Gino Fano

Sopra alcune particolari congruenze di rette del 3° ordine

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **36** (1901), p. 366–379

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1901_2>

Sopra alcune particolari congruenze di rette del 3° ordine.

Nota di GINO FANO.

In questa Nota mi propongo di segnalare l'esistenza di alcune particolari congruenze di rette del 3° ordine (prive di linea singolare), le quali mi sembrano meritevoli di speciale attenzione per il maggior numero di punti e piani singolari ch'esse posseggono in confronto delle congruenze più generali aventi gli stessi loro caratteri. Nella mia Memoria: *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare*, che fu anche presentata recentemente a cotesta Illustre Accademia (1), non mi sono fermato a discorrere di tali congruenze, per non sviare l'attenzione del lettore dalle ricerche più generali di cui la detta Memoria è oggetto (2).

I.

Congruenze contenute in un complesso tetraedrale.

1. — Una congruenza di rette del 3° ordine contenuta in un complesso tetraedrale si può generare con due inviluppi ∞^2 di piani di 3ª classe fra loro collineari, e ha in generale il *genere sezionale* (cfr. M., n° 2) *quattro*. Infatti, se il complesso tetraedrale si rappresenta nel modo consueto (3) sullo spazio di piani, a quella congruenza del 3° ordine corrisponde un inviluppo ∞^2 di piani di 3ª classe Γ^3 (che insieme ad altro ad esso collineare

(1) Cfr. "Memorie", ser. II, t. LI.

(2) Nel seguito, questa Memoria verrà indicata per brevità colla sola lettera M.

(3) Weiler, "Zeitschr. f. Math. u. Ph.", 22; Loria, "Atti della R. Acc. di Torino", vol. XIX; Reye, *Geometrie der Lage*, 2te Aufl., II; 3te Aufl., III; Sturm, *Die Grundgebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie...*, I, pp. 342, 369-71.

genera appunto la congruenza) [1]; e alle congruenze $(2, 2)$ intersezioni del complesso tetraedrale cogli ∞^5 complessi lineari corrispondono gli inviluppi di 2ª classe (Δ^2) contenenti i quattro piani fondamentali del complesso. E questi ultimi inviluppi incontrano Γ^3 secondo inviluppi ∞^1 (sviluppabili) di 6ª classe e, in generale, di genere 4. Però, se l'inviluppo Γ^3 ha come piani doppi un certo numero $k\,(\leq 4)$ dei piani fondamentali del complesso, questi saranno pure doppi per le sviluppabili intersezioni di esso cogli inviluppi Δ^2; e il genere di queste sviluppabili, che è poi il genere sezionale della data congruenza, sarà allora $4-k$.

Quanto alla classe della congruenza, è noto che questa sarà $=9$ se l'inviluppo Γ^3 non contiene nessuno dei piani fondamentali del complesso (che sono in pari tempo i piani uniti della corrispondenza collineare fra Γ^3 e l'altro inviluppo che con esso genera la congruenza); e discende, a partire da 9, di h unità ogni qual volta uno di questi piani diventa h^{plo} per Γ^3.

Concludiamo pertanto: *Due inviluppi ∞^2 di piani di terza classe fra loro collineari, i quali abbiano a comune $k\,(\leq 4)$ piani doppi uniti* [2], *e eventualmente anche un certo numero $k' \leq 4-k$ di piani semplici uniti, generano una congruenza di rette del 3° ordine, di classe $9-2k-k'$, e di genere sezionale $4-k$, contenuta in un complesso tetraedrale.*

Ogni congruenza di 3° ordine contenuta in un complesso tetraedrale è generabile in questo modo.

2. — Prendiamo in particolare due inviluppi ∞^2 di 3ª classe fra loro collineari, i quali abbiano un piano doppio unito [3] e rispett. 0, 1, 2, 3 piani semplici pure uniti. Ricordando le pro-

---

(1) Quest'altro inviluppo (ossia la corrispondenza collineare fra esso e Γ^3) non è però individuato dalla data congruenza e dall'inviluppo Γ^3, ma dipende ancora da un parametro.

(2) Per *piano doppio unito* intendiamo un piano il quale sia doppio per l'uno e per l'altro dei due inviluppi, e corrisponda a sè stesso nella collineazione fra questi. — Del caso in cui vi sia un piano triplo unito non ci occupiamo, perchè esso condurrebbe soltanto a congruenze aventi una linea singolare.

(3) Se non vi fosse alcun piano doppio unito, si avrebbero delle congruenze di genere sezionale 4, che sono già tutte studiate in M. (§ 12 e n° 55).

prietà generali delle congruenze contenute in un complesso tetraedrale [1], si vede immediatamente che in questi casi si otterranno rispettivamente le seguenti congruenze di genere sezionale *tre*:

Una congruenza (3, 7) contenente un cono ellittico di 6° ordine con tre generatrici triple, e tre coni razionali di 4° ordine aventi rispett. queste stesse tre rette anche come generatrici triple;

Una congruenza (3, 6) contenente un cono ellittico di 5° ordine con una generatrice tripla e due generatrici doppie, un cono razionale quartico con quella stessa generatrice tripla, e due coni razionali cubici aventi rispett. per doppie le due generatrici doppie del primo cono;

Una congruenza (3, 5) contenente un cono quartico ellittico, due coni cubici razionali aventi rispett. per generatrici doppie le stesse rette che sono tali pel primo cono, e un cono quadrico;

Una congruenza (3, 4) contenente un cono cubico ellittico e tre coni quadrici, i quali ultimi avranno ciascuno una generatrice a comune col cono cubico, ma non avranno fra loro, a due a due, alcuna generatrice comune.

In tutti questi casi il piano doppio unito (π), che è il piano dei vertici dei tre coni razionali, contiene un inviluppo quadrico di rette della congruenza. In questo piano si troveranno in generale sei coppie di rette omologhe nella data collineazione, le quali saranno assi di fasci di piani contenuti rispett. nei due inviluppi ∞^2, e a due a due proiettivi e in posizione prospettiva. Nascono così sei fasci di raggi contenuti in ciascuna delle dette congruenze, e aventi i centri nel piano π dell'inviluppo quadrico.

Altri $7 - n$ fasci di rette (indicata con n la classe della congruenza) sono contenuti nei piani semplici uniti dei due inviluppi generanti la congruenza. In tutto si hanno quindi i $13 - n$ fasci del caso generale (M. § 11).

Queste congruenze contengono dunque, come quelle più generali considerate in M. § 11, un cono ellittico di ordine $n - 1$ e $13 - n$ fasci di rette; ma contengono in più tre coni

[1] Cfr. i lav. già cit., e anche M., n° 54.

razionali (dai cui vertici non escono raggi isolati della congruenza [1]) e un inviluppo quadrico di rette. — Esse possono rappresentarsi sul piano, come nel caso generale, in modo che alle rigate loro intersezioni coi complessi lineari corrispondano curve piane di 4° ordine con $13 - n$ punti (semplici) a comune. In questo caso si ha però la particolarità (che non si verifica nel caso generale) che *dei* $13 - n (\geq 6)$ *punti basi*, *sei stanno sopra una conica,* la quale è immagine dell'inviluppo quadrico di rette contenuto nella congruenza. Ciò si vede subito dalla rappresentazione duale — vale a dire sopra una stella di piani — che si ha facendo corrispondere a ogni raggio della congruenza il piano che lo congiunge al vertice del cono ellittico.

3. — Due inviluppi di piani di 3^a classe fra loro collineari con due piani doppi uniti e rispett. $0, 1, 2$ piani semplici pure uniti, generano delle congruenze $(3, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 3)$ di genere sezionale *due* contenute in un complesso tetraedrale, le quali sono reciproche delle congruenze cremoniane di Hirst [2] generate da due piani in corrispondenza birazionale del 3° ordine. Queste congruenze $(3, n)$ $(n \leq 5)$ contengono due coni razionali di ordine $n - 1$ con una generatrice $(n - 2)^{pla}$ a comune e due inviluppi quadrici in più delle congruenze generali aventi gli stessi caratteri (M., n^i 65-67).

Due inviluppi di 3^a classe fra loro collineari con tre piani doppi uniti generano una congruenza $(3, 3)$ di genere sezionale *uno*; e se vi è anche un piano semplice unito, si ha una congruenza $(3, 2)$. Queste congruenze sono però le più generali fra quelle di egual ordine, classe, e genere sezionale; ed è noto

---

(1) E così sarà anche in seguito; i coni singolari in più che troveremo in talune congruenze saranno tutti razionali, e dai loro vertici non esciranno raggi della congruenza non appartenenti ai coni stessi. Questa proprietà trova la sua conferma nel fatto che questa speciale categoria di coni singolari (i cui vertici sono punti quadrupli della superficie focale) non entra affatto nelle due relazioni (M. n^i 40, 41) che passano fra gli ordini dei coni singolari di una congruenza di 3° ordine.

(2) " Proc. of the Lond. Math. Soc. „, vol. 16 (1885); " Rend. di Palermo „, I, p. 64.

infatti che le congruenze (3, 3) e (3, 2) di genere sezionale *uno* stanno sempre in un complesso tetraedrale [1].

Infine due inviluppi di 3ª classe fra loro collineari e aventi quattro piani doppi uniti generano una congruenza (3, 1) di genere sezionale *zero* (M., nº 58). Questa deve essere dunque una congruenza cremoniana generata da due piani omografici in posizione generale; ed essa può infatti considerarsi come generata da una corrispondenza omografica fra due qualunque dei quattro piani doppi comuni ai due inviluppi.

D'altra parte una superficie di 3ª classe con quattro piani doppi (ossia tangenti secondo coniche), e perciò di 4º ordine, non è altro che una *superficie di Steiner*. E due superficie di Steiner generiche sono sempre proiettive [2]; se poi hanno a comune i quattro piani tangenti secondo coniche, esse potranno trasformarsi proiettivamente l'una nell'altra, e in un sol modo, in guisa tale che ciascuno di quei piani doppi corrisponda a sè stesso. *Le rette intersezioni delle coppie di piani tangenti delle due superficie che si corrispondono in questa collineazione formeranno una congruenza cremoniana* (3, 1) *di genere sezionale zero.*

Più intuitivo è forse il teorema duale: *Due superficie del 3º ordine con 4 punti doppi sono sempre proiettive* (almeno se i punti doppi sono distinti). Se esse hanno a comune i punti doppi, vi è una sola collineazione che ha questi 4 punti per punti uniti e fa corrispondere fra loro le due superficie. *Le congiungenti delle coppie di punti omologhi delle due superficie formano allora la congruenza* (1, 3) *delle corde di una cubica sghemba;* e questa cubica è l'intersezione residua delle due superficie, all'infuori delle 6 rette che congiungono a due a due i 4 punti doppi comuni ad esse. Tutte proprietà elementari, che si possono anche dimostrare direttamente senza difficoltà.

---

(1) Cfr. Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3º ordine dello spazio a 4 dimensioni*, " Atti del R. Ist. Ven. ", s. VI, t. VI, ni 28, 29, 33; come pure la mia Memoria: *Studio di alcuni sistemi di rette...* " Annali di Matem. ", s. 2ª, t. 21, ni 14, 6. Della congruenza (3, 2) è poi notissimo che è contenuta in *dieci* complessi tetraedrali.

(2) Ciò si deduce immediatamente dalle equazioni tangenziali di queste superficie, che, riferite al tetraedro dei piani tangenti doppi, assumono la forma:

$$\frac{a_1}{u_1}+\frac{a_2}{u_2}+\frac{a_3}{u_3}+\frac{a_4}{u_4}=0.$$

II.

Congruenze di « rette principali » di un sistema lineare ∞^3 di quadriche.

4. — Dato un sistema lineare ∞^3 di quadriche (Σ) privo di punti basi, le rette che appartengono a tutto un fascio di quadriche di questo sistema formano una congruenza (7, 3) di genere sezionale 6, che è stata studiata in M. § 14, e che si ottiene come intersezione parziale dei complessi cubici formati dalle generatrici delle quadriche di due reti qualunque contenute in Σ. Le rette di questa congruenza furono chiamate dal signor Reye (¹) " rette principali " (" *Hauptstrahlen* ") del sistema lineare di quadriche. Partendo invece dalla considerazione di un sistema lineare ∞^3 con uno o più punti basi, si trovano particolari congruenze $(n, 3)$ di genere sezionale $n - 1$ $(n \leq 6)$, delle quali ci occuperemo ora brevemente.

Sia dunque Σ un sistema lineare ∞^3 di quadriche, con un numero finito k (≤ 6) di punti basi $A_1, A_2, \ldots A_k$. Il complesso cubico formato dalle generatrici delle quadriche di una qualsiasi rete del sistema Σ conterrà per intero le k stelle A; e l'intersezione di due di questi complessi, fatta astrazione dalle k stelle e dalla congruenza (2, 6) che è costituita dalle corde della quartica base del fascio comune alle due reti, sarà una congruenza $(7 - k, 3)$. Una retta generica di questa congruenza apparterrà a tutto un fascio di quadriche del sistema Σ; e la curva base di questo fascio si comporrà, oltre che di essa, di una cubica avente quella retta per corda e passante per i punti $A_1, \ldots A_k$ (²). In particolare, se la retta considerata si suppone passante, ad es., per A_1, poichè la cubica corrispondente dovrà egualmente passare per A_1, si avrà un fascio contenente quel cono del sistema Σ (in generale individuato) che ha il vertice in A_1 stesso. Le rette della congruenza $(7 - k, 3)$ che passano per A_1 sono dunque generatrici di questo cono quadrico. Viceversa, ogni ge-

(¹) *Geometrie der Lage*, 3te Aufl., III, p. 140 e seg.

(²) Invece il fascio delle quadriche di Σ che passano per una retta generica ad es. della stella A_1 avrebbe una cubica base passante per i soli punti $A_2, \ldots A_k$.

neratrice di questo cono appartiene a quella congruenza; poichè è generatrice comune di un fascio di quadriche di Σ, la cui cubica base residua passa per tutti i punti A.

I punti $A_1, \ldots A_k$ *sono dunque punti singolari della congruenza* $(7-k, 3)$; *e da ciascuno di essi esce un cono quadrico di rette di questa congruenza.*

Il genere sezionale della congruenza, dovendo essere inferiore all'ordine (M., n° 21), sarà $\leq 6-k$; e sarà anzi precisamente $= 6-k$. Infatti la superficie F^{10} immagine della congruenza $(7, 3)$ primitiva nello spazio S_5 (ossia nella quadrica delle rette) si è ora spezzata in una F^{10-k} e in k piani incontranti questa secondo coniche; sicchè le sezioni iperpiane della F^{10-k} dovranno formare, insieme con k loro corde, curve (composte) di genere 6 (come le sezioni di F^{10}): e ciò richiede appunto che siano esse di genere $6-k$. Questo risulterà anche confermato dalle rappresentazioni piane che troveremo per le varie congruenze $(7-k, 3)$.

5. — Le dieci coppie di piani del sistema Σ dovranno contenere tutti i punti A; epperò questi si ripartiranno, per ciascuna coppia, fra i due piani che la compongono. Ogni punto A apparterrà a uno (e in generale un solo) piano di ciascuna coppia; dunque complessivamente a 10 dei 20 piani. Considerati poi due punti basi A_1, A_2 (se tanti almeno ve ne sono), si può domandare per quante coppie di piani, fra le dieci, questi punti apparterranno a uno stesso dei due piani. Ora queste coppie di piani sono quelle che contengono la retta $A_1 A_2$, e appartengono perciò alla rete che si stacca da Σ imponendo come base questa intera retta. Questa rete avrà in generale, fuori della retta stessa, quattro punti basi (fra i quali saranno compresi eventualmente gli altri punti A), e conterrà 4 coppie di piani. Fra i 20 piani ve ne sono dunque 4 che passano per la retta $A_1 A_2$. Infine, per ogni terna di punti basi $A_1 A_2 A_3$, una delle dieci coppie di piani sarà composta del piano $A_1 A_2 A_3$ e di un secondo piano (non passante in generale per alcuno di quei tre punti).

Ogni qual volta uno dei 20 piani passa per uno solo dei punti A, dall'inviluppo di 3ª classe ch'esso contiene nel caso generale, ossia nel caso della congruenza $(7, 3)$ (cfr. M., n° 82), si staccherà il fascio di rette A; e perciò questo piano conterrà soltanto un inviluppo quadrico di rette della congruenza $(7-k, 3)$. In un piano (fra i 20) il quale passi per i due punti basi A_1, A_2 (e non per altri), si staccheranno dall'inviluppo i due fasci A_1 e A_2; e resterà perciò soltanto un terzo fascio, più la retta $A_1 A_2$, che apparterrà ancora alla congruenza $(7-k, 3)$ come raggio isolato di questo piano singolare [1]. Infine il piano di tre punti basi $A_1 A_2 A_3$ non sarà piano singolare della congruenza, e conterrà di essa soltanto i tre raggi $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$.

6. — Supponiamo in particolare che il sistema lineare Σ abbia un solo punto base A. Avremo allora una congruenza (6, 3) di genere sezionale 5. Dei 20 piani che, a coppie, costituiscono quadriche degeneri di Σ, 10 (uno per ciascuna coppia) passeranno per A, e conterranno un inviluppo quadrico di rette della congruenza; mentre gli altri 10 (non passando in generale per A) conterranno un inviluppo di rette di 3ª classe. Il punto A sarà vertice di un cono quadrico appartenente alla congruenza.

La congruenza duale (3, 6) *conterrà dunque 10 coni cubici, 10 coni quadrici, e un inviluppo di rette di 2ª classe, il cui piano passerà per i vertici dei 10 coni quadrici.* Essa è un caso particolare della (3, 6) studiata in M., § 13. Essa può infatti rappresentarsi birazionalmente sul piano del suo inviluppo quadrico, facendo corrispondere a ogni suo raggio la propria traccia su questo piano; e alle rigate sue intersezioni coi complessi lineari corrisponderanno allora le ∞^5 curve di 7° ordine passanti doppiamente per i vertici dei 10 coni quadrici (dunque precisamente C^7 con 10 punti doppi; cfr. l. c.). Questi 10 punti hanno però una posizione particolare; *sono cioè i 10 punti doppi di una curva razionale di 6° ordine,* poichè è precisamente una tal curva quella che corrisponde, nella stessa rappresentazione piana, all'inviluppo quadrico di rette della congruenza. Infatti il sistema residuo di questa curva rispetto al sistema lineare di curve di 7° ordine rappresentante la congruenza deve essere costituito

---

[1] Che il raggio $A_1 A_2$ appartenga alla congruenza $(7-k, 3)$, si vede dal fatto che il cono singolare di questa congruenza uscente da A_1 appartiene al sistema lineare Σ, e deve quindi passare per tutti gli altri punti basi di questo sistema lineare.

(come si vede immediatamente) dalle (sole) rette del piano. Il piano dell'inviluppo quadrico è tangente alla superficie focale della congruenza (che è di 14° ordine) lungo la detta curva di 6° ordine, e l'incontra ulteriormente secondo la conica definita da quello stesso inviluppo quadrico.

7. — Il sistema lineare Σ abbia ora due punti basi A_1, A_2; esso darà origine a una congruenza (5, 3) di genere sezionale 4. Delle 10 coppie di piani contenute in Σ, quattro si comporranno di un piano passante per la retta $A_1 A_2$ e di un altro piano non passante (in generale) nè per A_1 nè per A_2; e le altre sei si comporranno di piani passanti l'uno per A_1 e l'altro per A_2. Perciò, dei 20 piani, 4 conterranno inviluppi di 3ª classe appartenenti alla nostra congruenza; altri 4 conterranno un fascio di rette, più il raggio isolato $A_1 A_2$ — sicchè questi 4 apparterranno ad un fascio, il fascio di asse $A_1 A_2$ —; e i rimanenti 12 conterranno inviluppi quadrici di rette. Ciascuno dei 4 fasci avrà un raggio a comune con 3 degli inviluppi cubici (essendo escluso quello il cui piano va accoppiato al piano del fascio stesso per formare una quadrica di Σ). Dai punti A_1 e A_2 esciranno coni quadrici di rette della congruenza, aventi a comune la generatrice $A_1 A_2$.

La congruenza duale (3, 5) *conterrà dunque 4 coni cubici di genere uno; 4 fasci di raggi contenuti rispett. nelle facce del tetraedro determinato dai vertici dei coni cubici, e aventi i centri in linea retta; 2 inviluppi quadrici, e 12 coni quadrici i cui vertici si ripartiranno a 6 a 6 fra i piani dei due inviluppi.* Inoltre, la retta che contiene i centri dei 4 fasci di raggi sarà in pari tempo l'intersezione dei piani dei due inviluppi quadrici. Questa congruenza è un caso particolare della (3, 5) considerata in M., § 12 (n° 76), e sarà perciò contenuta in un complesso tetraedrale. Essa risulta già rappresentata birazionalmente sul piano di uno qualunque dei due inviluppi quadrici, in modo che alle rigate sue intersezioni coi complessi lineari corrispondono le curve di 6° ordine aventi a comune 6 punti doppi (vertici di coni quadrici della congruenza) e 4 punti semplici (centri dei fasci di raggi). Ma questi ultimi punti staranno sopra una retta, ed esisterà altresì una curva di 5° ordine (immagine dell'inviluppo quadrico contenuto nel piano rappresentativo) la quale nei 10 punti basi ha le stesse multiplicità delle sestiche anzidette.

Questa congruenza è *cremoniana* (e tali saranno anche tutte le successive); essa può generarsi mediante due piani — che qui sono quelli dei due inviluppi quadrici — in corrispondenza cremoniana del 5° ordine con 6 punti fondamentali doppi, colla condizione però che sulla retta intersezione dei due piani vi siano *quattro punti uniti*. Con ciò appunto la congruenza, che sarebbe in generale di ordine $5 + 2 = 7$ (e di classe 5), discenderà al 3° ordine.

8. — Supponiamo ora che il sistema Σ abbia tre punti basi A_1, A_2, A_3. Troveremo una congruenza (4, 3) di genere sezionale 3, contenente un inviluppo di rette di 3ª classe (in quel piano che insieme ad $A_1 A_2 A_3$ forma una quadrica di Σ); 9 inviluppi quadrici, in altrettanti piani passanti a tre a tre per uno (solo) dei punti A_i; 9 fasci di rette, in piani passanti a tre a tre per le rette $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$; e 3 tre coni quadrici, di vertici A_1, A_2, A_3.

Questa congruenza si può rappresentare birazionalmente sul piano π del suo inviluppo di 3ª classe, facendo corrispondere a ogni raggio di essa il punto che ne è traccia. Alle rigate intersezioni della congruenza coi complessi lineari corrisponderanno le ∞^5 curve di 4° ordine passanti per i centri dei 9 fasci di rette della congruenza (centri che sono tutti contenuti nel piano π). E poichè ciascuno dei 9 fasci ha un raggio a comune con due dei tre coni A_1, A_2, A_3, si può concludere ancora che quei 9 punti basi del sistema di quartiche si distribuiranno in tre terne, le quali staranno a due a due sopra tre coniche (tracce rispett. dei coni quadrici A_1, A_2, A_3). I 9 inviluppi quadrici avranno per immagini le rette che uniscono a due a due i punti di ogni singola terna.

Questa congruenza (4, 3) fu già incontrata dal signor Montesano nella Memoria: *Su di un complesso di rette di terzo grado* (Mem. dell'Acc. di Bologna, ser. V, t. III; n° 9) come una particolare congruenza contenuta nel complesso cubico delle generatrici di una rete di quadriche. Questa rete può essere una qualunque di quelle contenute nel sistema Σ. Dal modo in cui il signor Montesano definisce tale congruenza si conclude facilmente ch'essa coincide con quella a cui noi qui siamo giunti; e possiamo anche aggiungere ch'essa starà sempre non in uno solo, ma in ∞^3 complessi cubici del tipo indicato (corrispondentemente alle ∞^3 reti contenute in Σ). Dalla rete di quadriche considerata dal signor MONTESANO si assurge al sistema lineare ∞^3 Σ che contiene quella rete, aggiungendovi la quadrica spezzata nei due piani π e $A_1 A_2 A_3$ (il secondo dei quali sarebbe il $B_6 B_7 B_8$ del signor MONTESANO).

La congruenza duale (3, 4) *conterrà pertanto:*

Un cono cubico di genere uno (P);

TRE *inviluppi quadrici, aventi a due a due una retta a comune, e contenuti in piani* (λ, μ, ν) *non passanti per* P;

NOVE *coni quadrici, coi vertici contenuti a tre a tre nei piani* λ, μ, ν (ad es. L_1, L_2, L_3 nel piano $\lambda, \ldots$) *e aventi ciascuno una generatrice a comune col cono cubico* P;

NOVE *fasci di raggi, aventi i centri disposti a terne sulle rette intersezioni dei piani* λ, μ, ν *a due a due, e i piani passanti tutti per* P, *e ciascuno ancora per i vertici di due dei coni quadrici.* Ad es. i tre fasci aventi i centri sull'intersezione $\mu\nu$ staranno rispett. nei tre piani PL_1L_2, PL_2L_3, PL_3L_1; e analogamente per gli altri.

Le rappresentazioni immediate che si hanno di questa congruenza sui piani dei suoi inviluppi quadrici sono di ordine più elevato di quella veduta poc'anzi per la congruenza duale.

Questa congruenza è un caso particolare della (3, 4) incontrata in M., § 11 (1), come pure di quella, già particolare, incontrata in questa stessa Nota al n° 2. *Essa è contenuta in tre complessi tetraedrali*, aventi per tetraedri fondamentali rispettivamente $PL_1 L_2 L_3$ e gli altri due analoghi; l'intersezione residua di due di questi complessi è sempre la stella P (2).

9. — Passiamo al caso di quattro punti basi A_1, A_2, A_3, A_4 (che supporremo non stiano in un piano); caso che conduce a una congruenza (3, 3) di genere sezionale 2. Ciascuna faccia del

(1) V. anche la mia Memoria cit. degli " Annali di Matem. ", n° 16.

(2) Però l'intersezione *generale* di due complessi tetraedrali aventi a comune un vertice del tetraedro fondamentale è una congruenza (3, 4) contenente soltanto 6 coni e 2 inviluppi quadrici, e non contenuta in un terzo complesso tetraedrale.

tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$, congiunta a un certo piano $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ passante pel vertice opposto — e supporremo che sia α_i il piano passante per A_i —, costituirà allora una coppia di piani di Σ; e ciascuna delle altre 6 coppie di piani si comporrà di 2 piani passanti rispett. per due spigoli opposti di quel tetraedro. Questi 12 piani conterranno ciascuno un fascio di rette della congruenza (3, 3); i piani α_i conterranno inviluppi quadrici di rette; i punti A_i saranno vertici di coni quadrici appartenenti alla congruenza. *Si ha dunque una congruenza* (3, 3) *di genere sezionale due, la quale, oltre ai soliti 12 fasci di rette* (M., n° 65), *contiene 4 coni quadrici e 4 inviluppi piani di 2ª classe,* disposti in tal guisa che i piani di questi ultimi formano un tetraedro circoscritto a quello dei vertici dei quattro coni. I 12 fasci di rette si distribuiscono in 6 coppie tali che per ciascuna coppia i due centri stanno sopra una retta $\alpha_i \alpha_h$ e i due piani passano per la retta corrispondente $A_k A_l$ (essendo *ihkl* una permutazione dei 4 indici 1, 2, 3, 4).

Questa congruenza determina fra i piani α_i a due a due delle corrispondenze cremoniane di 3° ordine aventi i punti A_i come punti fondamentali doppi. Essa riferisce quindi proiettivamente fra loro i quattro fasci di raggi $A_i(\alpha_i)$: le rette della congruenza che si appoggiano ai singoli raggi di uno di questi fasci formeranno (astrazion fatta dal cono A_i e dall'inviluppo α_i) le ∞^1 rigate quadriche della congruenza (M., n° 65); e queste stesse rigate avranno per direttrici anche i raggi degli altri tre fasci $A_i(\alpha_i)$ rispett. omologhi ai primi nell'anzidetta proiettività. *Quattro raggi omologhi dei 4 fasci* $A_i(\alpha_i)$ *sono dunque direttrici di una stessa rigata quadrica.*

La congruenza potrà pertanto generarsi con *tre fasci proiettivi di complessi lineari speciali* (ossia fasci di rette) (1), ad es., $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, $A_3(\alpha_3)$; ma vi dovrà essere anche un quarto fascio $A_4(\alpha_4)$ nelle stesse condizioni dei precedenti e sostituibile a uno qualunque di essi nella generazione della congruenza (2).

(1) Roccella: *Sugli enti geometrici dello spazio di rette...* " Piazza Armerina „, 1882; Hirst: *Sur la congruence Roccella...* " Rend. di Palermo „, I, p. 64. V. anche la mia Memoria degli Annali di Matem., n° 12.

(2) Questa congruenza sarà dunque un caso particolare anche rispetto alle congruenze (3, 3) con 15 punti e 15 piani singolari considerate nei lavori cit. alla nota preced.

E perciò possono prendersi ancora ad arbitrio i primi tre fasci ma non più (almeno completamente) la proiettività fra di essi. Possiamo invece procedere così. Presi comunque i tre fasci di rette $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, $A_3(\alpha_3)$, si scelgano ancora ad arbitrio il punto A_4 e il cono singolare della congruenza uscente da questo punto, ossia un cono quadrico avente per generatrici $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$ (il che implica soltanto $3+2=5$ parametri, mentre la proiettività fra i tre fasci dipende da sei parametri). Allora le terne di raggi dei fasci $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, $A_3(\alpha_3)$ che si appoggiano alle singole generatrici del cono quadrico A_4 si corrisponderanno in una proiettività, e determineranno ∞^1 rigate quadriche costituenti una congruenza (3, 3) di genere sezionale due. In questa congruenza saranno certo contenuti 12 fasci di rette, tre coni quadrici di vertici A_1, A_2, A_3, tre inviluppi quadrici nei piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e, per costruzione, il cono A_4 dianzi considerato. Inoltre, se sopra una qualunque delle ∞^1 rigate quadriche contenute nella congruenza consideriamo la direttrice rettilinea uscente da A_4, vediamo che dalla rigata R^6 delle rette della congruenza che si appoggiano a questa direttrice si staccano quella stessa rigata quadrica e il cono A_4: resterà dunque un'altra rigata quadrica, tale però che da ogni punto della direttrice considerata ne escano due generatrici; e questa non potrà essere che un (quarto) inviluppo piano α_4. Nel piano di questo inviluppo staranno le direttrici uscenti da A_4 di tutte le ∞^1 rigate quadriche della congruenza. Ed è questo il modo più generale di costruire la congruenza (3, 3) di cui trattasi [1].

Questa congruenza (3, 3) *è contenuta in sei complessi tetraedrali;* potendo concepirsi come congruenza cremoniana di Hirst (n° 3) in altrettanti modi diversi, col combinare a due a due i 4 piani α_i. Essa fu anche considerata dal sig. Montesano nella sua Memoria cit. (n° 5).

Sopra uno qualunque dei piani α_i essa si rappresenta birazionalmente, in modo che alle rigate sue intersezioni coi complessi lineari corrispondono curve di 4° ordine aventi a comune un punto doppio (A_i) e 6 punti semplici. Questi ultimi non sono in posizione affatto generale; ma devono soddisfare a una con-

(1) Altre generazioni di questa congruenza mi sono state comunicate dal Dott. C. Carrone, il quale si propone di esporle in un prossimo suo lavoro.

dizione, che può esprimersi mediante l'eguaglianza di due certi birapporti.

10. — Se il sistema lineare Σ ha cinque punti basi (di cui mai quattro in un piano), la congruenza delle sue rette principali, astrazion fatta dalle cinque stelle aventi i centri in quei punti, è una congruenza $(2, 3)$ di genere sezionale uno e affatto generale, contenente cinque coni quadrici e 10 fasci di rette (e contenuta in *dieci* complessi tetraedrali).

Supponiamo infine che il sistema Σ si componga di tutte le ∞^3 quadriche che passano per 6 punti fissi. Allora un fascio di quadriche contenute in Σ e passanti per una retta la quale non appartenga ad alcuno dei punti basi dovrà avere come curva base residua la cubica individuata da quei 6 punti; e quella retta sarà perciò corda di questa cubica. La congruenza $(7 - k, 3)$ è dunque in questo caso $(k = 6)$ la congruenza $(1, 3)$ delle corde della cubica determinata dai 6 punti basi.

11. — Considerato un sistema lineare ∞^3 di quadriche affatto generale (e privo quindi di punti basi) come uno spazio S_3, la varietà ∞^2 dei coni di questo sistema appare come una superficie φ di 4° ordine con 10 punti doppi (dati dalle 10 coppie di piani del sistema), la quale è precisamente un *simmetroide* (1) (risultando la sua equazione dall'annullarsi di un determinante simmetrico di 4° ordine, ad elementi lineari nelle coordinate). Quei fasci contenuti nel sistema lineare ∞^3, la cui curva base si spezza in una retta (principale) e in una cubica avente questa retta per corda, saranno immagini delle *bitangenti* (tangenti doppie) del simmetroide. E potremo dire:

Ogni congruenza $(3, 7)$ *o* $(7, 3)$ *di genere sezionale 6 è riferibile birazionalmente alla congruenza* $(12, 28)$ *delle bitangenti di un simmetroide.* E poichè questo simmetroide è affatto generale, potremo aggiungere (M., n° 83): *La congruenza delle bitangenti di un simmetroide, considerata come varietà algebrica* ∞^2, *ha anch'essa il genere (geom^{co} = num^{co})* ZERO *e il bigenere* UNO.

Quando il sistema lineare ∞^3 considerato (Σ) ha un numero

(1) V. ad es.: SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes* (3te Aufl.), II, p. 468.

finito k (≤ 6) di punti basi A_i, ciascuno di questi punti è vertice di un cono contenuto in Σ, il quale (come si vede immediatamente) è un nuovo elemento doppio della varietà ∞^2 dei coni. Al simmetroide si sostituiscono dunque superficie di 4° ordine con $10 + k$ punti doppi; in particolare, per $k = 6$, una *superficie di Kummer*. E le diverse parti in cui si spezza la congruenza $(7, 3)$ delle rette principali del sistema Σ (per i valori successivi $k = 1, 2, \ldots 6$) corrisponderanno a quelle in cui si spezza la congruenza delle bitangenti di questa superficie del 4° ordine; in particolare alle k stelle A_i corrisponderanno congruenze di 2° ordine e classe $8 - k$ [1]. Per ulteriori dettagli in proposito si cfr. la *Geometrie der Lage* del sig. REYE (3te Aufl., III, §§ 17, 18).