GINO FANO

Sui modi di calcolare la torsione di una linea geodetica sopra una superficie qualunque

Atti R. Acc. Peloritana, Vol. **16** (1901), p. 198–199

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1901_3>

SUL MODO DI CALCOLARE LA TORSIONE DI UNA LINEA GEODETICA
SOPRA UNA SUPERFICIE QUALUNQUE

Osservazione di **G. Fano**

Per una curva qualunque nello spazio, indicati con α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν i coseni direttori rispett. della tangente, della normale principale, e della binormale, e con $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{T}$ rispett. la curvatura e la torsione; sussistono le formole di Frenet:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T} \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\mu}{T} \qquad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\nu}{T}$$

E da queste, moltiplicandole rispett. per λ, μ, ν, e sommandole membro a membro, si ricava:

$$\frac{1}{T} = -\left\{ \lambda \frac{d\xi}{ds} + \mu \frac{d\eta}{ds} + \nu \frac{d\zeta}{ds} \right\}$$

Ora per una linea geodetica tracciata sopra una superficie qualunque si ha, facendo uso delle solite notazioni:

$$\xi = \pm X \qquad \eta = \pm Y \qquad \zeta = \pm Z$$

$$\lambda = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \pm Y & \pm Z \end{vmatrix} = \pm \left| Z \frac{dy}{ds} - Y \frac{dz}{ds} \right|$$

e analogamente per μ, ν. Sarà quindi:

$$T = -\Sigma\left(Z\frac{dy}{ds} - Y\frac{dz}{ds}\right)\frac{dX}{ds} = -\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{dX}{ds} & \dfrac{dY}{ds} & \dfrac{dZ}{ds} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \end{vmatrix}$$

ovvero (posto $H = \sqrt{EG - F^2}$):

$$T = -\frac{1}{H \, . \, ds^2}\begin{vmatrix} \dfrac{dy}{du}\dfrac{dz}{dv} - \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dz}{du} & \dfrac{dz}{du}\dfrac{dx}{dv} - \dfrac{dz}{dv}\dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{dv} - \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dy}{du} \\ \dfrac{dX}{du}du + \dfrac{dX}{dv}dv & \dfrac{dY}{du}du + \dfrac{dY}{dv}dv & \dfrac{dZ}{du}du + \dfrac{dZ}{dv}dv \\ \dfrac{dx}{du}du + \dfrac{dx}{dv}dv & \dfrac{dy}{du}du + \dfrac{dy}{dv}dv & \dfrac{dz}{du}du + \dfrac{dz}{dv}dv \end{vmatrix}.$$

Volendo ora far comparire nel 2° membro (oltre ai differenziali du, dv) soltanto le funzioni E, F, G, D D', D'', basta introdurvi come fattore il determinante:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\ \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \\ \dfrac{X}{H} & \dfrac{Y}{H} & \dfrac{Z}{H} \end{vmatrix}$$

che è evidentemente $= 1$. Eseguendo allora il prodotto dei due determinanti per orizzontali si ha:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{H \, . \, ds^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(D\,du + D'\,dv) & -(D'\,du + D''\,dv) & 0 \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi la formola nota (cfr. ad es. Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale*, p. 160):

$$\frac{1}{T} = \frac{(FD - ED')\,du^2 + (GD - ED'')\,du\,dv + (GD' - FD'')\,dv^2}{\sqrt{EG - F^2}\,(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)}.$$