Gino Fano

Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **39** (1904), p. 778–792

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1904_1>

Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni.

Nota di GINO FANO.

In ogni varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni (S_4) è contenuta una doppia infinità di rette, la quale, se la varietà proposta non ha punti doppî, è certo irriducibile (*) e priva anch'essa di elementi doppî. Nella presente Nota mi propongo di determinare alcuni caratteri di questo sistema ∞^2 di rette, considerato come ente algebrico doppiamente infinito; e, fra altro, dimostrerò che il suo sistema canonico si compone delle ∞^9 rigate sue intersezioni coi complessi lineari del medesimo spazio S_4 (**).

1. — È noto che le rette dello spazio S_4 possono rappresentarsi con dieci coordinate omogenee r_{ik}, legate da alcune relazioni quadratiche (che si riducono a tre indipendenti). Esse possono perciò considerarsi come punti di uno spazio lineare S_9; e in questo spazio esse formano precisamente una varietà a sei dimensioni (M_6), di ordine 5, a sezioni ellittiche (***).

(*) Cfr. la mia Nota: *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 39, 1904); n° 3.

(**) Al Prof. G. Castelnuovo dell'Università di Roma rinnovo qui i più vivi ringraziamenti per avermi comunicati alcuni risultati, tuttora inediti, ch'egli aveva ottenuti in passato sopra questo stesso argomento.

(***) Castelnuovo: *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (" Atti Ist. Veneto ", ser. II, vol. 7°; 1891). Infatti nello spazio S_4 sei complessi lineari di rette hanno in generale 5 rette a comune (Castelnuovo, l. c., p. 46); e vi sono altresì 5 rette che si appoggiano a sei piani generici (cfr. anche Segre, *Alcune considerazioni elementari...*, " Rend. di Palermo ", t. II, 1888). Le rette che si appoggiano a soli cinque piani generici formano poi una rigata ellittica; perchè quelle che si appoggiano a quattro di questi piani formano un sistema ∞^2 di 1° ordine contenuto in

Il sistema ∞^2 delle rette contenute in una varietà cubica V dello spazio S_4, priva di punti doppî, si può dunque considerare come una superficie F contenuta nella suddetta M_6^5. Di questa superficie vogliamo qui determinare alcuni caratteri.

La superficie F *appartiene anch'essa allo spazio* S_9*; e non è nemmeno contenuta in altre quadriche, all'infuori di quelle che passano per la* M_6^5 *sopra considerata.* In altri termini, *il sistema* ∞^2 *di rette contenuto in una varietà cubica generale non sta in nessun complesso lineare, e nemmeno in un complesso quadratico.* Infatti, se vi fosse in S_4 un complesso lineare contenente tutte le rette della varietà cubica V, gli S_3 polari dei singoli punti di V rispetto a questo complesso non potrebbero essere che gli stessi spazi tangenti a V in quei punti; e questi spazi dovrebbero perciò passare tutti per un medesimo punto (il *centro* del complesso), il che non avviene. — Supponiamo ora che vi sia un complesso quadratico contenente tutte le rette della varietà V. Un tale complesso, contenendo le 6 rette di V che escono da un punto qualunque di questa varietà, dovrebbe anche contenere tutto il cono quadrico di S_3 su cui stanno quelle rette, e perciò tutto il sistema ∞^4 delle tangenti tripunte di V, le quali costituiscono appunto quei coni. Ora di queste tangenti tripunte di V in ogni piano generico ve ne sono *nove* — le tangenti di inflessione della cubica intersezione di questo piano con V —; e queste nove dovrebbero perciò stare in un inviluppo di 2ª classe, formato pure da rette di quell'eventuale complesso quadratico. E ciò non è possibile, perchè questo inviluppo di 2ª classe avrebbe a comune coll'inviluppo di 6ª classe formato dalle tangenti della cubica sopra accennata nove elementi, i quali sarebbero doppî per quest'ultimo inviluppo e equivarrebbero perciò a 18 elementi semplici, numero superiore al prodotto dei gradi $(2 \,.\, 6 = 12)$ dei due inviluppi.

Il sistema ∞^2 delle rette esistenti sopra V è però contenuto in infiniti complessi cubici (p. e. in tutti quelli formati

---

una varietà cubica con 10 punti doppî (SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*... " Mem. Acc. di Torino ", ser. II, vol. 39, 1888; nº 25), e le rette di questo sistema che si appoggiano a un piano ulteriore formano perciò una rigata avente in ciascuno dei cinque piani una cubica direttrice (semplice): dunque appunto una rigata ellittica.

dalle rette che si appoggiano a una sezione iperpiana arbitraria di V medesima).

2. — Determiniamo adesso l'*ordine della superficie* F, e il *genere delle sue sezioni iperpiane*; in altri termini, l'ordine e il genere della rigata intersezione del sistema ∞^2 di rette contenuto in V con un complesso lineare qualunque (*). Se questo complesso è " singolare ", cioè si compone di tutte le rette di S_4 che si appoggiano a un certo piano, la rigata sezione sarà composta di quelle rette di V che si appoggiano a questo stesso piano.

L'ordine domandato sarà il numero (supposto finito) di quelle rette di V che appartengono in pari tempo a due complessi lineari, e in particolare il numero di quelle rette che si appoggiano a due piani assegnati. Considerando due piani contenuti in uno spazio $S_3 \equiv \Pi$, e aventi perciò una retta s a comune, ogni retta che si appoggia a entrambi quei piani o starà nello spazio Π oppure si appoggerà alla retta s. Ora nello spazio Π sono contenute 27 rette della varietà V (quelle che stanno sulla superficie intersezione di questo spazio con V medesima); e la retta s incontra V in *tre* punti, da ciascuno dei quali escono *sei* rette contenute in questa varietà. Il numero totale di rette cercato sarà dunque eguale a $27 + 3 \cdot 6 = 45$.

Quanto al genere, basterà osservare che sulla rigata (di ordine 45) formata dalle rette di V che si appoggiano a un dato piano (**) gli spazi S_3 passanti per questo piano segano gruppi di 27 rette formanti una serie lineare g^1_{27}. In questa serie lineare si hanno elementi multipli, cioè due almeno delle 27 rette di un gruppo vengono a coincidere, soltanto quando lo spazio con-

(*) Cfr. anche la mia Memoria: *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti* (" Annali di Matem. ", ser. III, vol. X); n° 7.

(**) Benchè questa rigata sia intersezione del nostro sistema ∞^2 di rette con un complesso lineare particolare, tuttavia, essendo essa priva (in generale) di generatrici doppie, il suo genere sarà eguale a quello della rigata che si otterrebbe come intersezione del medesimo sistema ∞^2 con un complesso lineare generico.

siderato è tangente alla varietà V (*); e allora ciascuna delle sei rette uscenti dal punto di contatto di questo spazio — il quale è punto doppio per la superficie intersezione con V — conta come due fra le 27, vale a dire si hanno *sei* diversi elementi doppî. E poichè in un fascio vi sono 24 spazi S_3 tangenti alla varietà V, così nella g^1_{27} considerata vi saranno in tutto $6 . 24 = 144$ elementi doppî. Indicando dunque con p il genere domandato, sarà:

$$2(27 + p - 1) = 144 \quad \text{e quindi} \quad p = 46.$$

Il sistema ∞^2 *di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio* S_4 *è incontrato dai complessi lineari di questo spazio secondo rigate di ordine* 45 *e genere* 46. Ovvero anche: *La superficie dello spazio* S_9 *immagine di questo sistema* ∞^2 *di rette è di ordine* 45 *e ha le sezioni iperpiane di genere* 46.

3. — Le rette della varietà V che si appoggiano a una qualunque (assegnata) fra esse formeranno una rigata di ordine 15; poichè tre di queste rigate, le cui direttrici stiano in un medesimo piano, devono formare insieme la rigata di ordine 45 costituita da tutte le rette di V che si appoggiano a questo piano. Queste tre rigate avranno a due a due 5 generatrici a comune (delle quali quattro apparterranno al punto comune alle due direttrici, e la quinta al piano di queste); perciò, indicando con p' il loro genere comune, dovrà essere (per la nota formola del genere di una curva composta):

$$3p' + 3 . 5 - 2 = 46 \quad \text{da cui} \quad p' = 11.$$

Le rette della varietà V *che si appoggiano a una qualunque fra esse formano una rigata di ordine* 15 *e genere* 11.

4. — Dimostriamo ora che la superficie F^{45} di S_9, immagine del sistema ∞^2 di rette contenuto in V, è *normale*, ossia non è proiezione di alcuna superficie dello stesso ordine appartenente a uno spazio superiore.

(*) Klein, " Math. Ann. ", VI, p. 366. Sopra una superficie cubica priva di punti doppî le 27 rette sono sempre tutte distinte; e quando una retta conta come due (almeno) fra le 27, sopra questa retta vi deve essere almeno un punto doppio della superficie.

Alle rigate R_{11}^{15} formate dalle rette di V che si appoggiano a una qualunque fra tali rette corrispondono sopra F^{45} delle *curve* γ^{15} *di genere* 11, le quali *appartengono a spazi* S_6, poichè ciascuna di quelle rigate è contenuta in una doppia infinità di complessi lineari; e precisamente in tutti i complessi lineari singolari i cui piani-assi passano per la sua direttrice rettilinea. *Queste* ∞^2 *curve* γ_{11}^{15} *di* S_6 *sono normali,* perchè già nello spazio S_7 non esistono curve di ordine 15 e genere 11 (essendo eguale a 10 il genere massimo che può avervi una curva di ordine 15 (*)). — Due qualunque di quelle rigate R^{15} hanno cinque generatrici a comune: lo abbiamo già veduto al n° prec. nel caso che le loro direttrici fossero incidenti; e, se queste fossero invece sghembe, esse determinerebbero uno spazio S_3 incontrante V secondo una superficie cubica, e le cinque rette di questa superficie che incontrano le prime due sarebbero appunto le generatrici comuni alle due rigate R^{15} considerate. Perciò sulla superficie F *due qualunque delle curve* γ_{11}^{15} *avranno cinque punti a comune* (**). A rigate R_{11}^{15} aventi direttrici sghembe, e perciò non contenute in un medesimo complesso lineare, corrisponderanno curve γ_{11}^{15} i cui spazi S_6 non stanno in un medesimo iperpiano S_8, e hanno perciò a comune (precisamente) uno spazio S_3; e il sistema dei 5 punti comuni a quelle due curve apparterrà a questo spazio S_3 (cioè quei 5 punti non staranno in un piano: perchè se no le 5 rette

(*) Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (“ Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. 24, 1889); n° 27.

(**) Nel sistema ∞^2 di rette contenuto nella varietà V le rigate R_{11}^{15} formano un sistema algebrico (non lineare) ∞^2, che ha per serie lineare caratteristica (Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti a una superficie algebrica,* “ Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. 39, 1904; n° 4) una g_5^1. Si vedrebbe facilmente che questa g_5^1 sopra la rigata R_{11}^{15} che ha una data direttrice l si compone di quei gruppi di generatrici che stanno negli spazi tangenti a V nei singoli punti di l, senza passare però, in generale, per il punto di contatto. Questa serie è la residua dell'altra g_5^1, formata dai gruppi di generatrici che escono dai singoli punti di l, rispetto alla g_{10}^3 completa che contiene i gruppi di generatrici segati dagli spazi S_3 che passano per l. L'esistenza di questo sistema algebrico ∞^2 di rigate, completo (perchè è certo completa la sua g_5^1 caratteristica) e non lineare, e perciò non contenuto totalmente in un sistema lineare, basta per affermare che la superficie immagine del nostro sistema di rette è irregolare (cioè che per essa $p_g > p_n$).

comuni alle due rigate dovrebbero stare sopra una quadrica). Infine, a tre rigate R_{11}^{15} colle direttrici a_1, a_2, a_3 a due a due sghembe e non contenute in un medesimo spazio S_3 corrisponderanno curve γ_{11}^{15} i cui spazi S_3 avranno a comune un punto e uno solo. Infatti, dire che questi tre spazi S_6 hanno a comune un solo punto equivale a dire che le tre reti formate dai complessi lineari singolari i cui piani-assi passano rispett. per le tre rette a_1, a_2, a_3 sono contenute soltanto in un sistema lineare ∞^8 di complessi lineari, e non in un sistema inferiore; ossia che vi è soltanto un complesso lineare di piani " coniugato " a tutti quei complessi di rette, vale a dire contenente le tre reti di piani di assi a_1, a_2, a_3 (*). E questo è appunto il complesso formato dai piani che si appoggiano all'unica retta secante comune di a_1, a_2, a_3 (**).

Ciò premesso, se la superficie F^{45} fosse proiezione di un'altra dello stesso ordine (Φ) appartenente a uno spazio superiore, alle ∞^2 curve γ_{11}^{15} contenute in F dovrebbero corrispondere sopra Φ curve γ' appartenenti pure a spazi S_6 (perchè le prime sono normali); due generici fra questi spazi S_6 dovrebbero ancora incontrarsi secondo uno spazio S_3, perchè le loro curve γ' avranno egualmente a comune 5 punti non contenuti in un piano; e tre qualunque dei medesimi spazi S_6 avrebbero ancora a comune un punto, perchè due di essi incontrerebbero il terzo secondo spazi S_3 di un medesimo S_6 e perciò fra loro incidenti. Questo punto comune a tre degli spazi S_6 sarà però, in generale, unico, perchè così avveniva sulla superficie F. Segue da ciò che lo spazio S_9 determinato da due di quegli S_6 dovrà contenere anche tutti i rimanenti spazi S_6 delle curve γ', perchè con uno generico fra questi esso avrà a comune due diversi S_3 (sue intersezioni con quei primi due S_6) incontrantisi in un unico punto. Quello stesso spazio S_9 dovrebbe dunque contenere l'in-

(*) Castelnuovo, Mem. cit., *Ricerche di geometria della retta...*, p. 46.

(**) Per maggior chiarezza, può convenire di trasformare quest'ultima questione per dualità in S_4; e si tratterà allora di trovare quei complessi lineari di rette che contengono tre piani rigati assegnati. Se questi piani non passano per uno stesso punto, potranno stare soltanto in un complesso lineare singolare il cui piano-asse li incontri tutti tre secondo rette; e di piani così fatti non ve n'è in generale che uno: quello determinato dai punti d'intersezione dei tre piani dati a due a due.

tera superficie Φ; e perciò non è possibile che questa appartenga a uno spazio superiore a S_9.

5. — Dico ora che *le sezioni iperpiane della superficie* F^{45} *di* S_9 *da noi considerata sono precisamente le curve canoniche di questa superficie*; ossia che *il sistema* ∞^2 *di rette contenuto nella varietà* V *ha per rigate canoniche le sue intersezioni cogli* ∞^9 *complessi lineari di* S_4.

Sia $|C|$ il sistema lineare ∞^9 di rigate che i complessi lineari segano sulla varietà di rette contenuta in V (sistema che già sappiamo essere completo). Proponiamoci di determinarne il sistema Jacobiano $|C_j|$, ossia quel sistema lineare completo che contiene le Jacobiane di tutte le reti appartenenti a $|C|$ (potendosi prescindere dalla considerazione degli eventuali elementi basi, poichè il sistema $|C|$ ne è privo). Allora il sistema aggiunto a $|C|$ sarà definito dalla relazione simbolica:

$$|C'| = |C_j - 2C| \text{ (*)};$$

e il sistema canonico della relazione:

$$|K| = |C' - C| = |C_j - 3C|.$$

Si tratterà dunque di far vedere che nel nostro caso $|K| \equiv |C|$.

Si consideri a tal uopo entro $|C|$ una rete qualsiasi; p. e. quella rete $|\mu|$, che viene segata dai complessi lineari singolari i cui piani-assi passano per una retta generica s dello spazio S_4. Una rigata di questa rete ha delle generatrici doppie ogni qual volta il piano-asse al quale si appoggiano tutte le sue generatrici è tangente alla varietà V; e allora sono doppie tutte sei le generatrici che escono dal punto di contatto di questo piano. La Jacobiana della rete $|\mu|$ conterrà dunque tutte le rette di V che escono dai punti in cui questa varietà è toccata da piani passanti per s; e da queste rette essa sarà anche esaurita (**). Il luogo di quei punti di contatto è una curva di

(*) Enriques: *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 37, 1901); p. 18.

(**) Vi sono bensì, all'infuori delle rigate sopra considerate, anche delle altre che hanno generatrici doppie; e precisamente (cfr. n° 7) tutti i complessi lineari singolari, i cui piani-assi passano per la retta s e stanno in un medesimo spazio S_3 bitangente a V, segano sopra V delle rigate contenute nella rete $|\mu|$ e aventi come generatrice doppia una medesima " retta

12° ordine, intersezione di V colla superficie f^4 base del fascio formato dalle quadriche polari dei punti della retta s. La nostra rigata Jacobiana si comporrà perciò di tutte le rette di V che si appoggiano a questa curva di 12° ordine, ossia che si appoggiano alla superficie f^4 (poichè una retta di V può appoggiarsi a questa superficie soltanto in un punto di quella curva): essa sarà dunque l'intersezione del sistema ∞^2 di rette contenuto in V col complesso di 4° grado formato da tutte le rette di S_4 che si appoggiano alla superficie f^4.

Segue da ciò che il sistema Jacobiano completo $|C_j|$ — il quale nel caso presente non deve avere elementi basi — conterrà tutte le rigate (di ordine 180) intersezioni del sistema ∞^2 di rette contenuto in V coi varî complessi di 4° grado dello spazio S_4 (perchè se no esso non sarebbe certo un sistema completo), e potrà eventualmente contenerne altre ancora (del medesimo ordine); esso coinciderà poi certo col sistema completo $|4C|$, quadruplo di $|C|$, col quale ha evidentemente infinite rigate a comune. Avremo perciò:

$$|K| \equiv |C_j - 3C| = |4C - 3C| = |C|$$

come si voleva dimostrare.

6. — Poichè la superficie F^{45}, immagine del sistema ∞^2 di rette contenuto nella varietà cubica V, è normale (n° 4), e ha per curve canoniche le sue ∞^9 sezioni iperpiane (n° 5), così il suo *genere geometrico* sarà $= 10$. E il genere $= 46$ delle curve canoniche sarà il suo *genere lineare* $p^{(1)}$.

Il sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio S_4 *ha il genere geometrico* $p_g = 10$ *e il genere lineare* $p^{(1)} = 46$. *Le sue ∞^9 rigate canoniche vengono segate dai complessi lineari dello spazio* S_4.

La superficie F^{45} di S_9 immagine di questo sistema di rette sarà una " superficie canonica „ di genere $p_g = 10$, priva

speciale „. Ma le generatrici doppie che così si ottengono saranno soltanto in numero finito (tante quanti gli S_3 bitangenti a V che passano per la retta s), e non potranno perciò costituire una parte ulteriore della Jacobiana cercata.

di curve eccezionali (perchè il suo ordine è eguale al genere lineare $p^{(1)}$, diminuito di un'unità).

7. — Troviamo ora per questa superficie F^{45} il valore dell'invariante I (*), del quale poi ci serviremo per determinare il genere numerico. È noto che se si considera sopra una superficie un fascio lineare di curve irriducibili di genere $\pi > 0$ e con n punti basi, e se si indica con δ il numero delle curve del fascio dotate di punto doppio, l'espressione:

$$I = \delta - n - 4\pi$$

non dipende dalla scelta del fascio, e costituisce perciò un invariante (relativo) (**) della superficie: di questo invariante vogliamo appunto determinare il valore.

Consideriamo a tal uopo le rigate che nel sistema ∞^2 di rette contenuto in V vengono segate da un fascio di complessi lineari singolari, vale a dire da quei complessi i cui piani-assi passano per una retta generica s e stanno in un determinato spazio $S_3 \equiv \Sigma$ (passante a sua volta per quella retta). Per questo fascio di rigate, che è contenuto nel sistema canonico, sarà $\pi = 46$ e $n = 45$; e dobbiamo cercare quante rigate R^{45} di esso abbiano una generatrice doppia.

Queste generatrici doppie possono nascere in due modi diversi.

Anzitutto nel fascio formato dai piani σ vi sono 12 piani tangenti alla varietà V (ossia alla superficie intersezione di questa varietà collo spazio Σ); e per la rigata R^{45} le cui generatrici si appoggiano a uno di questi piani sono elementi doppî tutte le sei generatrici che escono dal punto di contatto di tale piano con V. Queste 12 rigate contribuiscono perciò al computo

(*) Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 31, 1896). Questo carattere era stato considerato anche prima, ma in modo meno generale, dal sig. Zeuthen (" Math. Ann. ", IV, 1871) e dal sig. Noether (" Math. Ann. ", VIII, 1874; p. 526).

(**) Ossia un carattere invariabile per quelle sole trasformazioni birazionali della superficie che non introducono in nessuno dei due sensi curve eccezionali (come trasformate di punti semplici).

del numero δ con $6 . 12 = 72$ unità. E una retta " non speciale „ della varietà V, essendo sghemba rispetto a tutte le ∞^1 ad essa consecutive sopra V stessa (*), non può risultare generatrice doppia di una di quelle rigate se non nel modo ora indicato; perchè se un piano σ si appoggia a una tale retta g in un punto G, esso non potrà appoggiarsi in pari tempo anche a due diverse rette consecutive a g, a meno di non contenere due fra le tangenti di V in quel punto G, e di essere perciò esso stesso ivi tangente a V.

Invece una " retta speciale „ contenuta nella varietà V è incidente a tutte le ∞^1 ad essa consecutive; lungo di essa la varietà V ammette un piano tangente fisso ξ, e gli spazi S_3 passanti per questo piano sono tutti bitangenti a V in coppie di punti di quella retta. Inoltre il piano rigato di sostegno ξ è precisamente la varietà lineare tangente secondo tale retta al sistema ∞^2 di rette contenuto in V (**). — Ora è noto che gli iperpiani passanti per il piano tangente a una superficie in un suo punto semplice — ed essi soltanto — incontrano questa superficie secondo linee che nel punto considerato hanno un punto doppio. Potremo dunque concludere che *Una retta speciale* g *della varietà* V *sarà doppia per la rigata* R^{45} *segata da un complesso lineare sempre e solo quando questo complesso contenga l'intero piano rigato* ξ *tangente a* V *lungo quella retta*. E se si tratta di un complesso lineare singolare, *sarà necessario e sufficiente, affinchè* g *risulti generatrice doppia della rigata sezione, che il piano-asse* σ *del complesso incontri il piano* ξ *secondo una retta*. Ora, dire che nel fascio di piani $s(\Sigma)$ vi è un piano σ incontrante ξ secondo una retta, equivale a dire che il piano ξ si appoggia alla retta s asse di quel fascio, e determina perciò con essa uno spazio S_3 che sarà bitangente a V (in punti di g). Sicchè le rigate R^{45} del nostro fascio che hanno una retta speciale come generatrice doppia saranno tante quanti gli spazi bitangenti di V che passano per la retta s; saranno cioè in numero di 180 (***).

(*) Cfr. la mia Mem. cit. *Ricerche sulla varietà cubica generale...*, n° 6.
(**) Mem. cit., n° 5, 6.
(***) Mem. cit., n° 10.

Segue da ciò $\delta = 72 + 180 = 252$. E quindi:

$$I = 252 - 45 - 4 . 46 = 23.$$

E dalla relazione:

$$\omega + I = 12p_n + 9 \text{ (*)}$$

nella quale p_n indica il *genere numerico* della superficie, e l'invariante ω è in questo caso eguale al genere lineare $p^{(1)} = 46$ (poichè non vi sono curve eccezionali), si deduce:

$$12p_n = 46 + 23 - 9 = 60 \quad \text{ossia} \quad p_n = 5.$$

Il sistema ∞^2 *di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio* S_4 *è un ente algebrico doppiamente infinito di genere geometrico* 10 *e genere numerico* 5.

8. — Abbiamo veduto che il sistema ∞^2 delle rette contenute nella varietà V è incontrato dai complessi lineari di S_4 secondo le sue ∞^9 *rigate canoniche*. E le rigate (di ordine 90) formanti il sistema lineare doppio del precedente saranno le *rigate bicanoniche*. Sono dunque certamente tali tutte le rigate intersezioni di V con complessi quadratici di rette; ma da queste il sistema bicanonico non è ancora esaurito.

Infatti il bigenere P_2, ossia il numero delle curve (rigate) bicanoniche linearmente indipendenti, è legato ai due generi p_g e p_n e al genere lineare $p^{(1)}$ dalle due relazioni:

$$p_g + p^{(1)} \geq P_2 \geq p_n + p^{(1)} \text{ (**)}$$

sempre valide se $p_g > 1$. Nel nostro caso dunque ($p_g = 10$, $p_n = 5$, $p^{(1)} = 46$):

$$56 \geq P_2 \geq 51.$$

Ora *i complessi quadratici di rette dello spazio* S_4 *sono in*

(*) Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (“ Annali di Matem. „, ser. III, vol. VI, 1901); n° 6, p. 24.

(**) Castelnuovo-Enriques: *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (“ Math. Ann. „, vol. 48, 1896); § 31.

numero di ∞^{49}. Infatti, considerando le rette di S_4 come punti di una M_6^5 di uno spazio S_9, i complessi quadratici saranno rappresentati dalle intersezioni di questa M_6^5 colle quadriche del medesimo spazio. Le quadriche dello spazio S_9 dipendono da $\frac{9.12}{2}=54$ parametri, e fra esse ve ne sono ∞^4 che contengono la M_6^5 sopra accennata (*); perciò il sistema lineare che esse segano sulla M_6^5 avrà soltanto la dimensione $54-4-1=49$. E poichè nessun complesso quadratico contiene l'intero sistema ∞^2 di rette esistente sopra V (n° 1), così sopra questo sistema i complessi quadratici segheranno precisamente ∞^{49} rigate bicanoniche, fra le quali soltanto 50 saranno linearmente indipendenti: mentre invece $P_2 \geq 51$.

È notevole che *la rigata sviluppabile* Σ^{90} *formata dalle rette speciali della varietà* V (**) *è precisamente una rigata bicanonica che non può segarsi con un complesso quadratico di rette.* Infatti questa rigata si può segare, e in infiniti modi, con un complesso cubico il quale incontri ulteriormente il nostro sistema ∞^2 di rette secondo una rigata R^{45} sua intersezione con un complesso lineare: a questa condizione soddisfanno tutti i complessi cubici formati dalle rette che stanno sulle quadriche polari (rispetto a V) dei punti di un piano qualsiasi (***). Perciò è chiaro che quella rigata Σ^{90} deve far parte del sistema lineare doppio di quello segato dai complessi lineari, cioè deve essere una rigata bicanonica.

Per dimostrare poi che la rigata Σ^{90} non può segarsi con un complesso quadratico di rette, basterà verificare che è effettivamente così in un caso particolare qualsiasi. E lo si riconosce facilmente per la varietà di equazione:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3=0$$

(*) Questo sistema lineare ∞^4 è determinato dalle cinque quadriche $r_i=0$, dove:

$$r_i \equiv r_{kl}\, r_{mn} + r_{km} r_{nl} + r_{kn} r_{lm}$$

essendo $iklmn$ una permutazione dei numeri naturali da 1 a 5 (Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta...*, " Atti Ist. Ven. ", serie II, vol. 7°, 1891).

(**) Cfr. la mia Mem.: *Ricerche sulla varietà cubica generale...*, n° 6 e seg.

(***) Mem. cit., n° 9.

sulla quale la rigata Σ^{90} si compone dei 30 coni cubici che ne sono intersezioni cogli spazi $x_i + \epsilon x_k = 0$ (dove ϵ è una qualsiasi radice cubica dell'unità) (*). Dico che questi 30 coni cubici non sono certo contenuti in un medesimo complesso quadratico di rette. E infatti, se vi fosse un complesso quadratico il quale li contenesse tutti, questo medesimo complesso dovrebbe anche contenere:

1° Le 30 stelle ∞^2 di rette alle quali quei coni rispett. appartengono;

2° Tutti i sistemi ∞^3 di rette appoggiantisi a uno dei piani $x_i = x_k = 0$ e allo spigolo opposto $x_l = x_m = x_n = 0$ della piramide fondamentale. Infatti per ogni punto di uno di quei piani escirebbero già tre rette del complesso, appartenenti a altrettante delle 30 stelle precedenti, e contenute in un medesimo fascio; e perciò il complesso quadratico di cui si tratta dovrebbe contenere tutti questi fasci;

3° Tutte le stelle ∞^3 di rette uscenti dai 5 punti fondamentali del sistema di coordinate, perchè da ognuno di questi punti escirebbero già quattro stelle ∞^2 contenute nel complesso;

4° Tutte le ∞^4 rette contenute in uno qualsiasi degli spazi $x_i = 0$; perchè entro questo spazio apparterrebbero già al complesso quattro stelle ∞^2 di rette, i quattro piani rigati determinati dai vertici di queste stelle a tre a tre, e tutte le rette che si appoggiano a una qualsiasi coppia di spigoli opposti del tetraedro così determinato;

5° Tutte le rette che si appoggiano a una delle rette fondamentali $x_i = x_k = x_l = 0$, perchè per ogni punto di una di esse escirebbero già tre stelle ∞^2 appartenenti al complesso e contenute rispett. nei tre spazi $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$.

(*) Ciascuno dei 30 spazi $x_i + \epsilon x_k = 0$ incontra infatti la varietà $\Sigma x_i^3 = 0$ secondo un cono cubico: quello stesso che è sua intersezione col cono di 2ª specie $x_l^3 + x_m^3 + x_n^3 = 0$ (essendo $iklmn$ una permutazione dei numeri naturali da 1 a 5). Ora le generatrici di un cono contenuto in una varietà cubica sono sempre “ rette speciali „, perchè lungo ognuna di esse la varietà ammette un piano tangente fisso (il piano tangente a quel medesimo cono); perciò, nel nostro caso, quei 30 coni cubici faranno tutti parte della sviluppabile Σ^{90}, la quale risulterà anzi così già esaurita. Allo studio delle varietà $\Sigma x_i^3 = 0$, e in particolare dei suoi spazi pluritangenti, ho dedicata un'altra Nota nei “ Rendiconti dell'Istituto Lombardo „ di quest'anno.

Ora non vi è certo nello spazio S_4 nessun complesso quadratico il quale contenga tutte le rette sopra indicate; perchè per ogni punto di questo spazio escirebbero già dieci fasci di rette contenuti nel supposto complesso (quelli che proiettano le rette $x_i = x_k = x_l = 0$), e questi fasci dovrebbero perciò stare sopra un medesimo cono quadrico, il che non avviene.

Nel sistema ∞^2 di rette contenuto nella varietà V *sono dunque rigate bicanoniche tutte le ∞^{49} rigate segate dai complessi quadratici di rette e, oltre a queste, la sviluppabile Σ^{90} delle rette speciali.* È possibile che all'infuori del sistema lineare ∞^{50} così determinato non ve ne siano altre.

9. — Quando una varietà cubica di S_4 ha un numero finito $k > 0$ e ≤ 5 di punti doppî fra loro indipendenti, rappresentandola sopra uno spazio S_3 mediante proiezione da uno dei suoi punti doppî, si ottiene in questo spazio una sestica fondamentale, intersezione di una quadrica con una superficie di 3° ordine, irriducibile e dotata di $k-1$ punti doppî; perciò di genere $4-(k-1) = 5-k$. E il sistema ∞^2 di rette contenuto in quella varietà si proietta secondo il sistema delle corde di questa sestica (*). Vale a dire:

Quando una varietà cubica di S_4 *ha un numero finito* $k > 0$ *e* ≤ 5 *di punti doppî fra loro indipendenti, il sistema ∞^2 delle rette esistenti su di essa è birazionalmente identico al sistema delle corde di una curva di genere* $5-k$: per $k = 5, 4, 3, 2, 1$ dunque rispett. al sistema delle corde di una curva di genere 0, 1, 2, 3, 4.

È noto che un tale sistema ha il genere geometrico $\frac{(5-k)(4-k)}{2}$ e il genere numerico $\frac{(5-k)(2-k)}{2}$ (**).

Ora *sopra una varietà cubica priva di punti doppî il sistema ∞^2 di rette ha precisamente lo stesso genere geometrico* $p_g = 10$

(*) Cfr. la Mem. cit. del sig. Segre: *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni...*, n° 4, 56.

(**) Severi: *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 38, 1903); De Franchis: *Sulla varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (" Rend. di Palermo ", vol. 17°, 1903).

e lo stesso genere numerico $\mathrm{p}_n = 5$ *del sistema delle corde di una curva di genere* 5 (come si otterrebbe cioè dalle formole precedenti ponendo in esse $k = 0$). E a quel sistema di rette spetta altresì la medesima proprietà del sistema delle corde di una curva canonica — cioè, nel caso del genere 5, di una curva di 8° ordine intersezione di tre quadriche dello spazio S_4 —, che le rigate canoniche vengono segate precisamente dai complessi lineari dello spazio a cui il sistema di rette appartiene. Ma *il sistema delle rette contenute in una varietà cubica generale di* S_4 *non è certo riferibile al sistema delle corde di una curva di genere* 5 (pur avendo lo stesso genere geometrico e lo stesso genere numerico); perchè sono differenti i loro generi lineari. Pel primo abbiamo veduto infatti che $p^{(1)} = 46$; e pel secondo si ha (*) $p^{(1)} = (5 - 2)\ (4 . 5 - 5) = 3 . 15 = 45$. E l'invariante I vale per questi due sistemi di rette rispett. 23 e 24 (essendo sempre $p^{(1)} + I = 69 = 12 p_n + 9$).

Torino, aprile 1904.

(*) Cfr. i lavori ora cit. dei sigg. Severi e De Franchis.