Gino Fano

Sopra una varietà cubica particolare dello spazio a quattro dimensioni

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Vol. **37** (1904), p. 554–566

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1904_3>

SOPRA UNA VARIETÀ CUBICA PARTICOLARE
DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI.

Nota

del professor GINO FANO

In questa Nota mi propongo di esporre alcune ricerche sulla varietà cubica dello spazio S_4 rappresentata in coordinate projettive dall'equazione:

$$\sum_2^5 x_i^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0.$$

Questa varietà non ha punti doppi. E la stessa forma di equazione $\sum x_i^3 = 0$ nel caso di sole tre o quattro variabili omogenee rappresenta rispett. una cubica piana equianarmonica (*) e una superficie dello spazio S_3 anche priva di punti doppi, ma contenente 18 punti semplici dai quali escono terne di rette di questa superficie appartenenti ad un fascio (**).

Sono stato indotto a occuparmi di queste ricerche dal desiderio di verificare direttamente, in qualche caso particolare, alcune proprietà e caratteri delle varietà cubiche di S_4 prive di punti doppi

---

(*) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven,* 2te Aufl.; p. 247, 258.

(**) La superficie $\sum_1^4 x_i^3 = 0$ è stata studiata da ECKARDT (*Ueber diejenigen Flächen 3ten Grades...*, Math. Ann. x, p. 265 e seg.) e ha la proprietà di contenere il massimo numero finito di terne di rette appartenenti a un fascio. I piani di queste terne di rette sono quelli di equazione $x_i + \varepsilon x_k = 0$, dove ε è una radice cubica dell'unità.

che furono da me trovati recentemente in altro lavoro (*). E mi è parso che queste ricerche, benchè si riferiscano a una varietà particolarissima, non siano prive di interesse.

1. Le quadriche polari dei punti di S_4 rispetto alla varietà cubica proposta (che indicheremo con V) hanno tutte la piramide fondamentale del sistema di coordinate come piramide autopolare; e il loro sistema lineare è completamente definito da questa proprietà.

I 16 poli di uno spazio S_3 arbitrario hanno tutti le coordinate omonime eguali, a meno del segno. I 15 punti che hanno il medesimo spazio polare di un punto assegnato si potranno ricavare da questo conservandone invariata una delle coordinate e cambiando in tutti i modi possibili i segni di alcune o di tutte le rimanenti quattro; oppure anche cambiando di segno, successivamente, ciascuna delle 5 coordinate e ciascuna delle $\binom{5}{2} = 10$ coppie di coordinate.

La varietà hessiana di V si compone dei cinque spazi fondamentali $x_i = 0$; e la superficie parabolica risulta perciò costituita da altrettante sezioni iperpiane di V (che saranno superficie cubiche con 18 " punti di Eckardt ").

I dieci piani $x_i = x_k = 0$ sono doppi per la varietà Hessiana, e le curve di 3° ordine loro intersezioni con V sono perciò curve doppie della superficie parabolica. Lo spazio tangente a V in un punto qualunque di una di queste cubiche incontrerà V secondo una superficie di 3° ordine con punto doppio uniplanare.

Le dieci rette $x_i = x_k = x_l = 0$ sono triple per la varietà Hessiana. Ciascuna di esse incontra V in tre punti determinati da un'equazione $x_m^3 + x_n^3 = 0$, e aventi perciò coordinate del tipo $(x_i = 0,\ x_k = 0,\ x_l = 0,\ x_m = 1,\ x_n = -\varepsilon)$, dove ε indica una radice cubica dell'unità (**). E gli spazi $x_m + \varepsilon^2 x_n = 0$, ovvero $\varepsilon x_m + x_n = 0$, tangenti a V in questi diversi $3 . 10 = 30$ punti

(*) *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti.* Questa Memoria sarà pubblicata nel vol. X (ser. III) degli Annali di matematica.

(**) Nel seguito, con (i, k, l, m, n) s'intenderà sempre designata una qualsiasi permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4, 5. E con ε si indicherà una radice cubica arbitraria dell'unità; con $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ (quando occorra) altrettante fra queste radici, distinte o anche eguali.

incontreranno V secondo i coni cubici ellittici:

$$x_i^3 + x_k^3 + x_l^3 = \varepsilon x_m + x_n = 0$$

aventi i vertici rispett. in quei medesimi punti.

La varietà V è incontrata dai 30 spazi tangenti $\varepsilon x_m + x_n = 0$ secondo coni cubici ellittici, aventi i vertici nei loro singoli punti di contatto. Non vi sono altri spazi S_3 incontranti V secondo coni: perchè il vertice di un tal cono dovrebbe avere la sua quadrica polare rispetto a V spezzata in due spazi S_3, e sarebbe perciò un punto triplo della varietà hessiana; sicchè esso dovrebbe stare appunto sopra una delle dieci rette $x_i = x_k = x_l = 0$.

Indicheremo in seguito con Γ uno qualunque di quei 30 coni cubici, e chiameremo "spazi conici" gli spazi S_3 che li contengono. Indicheremo inoltre con γ le 10 cubiche piane che sono curve doppie della superficie parabolica di V.

2. Ciascuno dei 30 coni Γ, ad es. quello contenuto nello spazio $x_i + \varepsilon x_k = 0$, ha nove piani tangenti di inflessione:

$$x_i + \varepsilon x_k = x_l + \varepsilon' x_m = 0$$

che incontrano V secondo la sola corrispondente generatrice di flesso:

$$x_i + \varepsilon x_k = x_l + \varepsilon' x_m = x_n = 0$$

contata tre volte. Ciascuna di queste rette (che indicheremo con g) appartiene anche a un secondo cono Γ (contenuto nello spazio $x_l + \varepsilon' x_m = 0$), del quale è pure generatrice di flesso. Il loro numero complessivo è perciò $\frac{9 \,.\, 30}{2} = 135$.

Vi sono 135 rette lungo le quali la varietà V ammette un piano osculatore fisso (ossia un piano che l'incontra secondo questa retta soltanto, contata tre volte). E all'infuori di queste non vi saranno sopra V altre rette con piano osculatore fisso. Infatti lo spazio S_3 tangente a V in un punto qualunque di una tal retta dovrebbe incontrare V secondo una superficie con punto doppio biplanare (anzi, con *due* punti doppi biplanari su quella medesima retta), e perciò quella retta dovrebbe appartenere alla varietà hessiana di V. Ora questa varietà incontra V secondo cinque superficie cubiche non rigate, le quali complessivamente contengono soltanto $27.5 = 135$ rette, cioè appunto le g.

3. *I 30 coni cubici Γ costituiscono insieme la sviluppabile $\sum^{90}$ luogo dei punti di contatto degli spazi bitangenti a V* (*). Infatti la varietà V ammette lungo ogni generatrice di uno di questi coni un piano tangente fisso (il piano tangente al cono medesimo); e basta questo per affermare che quelle generatrici sono tutte " rette speciali ", e perciò ogni spazio tangente a V in un punto di una di esse deve essere pure tangente in un secondo punto della medesima retta (in generale distinto dal primo). E dai 30 coni cubici Γ la sviluppabile $\sum^{90}$ risulta già esaurita. Gli ∞^2 spazi bitangenti di V si suddivideranno dunque in 30 sistemi inviluppanti rispett. i diversi coni Γ. E siccome ciascuno di questi inviluppi parziali è di classe 6, risulta confermata la classe 180 ($=6.30$) dell'inviluppo complessivo (**).

Si può anche verificare direttamente che gli spazi tangenti a V nei punti dei coni Γ sono tutti spazi bitangenti, e sono pure i soli. Ricordiamo perciò che se uno spazio S_3 ha per polo un certo punto (y), gli altri 15 suoi poli si ottengono da questo cambiando di segno una o due delle coordinate y_i in tutti i modi possibili. Perchè si tratti di uno spazio bitangente, occorre e basta che due di questi 16 poli stiano sulla varietà V. Ora, se due punti del tipo $(y_i, y_k, y_l, y_m, y_n)$ e $(-y_i, y_k, y_l, y_m, y_n)$ stanno entrambi sopra V, dalle due equazioni di condizione:

$$y_i^3 + y_k^3 + \ldots = 0 \; ; \; -y_i^3 + y_k^3 + \ldots = 0$$

si ricava $y_i^3 = 0$, ossia $y_i = 0$; sicchè i due punti non sarebbero distinti (ma si tratterà invece di un punto della varietà hessiana, il quale coincide sempre con uno almeno dei suoi conjugati nella polarità rispetto a V). Bisognerà dunque che i due punti di contatto di uno spazio bitangente abbiano coordinate del tipo:

$$(y_i, y_k, y_l, \ldots) \quad \text{e} \quad (-y_i, -y_k, y_l, \ldots);$$

e allora, scrivendo che questi due punti stanno sopra V, si ricava per differenza:

$$y_i^3 + y_k^3 = 0$$

ossia $\varepsilon y_i + y_k = 0$, che (quando vi si considerino le y come varia-

(*) V. la mia Mem. cit., n. 5 e seg.
(**) Mem. cit., n. 10.

bili) è appunto l'equazione di uno spazio conico. E viceversa, se le y soddisfanno a quest'ultima equazione, basterà che di quei due punti uno stia sulla varietà V perchè vi stia anche l'altro; e questi due punti avranno inoltre lo stesso spazio tangente $\sum y_i^2 x_i = 0$.

Ponendo $y_i = \rho$, $y_k = -\rho\varepsilon$, l'equazione di questo spazio bitangente assume la forma:

$$\rho^2 (x_i + \varepsilon^2 x_k) + y_l^2 x_l + y_m^2 x_m + y_n^2 x_n = 0$$

ovvero:

$$\rho^2\left(x_i + \frac{x_k}{\varepsilon}\right) + y_l^2 x_l + y_m^2 x_m + y_n^2 x_n = 0. \tag{1}$$

E i suoi due punti di contatto saranno i punti

$$(\pm\rho, \mp\rho\varepsilon, y_l, y_m, y_n),$$

intendendo di prendere una volta i due segni superiori, e l'altra volta i segni inferiori.

L'equazione (1), *colla condizione* $y_l^3 + y_m^3 + y_n^3 = 0$, *sarà l'equazione generale di uno spazio bitangente a* V.

Se è nulla una delle tre y (senza che lo siano, in generale, le altre due), i due punti di contatto staranno sopra una delle rette g; e allora la superficie intersezione dello spazio considerato con V avrà due punti doppi biplanari. Se sono nulle tutte le y, si ha uno dei 30 spazi conici. E se è nulla ρ, si ha lo spazio tangente in un punto di una delle 10 cubiche γ (il quale incontra sempre V secondo una superficie con punto doppio uniplanare). In questi ultimi due casi lo spazio S_3 che si ottiene deve ancora considerarsi come bitangente, e anzi come avente con V rispett. *quattro* o *tre* punti di contatto; ma tutti infinitamente vicini. Quando si escluda l'ultimo caso ($\rho = 0$), nell'equazione (1) si potrà anche supporre $\rho = 1$.

4. Ognuno dei 30 coni Γ è incontrato dalla varietà hessiana di V secondo le sue 9 generatrici di flesso, e secondo una delle cubiche γ contate due volte. Perciò l'intersezione complessiva (di ordine 450) della varietà hessiana colla sviluppabile $\sum^{90}$ si comporrà in questo caso delle 135 rette g, ciascuna contata due volte (perchè appartiene a due coni Γ), e delle 10 cubiche γ contate sei volte.

Le 10 cubiche γ, contate tre volte (perchè ciascuna di esse appartiene a tre diversi coni Γ) costituiranno insieme la linea μ^{90} del caso generale (Mem. cit., n. 12), la quale in generale è linea di contatto della sviluppabile Σ^{90} colla varietà hessiana, e in questo caso è linea doppia per quest'ultima varietà. Gli spazi tangenti nei punti di questa linea μ determinano come sezioni, in generale, delle superficie con un punto doppio biplanare equivalente a due punti doppi conici infinitamente vicini; nel caso presente si hanno addirittura superficie con punto uniplanare. — Le 135 rette g, contate due volte, sostituiscono in pari tempo la curva ρ^{270} del caso generale, e lo spigolo di regresso (pure di ordine 270) della sviluppabile Σ^{90}, considerato come luogo dei punti di V pei quali *tre* delle sei rette di V che ne escono sono venute a coincidere.

5. Sopra una generatrice di uno qualunque dei coni Γ le ∞^4 quadriche del sistema polare segano le coppie di punti di un' involuzione, che ha un punto doppio nel vertice di quel cono e l'altro punto doppio sopra quella fra le cubiche γ che sta su questo medesimo cono. Gli spazi tangenti a V in questi due punti incontrano V rispett. secondo lo stesso cono Γ e secondo una superficie cubica con punto doppio uniplanare; e nessuno di questi spazi è mai tangente a V anche in un secondo punto distinto dal primo. All'infuori di questi spazi particolarissimi, che possono considerarsi come spazi pluritangenti coi punti di contatto tutti infinitamente vicini (n.° 3, in fine), *qualunque spazio pluritangente a V dovrà avere i suoi punti di contatto con V tutti distinti*; e si può anche aggiungere che *questi punti di contatto saranno per la superficie intersezione di quello spazio con V punti doppi tutti del medesimo tipo* (o tutti conici, o tutti biplanari). Infatti due di questi punti di contatto devono sempre stare sopra una stessa generatrice di un cono Γ, fuori del vertice di questo cono e fuori delle curve γ; e secondo che questa generatrice non è oppure è una retta g, essi non staranno oppure staranno sulla varietà hessiana, e perciò saranno (entrambi) per la superficie sezione punti doppi conici o punti biplanari.

6. L'equazione generale di uno spazio tritangente a V si potrà ricavare da quella di uno spazio bitangente, osservando ch' essa dovrà avere la forma (1) — nella quale si potrà supporre $\rho = 1$ — *in tre modi diversi*, e quindi rispetto a tre diverse coppie di variabili x_i, x_k. E poichè fra queste tre coppie ve ne saranno certo due con un elemento x a comune, così si conclude che anche uno dei tre coefficienti y_l^2, y_m^2, y_n^2 che compajono nell'equazione (1) dovrà essere eguale a una radice cubica dell'unità: ad es.

$$y_l = \frac{1}{\varepsilon'} = \varepsilon'^2,$$

e quindi $y_l = \varepsilon'$ (potendosi il segno per questa prima fra le tre y fissare ad arbitrio). Allora l'equazione (1) assumerà la forma

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} + y_m^2 x_m + y_n^2 x_n = 0 \tag{2}$$

colla condizione $y_m^3 + y_n^3 + 1 = 0$; e si vede subito che questo spazio sarà tangente a V nei tre punti:

$$\begin{array}{l}
(-1\,,\quad \varepsilon\,,\quad \varepsilon'\,,\ y_m\,,\ y_n\,)\\
(\quad 1\,,\ -\varepsilon\,,\quad \varepsilon'\,,\ y_m\,,\ y_n\,)\\
(\quad 1\,,\quad \varepsilon\,,\ -\varepsilon'\,,\ y_m\,,\ y_n\,)
\end{array}$$

dei quali i primi due stanno nello spazio conico $x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} = 0$; il primo e il terzo nello spazio $x_i + \frac{x_l}{\varepsilon'} = 0$; il secondo e terzo nello spazio $\frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} = 0$. In particolare, se è zero una delle due coordinate y_m, y_n e l'altra è perciò eguale a una radice cubica dell'unità cambiata di segno, p. es. se $y_m = -\varepsilon''$, $y_n = 0$, si ha lo spazio:

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} + \frac{x_m}{\varepsilon''} = 0 \tag{2'}$$

che incontra la varietà V secondo una superficie con tre punti doppi biplanari. Esso contiene infatti tre piani, cioè:

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} = \frac{x_l}{\varepsilon'} + \frac{x_m}{\varepsilon''} = 0$$

e due altri analoghi, che sono osculatori alla varietà V, e perciò anche alla superficie sezione, lungo altrettante rette g. — Di questi spazi ve ne sono in tutto 135; perchè per formare l'equazione (2') noi disponiamo di tre radici cubiche dell'unità, fra loro indipendenti, e di una coordinata (la x_n) che risulta omessa: sicchè avremo in tutto $3^3.5 = 135$ equazioni di quel tipo.

Al variare di y_m e y_n (legati sempre dalla relazione $y_m^3+y_n^3+1=0$) lo spazio tritangente (2) passa costantemente per la retta:

$$x_i+\frac{x_k}{\varepsilon}+\frac{x_l}{\varepsilon'}=x_m=x_n=0$$

e descrive l'inviluppo ∞^1 degli spazi tangenti al cono cubico di 2ª specie:

$$\left(x_i+\frac{x_k}{\varepsilon}+\frac{x_l}{\varepsilon'}\right)^3+x_m^3+x_n^3=0 \tag{3}$$

avente quella medesima retta per asse. Infatti le equazioni di un piano generico di questo cono si possono mettere sotto la forma:

$$x_i+\frac{x_k}{\varepsilon}+\frac{x_l}{\varepsilon'}=\frac{x_m}{\alpha}=\frac{x_n}{\beta}$$

colla condizione $\alpha^3+\beta^3+1=0$; e lo spazio tangente al cono (3) lungo questo piano è rappresentato dall'equazione:

$$\left(x_i+\frac{x_k}{\varepsilon}+\frac{x_l}{\varepsilon'}\right)+\alpha^2 x_m+\beta^2 x_n=0$$

la quale coincide colla (2).

Nell'inviluppo ∞^1 di spazi S_3, che è rappresentato dall'equazione (2) al variare di y_m e y_n, sono compresi *sei* spazi del tipo (2') (per $y_m=-\varepsilon''$, $y_n=0$, o viceversa) e i *tre* spazi conici $x_m+\varepsilon'' x_n=0$ (pei quali y_m e y_n sono infinitamente grandi, in guisa tale che il loro rapporto risulti eguale a una radice cubica dell'unità cambiata di segno). Questi sono, complessivamente, i *nove* spazi tangenti di inflessione del cono (3).

Di questi coni-inviluppi di spazi tritangenti ve ne sono in tutto 90 (potendosi scegliere la coppia di coordinate x_m, x_n in 10 modi diversi, e le due radici cubiche dell'unità ε, ε' in tre modi ciascuna). Per completare poi il sistema degli spazi tritangenti bisogna ancora tener conto dei 10 coni-inviluppi:

$$x_i^3+x_k^3+x_l^3=0$$

i cui spazi tangenti toccano V nei punti delle curve γ (contenute nei piani $x_m=x_n=0$) e incontrano V stessa secondo superficie con punto doppio uniplanare (*). Si hanno così, complessivamente,

(*) Cfr. la mia Mem. cit., n. 18. Questi spazi, come fu avvertito anche qui al n. 3, devono considerarsi come spazi tritangenti nei quali due

100 inviluppi ∞^1 di spazi tritangenti; e poichè ciascuno di questi inviluppi è di classe 6, risulta confermato che l'inviluppo complessivo di tutti gli spazi tritangenti è di classe 600 (*).

7. Al variare di uno spazio tritangente entro uno dei 90 coni-inviluppi (3), ciascuno dei suoi punti di contatto appartiene costantemente a due dei tre spazi:

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} = 0\ ; \quad x_i + \frac{x_l}{\varepsilon'} = 0\ ; \quad \frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} = 0$$

e descrive perciò la curva di 3° ordine intersezione di V col piano comune a questi due spazi In ogni spazio conico sono contenute 18 fra queste curve di 3° ordine, e il numero totale di esse sarà perciò $\frac{18 \cdot 30}{2} = 270$. Complessivamente, esse formeranno una curva di ordine $3.270 = 810$, che è curva doppia della sviluppabile $\sum^{90}$ formata dalle rette speciali e composta nel caso presente dei 30 coni Γ. Aggiungendovi le 10 cubiche γ, che sono curve triple per $\sum^{90}$, e devono perciò contarsi tre volte anche come parti della sua curva doppia, avremo ricostruita l'intera curva doppia di $\sum^{90}$, che è di ordine 900 (Mem. cit., n. 17).

Queste 270 curve di 3° ordine sono luoghi di quei punti di V pei quali, fra le sei rette di V stessa che ne escono, due diverse coppie sono composte di rette coincidenti. E per i punti delle 10 cubiche γ anche la 3ª coppia si compone di rette coincidenti.

8. Le rette della varietà V che si appoggiano a una generatrice non di flesso l di uno dei coni Γ formano una rigata di ordine 15 e genere 11 (Mem. cit., n. 7), che contiene quel cono come parte. La parte residua sarà una rigata R^{12} avente l per direttrice quadrupla e avente con questo cono *quattro* elementi a comune (le sue 4 generatrici che escono dal vertice di tale cono); il genere di questa rigata R^{12} si potrà ricavare dalla solita formola del genere di una curva composta (essendo $p + 1 + 4 - 1 = 11$), e si trova che è $= 7$. Sopra l vi dovranno essere $2(4 + 7 - 1) = 20$ punti pei quali coincidono due delle quattro generatrici di R^{12} che ne

dei punti di contatto sono infinitamente vicini al terzo, in direzioni diverse.

(*) Mem. cit., n. 17.

escono. Fra questi punti vi è l'intersezione di l con quella cubica γ che sta sul cono considerato; e quest'intersezione assorbe anzi due fra quei 20 punti, perchè le 4 generatrici di R^{12} che ne escono coincidono a due a due. Gli altri 18 punti fra i 20 sono le intersezioni di l colle cubiche considerate al n.° prec.

Se si considera invece sopra un cono Γ una generatrice di flesso, ossia una delle rette g, questa appartiene sempre anche a un secondo di quei coni; e le rette di V che si appoggiano ad essa, facendo astrazione da questi due coni, formano una rigata di ordine 9 e genere 4 avente g come direttrice tripla. Le terne di generatrici di questa rigata che escono dai singoli punti di g sono i gruppi di una serie lineare $g_3{}^1$, nella quale in luogo di 12 gruppi con un elemento doppio vi sono 6 gruppi costituiti da un elemento triplo: i punti corrispondenti sopra g sono punti di contatto di spazi tritangenti del tipo (2'). Per ognuna delle rette g passano tre di questi spazi tritangenti.

9 Cerchiamo ora gli *spazi quadritangenti* della varietà V. Perchè lo spazio tritangente generico:

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} + y_m{}^2 x_m + y_n{}^2 x_n = 0$$

(dove $y_m{}^3 + y_n{}^3 + 1 = 0$) diventi quadritangente a V, è necessario e sufficiente che la sua equazione possa ricevere questa forma in 4 modi diversi; e perciò anche uno dei due coefficienti $y_m{}^2$ e $y_n{}^2$ dovrà essere eguale a una radice cubica dell'unità. Sia ad es.

$$y_m{}^2 = \frac{1}{\varepsilon''} = \varepsilon''^2,$$

e quindi $y_m = \pm\,\varepsilon''$; anzi precisamente $y_m = +\,\varepsilon''$, perchè l'ipotesi contraria, per la condizione $y_m{}^3 + y_n{}^3 + 1 = 0$, porterebbe di conseguenza $y_n = 0$ e ci ricondurrebbe allo spazio (2'). Invece da $y_m = +\,\varepsilon''$ segue $y_n{}^3 = -\,2$, ossia $y_n = \varepsilon''' \sqrt[3]{-2}$, dove al radicale s'intende dato un valore determinato — però arbitrario —; p. e. il suo valore aritmetico. E si ha allora l'equazione:

$$x_i + \frac{x_k}{\varepsilon} + \frac{x_l}{\varepsilon'} + \frac{x_m}{\varepsilon''} + \sqrt[3]{4}\,\frac{x_n}{\varepsilon'''} = 0 \qquad (4)$$

la quale rappresenta uno spazio tangente a V nei quattro punti:

$$\begin{array}{lllll}(-1\,, & \varepsilon\,, & \varepsilon'\,, & \varepsilon''\,, & \varepsilon'''\sqrt[3]{-2}\\ (\;\;1\,, & -\varepsilon\,, & \varepsilon'\,, & \varepsilon''\,, & \varepsilon'''\sqrt[3]{-2}\\ (\;\;1\,, & \varepsilon\,, & -\varepsilon'\,, & \varepsilon''\,, & \varepsilon'''\sqrt[3]{-2}\\ (\;\;1\,, & \varepsilon\,, & \varepsilon'\,, & -\varepsilon''\,, & \varepsilon'''\sqrt[3]{-2}\end{array}$$

La stessa equazione può anche scriversi, in forma più simmetrica, nel modo seguente:

$$\frac{x_i}{\varepsilon}+\frac{x_k}{\varepsilon'}+\frac{x_l}{\varepsilon''}+\frac{x_m}{\varepsilon'''}+\sqrt[3]{4}\,.\,x_n=0 \text{ (*)} \qquad (4')$$

e i quattro punti di contatto hanno allora le coordinate:

$$(\pm\,\varepsilon,\ \pm\,\varepsilon',\ \pm\,\varepsilon'',\ \pm\,\varepsilon''',\ \sqrt[3]{-2})$$

intendendo di prendere sempre tre segni positivi e uno negativo, e di dare al radicale il suo valore aritmetico.

Questi spazi quadritangenti sono complessivamente in numero di 405. Noi disponiamo infatti di 4 radici cubiche dell'unità, fra loro indipendenti, e di una fra le 5 variabili (la x_n) che figura in modo asimmetrico rispetto alle altre; perciò sono possibili in tutto $3^4.5=405$ combinazioni diverse. *A completare il numero di 495 spazi quadritangenti del caso generale* (**) *concorrono i 30 spazi conici*, ciascuno dei quali dovrà computarsi 3 volte.

Uno spazio tangente alla varietà V, il quale la incontri secondo un cono cubico, può infatti considerarsi come un caso particolare (o degenere) di spazio quadritangente, e deve perciò certo produrre un abbassamento nel numero degli spazi quadritangenti propriamente detti. Invero una superficie cubica con 4 punti doppi — e siano questi le intersezioui dei quattro piani $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, $A_4=0$ a tre a tre — si può rappresentare con un'equazione della forma:

$$A_1\,A_2\,A_3+A_1\,A_2\,A_4+A_1\,A_3\,A_4+A_2\,A_3\,A_4=0\,;$$

e quando si fa avvicinare indefinitamente il piano $A_4=0$ al punto $A_1=A_2=A_3=0$ (ossia tre dei punti doppi al quarto), al limite

(*) Per comodità adoperiamo ancora le stesse lettere $\varepsilon, \varepsilon' \ldots$, benchè queste indichino ora radici cubiche in generale diverse da quelle che erano così designate nell'equazione (4).

(**) Cfr. la mia Mem. cit., n. 24.

il polinomio A_4 si potrà esprimere come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3, e l'equazione rappresenterà allora un cono col vertice nel punto $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. — Siccome poi nel caso attuale, all'infuori dei 30 spazi conici, non ve ne sono altri che possano concorrere all'abbassamento di 90 unità del numero degli spazi quadritangenti, così si deve concludere che ogni spazio conico assorbe precisamente tre spazi quadritangenti del caso generale.

Ciò è anche confermato da un'altra osservazione. Abbiamo veduto che l' inviluppo complessivo ∞^1 di classe 600 formato degli spazi tritangenti si spezza nel caso attuale in 100 coni-inviluppi di 6ª classe, dei quali 90 si compongono di spazi tritangenti propriamente detti, e gli altri 10 di spazi aventi i punti di contatto riuniti in un punto unico, che è punto doppio uniplanare per la superficie loro rispettiva intersezione con V. Ora ciascuno dei primi 90 inviluppi contiene (come si vede immediatamente) 18 spazi quadritangenti (4) e tre spazi conici; mentre ciascuno degli altri 10 contiene nove spazi conici (e nessuno spazio quadritangente). Perciò i 18 spazi quadritangenti del primo caso risultano sostituiti nel secondo caso da 6 spazi conici; il che conferma come ciascuno di questi ultimi spazi venga ad assorbire tre degli spazi quadritangenti propriamente detti.

10. *Collineazioni che trasformano in sè stessa la varietà V.* Ogni collineazione dello spazio S_4 la quale trasformi in sè stessa la varietà cubica V dovrà trasformare in sè stessa anche la sua hessiana, ossia il sistema dei 5 spazi fondamentali $x_i = 0$.

Se anche ciascuno di questi 5 spazi viene mutato in sè stesso, la collineazione sarà rappresentata da equazioni della forma:

$$x'_i = a_i\, x_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

dove le a sono certe costanti, delle quali una (p. e. a_1) si può sempre supporre eguale all'unità. Perchè la varietà V sia trasformata in sè stessa dovrà dunque essere:

$$1 = a_2^3 = a_3^3 = a_4^3 = a_5^3$$

ossia a_2, a_3, a_4, a_5 dovranno essere eguali a altrettante radici cubiche dell'unità. Si ha così un gruppo di $3^4 = 81$ collineazioni che mutano in sè stessa la varietà V e ciascuno degli spazi $x_i = 0$.

Moltiplicando questo gruppo per le 120 collineazioni rappresentate da tutte le possibili sostituzioni sulle cinque variabili x_i :

$$x'_1 = x_i\ ;\ x'_2 = x_k\ ;\ x'_3 = x_l\ ;\ x'_4 = x_m\ ;\ x'_5 = x_n$$

si avrà un gruppo complessivo di $81 \,.\, 120 = 9720$ collineazioni, che lasceranno tutte invariata la varietà V, e saranno le sole a cui spetti questa proprietà.

La varietà cubica $\sum_1^5 x_i^3 = 0$ *è trasformata in sè stessa da un gruppo di 9720 collineazioni.*

Fra queste collineazioni ve ne sono $\frac{9720}{405} = 24$ che mutano in sè stesso uno qualunque (assegnato) dei suoi 405 spazi quadritangenti. Esse ne permutano i 4 punti di contatto in tutti i diversi modi possibili.

Torino, aprile 1904.