà (**): proprietà che è manifestamente analoga

---

(*) A questo risultato si potrebbe anche giungere con un ragionamento analogo a quello del n° 5. Il cono sestico Γ sarebbe ora composto di due coni cubici (irriducibili) Γ', Γ'', e perciò l'intersezione del cono a tre dimensioni $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ colla varietà proposta V potrebbe contenere eventualmente come parte uno solo di quei due coni cubici, oppure anche entrambi, ma con multiplicità diverse. Tuttavia, aggiungendo al cono $F=0$ un numero conveniente di coni quadrici a tre dimensioni passanti per uno dei due coni Γ' e Γ'' e non per l'altro, si potrebbe sempre ottenere un'intersezione complessiva nella quale questi due coni entrassero con eguale multiplicità; e applicando a quest'intersezione complessiva il ragionamento del n° 5, si arriverebbe appunto al risultato sopra enunciato.

(**) Nei due casi limiti $h=0$ e $h=2n$ queste superficie saranno evidentemente delle rigate contenute nell'uno o nell'altro dei due sistemi (1,6).

a quella delle curve di dato ordine esistenti sopra una quadrica rigata, in relazione ai due sistemi di generatrici di questa quadrica. E come queste curve si possono tutte segare sulla quadrica con superficie passanti per una o più generatrici di una medesima schiera, così quelle superficie si possono segare sulla varietà cubica con altre varietà passanti per una o più rigate cubiche di un medesimo sistema. D'altronde, la varietà cubica di S_4 con 6 punti doppî indipendenti corrisponde precisamente a uno dei modi in cui si può estendere il concetto di una quadrica rigata e della sua generazione proiettiva; invece di due forme fondamentali ∞^1 di (iper)piani in S_3, fra loro proiettive, si considerano tre forme fondamentali ∞^2 in S_4, pure proiettive; e in ambo i casi si ottiene una varietà che ammette due generazioni consimili, fra loro coniugate.

8. — Tutte queste considerazioni si estendono facilmente alla varietà cubica con quartica doppia. Questa varietà contiene il sistema (1,6) formato dalle corde della quartica doppia C^4, e un sistema di rette residuo (2,3). Un piano che abbia a comune con essa soltanto delle rette può contenere:

1) Tre rette del sistema (2,3);

2) Una corda della quartica, lungo la quale esso sia tangente alla varietà proposta, e una retta del sistema (2,3);

3) Tre corde della quartica (quando sia un piano trisecante di questa curva).

Perciò una superficie contenuta nella varietà proposta V, e che incontri le rette del sistema (2,3) in m punti, sarà di ordine $3m$. E se essa non contiene la quartica C^4, dovrà incontrare anche le corde di questa curva nel medesimo numero m di punti, e sarà l'intersezione completa di V con una varietà di ordine m (non passante per C^4). Infatti il ragionamento dei n[i] 1-2 rimane egualmente valido se alla superficie cubica generale, sezione iperpiana di V, se ne sostituisce (come qui occorre) una con 4 punti doppî; soltanto i 6 punti fondamentali della rappresentazione piana di questa superficie staranno allora sopra una medesima conica, e saranno a due a due infinitamente vicini; e questa rappresentazione si potrà ottenere mediante proiezione della superficie da uno dei suoi punti doppî. — Supponiamo invece che la nostra superficie F^{3m} passi per la quartica C^4, e, più generalmente, che questa curva sia per essa multipla di un certo ordine $h \geq 1$. Allora le corde della quartica incontreranno la superficie, fuori della quartica stessa, in $m - h$ punti. E, se h è numero pari, la F^{3m} sarà ancora intersezione completa della varietà V con una varietà di ordine m, avente la C^4 come linea multipla di ordine $\frac{h}{2}$. Si riconosce infatti molto facilmente che le sue sezioni iperpiane generiche stanno sopra superficie cubiche con 4 punti doppî, e possono ivi segarsi con superficie di ordine m aventi questi medesimi 4 punti come $\left(\frac{h}{2}\right)^{\text{pli}}$. E l'intero ragionamento dei n$^{\text{i}}$ 1-2 si potrà ancora applicare a questo caso. — Se invece h è numero dispari, la stessa superficie F^{3m} insieme a una qualunque delle ∞^2 rigate cubiche normali contenute nel sistema (1,6) delle corde della C^4 formerà una superficie complessiva (riducibile) di ordine $3(m+1)$, avente la C^4 come linea multipla di ordine $h+1$ (e perciò pari), e incontrata dalle rette dei due sistemi (1,6) e (2,3) rispett. in $m+1$ punti, e in $m - h$ $[= (m+1) - (h+1)]$ punti fuori di C^4. Questa superficie complessiva si trova dunque nelle medesime condizioni della F^{3m} precedentemente considerata, nell'ipotesi che h fosse numero pari; e perciò, benchè riducibile (cfr. n° 7), essa sarà l'intersezione completa di V con una varietà di ordine $m+1$: ossia l'attuale superficie F^{3m}, avente la C^4 come linea multipla di ordine h dispari, potrà segarsi sopra V con una varietà di ordine $m+1$ avente la C^4 come linea multipla di ordine $\frac{h+1}{2}$, e passante per una delle ∞^2 rigate cubiche sopra accennate.

Dunque: *Anche sopra una varietà cubica con quartica doppia qualsiasi superficie algebrica ha ordine multiplo di 3. Quelle superficie per le quali la quartica è linea multipla di ordine pari (zero incluso) sono tutte intersezioni complete della varietà proposta con un'altra varietà a tre dimensioni. E quelle per le quali la quartica è linea multipla di ordine dispari si possono ottenere come intersezioni residue con varietà passanti per una qualunque delle rigate cubiche formate da corde della quartica.*

L'analogia che abbiamo notata al numero precedente fra le superficie contenute in una varietà cubica con 6 punti doppî indipendenti e le linee contenute in una quadrica di S_3 si ritrova qui confrontando la varietà cubica con quartica doppia col cono quadrico di S_3, sul quale tutte le curve di ordine pari (e che nel vertice del cono hanno perciò un punto multiplo di ordine anche pari, zero incluso) sono intersezioni complete con altre superficie, e le curve di ordine dispari si possono ottenere come intersezioni con superficie le quali passino inoltre per una generatrice del cono. D'altronde la varietà cubica con quartica doppia in S_4 e il cono quadrico di S_3 si possono considerare come ottenuti rispett. dalla varietà con 6 punti doppî e dalla quadrica non degenere col far coincidere i loro due sistemi di rette generabili proiettivamente e mutuamente coniugati.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti in questa Nota dicendo:

Una varietà cubica dello spazio S_4 *la quale non contenga alcun piano contiene soltanto delle superficie algebriche di ordine multiplo di 3. Queste superficie si possono tutte ottenere come intersezioni complete della varietà proposta con altre varietà a tre dimensioni, a meno che quella varietà non sia:*

1° *Una varietà con 6 punti doppî indipendenti;*

2° *Una varietà con quartica doppia.*

Queste due varietà contengono sistemi di rette del 1° ordine, generabili proiettivamente, e in ciascuno dei quali sono contenute a lor volta ∞^2 rigate cubiche normali.

Quelle superficie esistenti su di esse e che non sono loro intersezioni complete con altre varietà si potranno tuttavia segare con varietà passanti per una o più (e nel secondo caso anzi per una sola) fra queste rigate cubiche.

Torino, marzo 1904.