Gino Fano

Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **51** (1901), p. 1–79

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1901_1>

NUOVE RICERCHE

SULLE

CONGRUENZE DI RETTE DEL 3° ORDINE

PRIVE DI LINEA SINGOLARE

MEMORIA

DI

GINO FANO

Approvata nell'Adunanza del 30 Dicembre 1900.

In questa Memoria mi propongo di esporre in modo completo le mie ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine, che risalgono in parte al 1894, e delle quali ho pubblicato già allora un breve sunto [1]. Avendo ripreso ora lo studio di quest'argomento, ho potuto fare anche qualche nuova ricerca, e semplificare alcune parti della trattazione primitiva.

La considerazione delle congruenze di rette come *superficie* contenute in una quadrica (M_4^2) non degenere dello spazio a cinque dimensioni (la quadrica *fondamentale* costituita dall'insieme di tutte le rette dello spazio ordinario [2]) riceverà in questa Memoria un'applicazione frequente, benchè non sistematica [3]. E i concetti fondamentali relativi alla rappresentazione delle congruenze di rette mediante superficie dello spazio S_5 si supporranno noti. Sovente ci occorrerà anche di considerare delle rigate come *curve* dello spazio S_5 o di uno spazio inferiore, e di applicare ad esse ragionamenti e risultati della *geometria sopra una curva algebrica* (ossia sopra un *ente algebrico semplicemente infinito*, chè tale è appunto la rigata, come varietà ∞^1 di rette). Dalla *geometria sopra una superficie algebrica*, della quale nel 1894 si cono-

---

(1) Cfr. la mia Nota: *Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XXIX.

(2) L'idea di considerare la geometria della retta come quella di una quadrica dello spazio S_5 si trova, in modo esplicito, nella Memoria del sig. Klein: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, " Math. Ann. ", Bd. 5, p. 261; ma si può farla risalire alla *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker, la classica Memoria che segnò le origini della geometria della retta.

(3) Uno studio sistematico di alcune congruenze di rette dal punto di vista accennato si trova nella mia Memoria: *Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni*, " Annali di Matem. ", s. 2ª, t. XXI; Memoria che avremo spesso occasione di ricordare in seguito.

sceva soltanto un minor numero di risultati (1), ma che in questi anni ha ricevuto un forte incremento, specialmente dagli importanti lavori dei signori Castelnuovo ed Enriques, prenderemo il teorema (per noi fondamentale) di cui faremo uso al n° 44, che cioè una superficie algebrica a sezioni di genere p e di ordine superiore a $2p-2$ è razionale o riferibile a una rigata (e qualche altra proprietà).

Non ho bisogno di ricordare ancora una volta quanto copiosa sia la letteratura che, dalla classica Memoria di Kummer (2) in poi, ha concorso alla determinazione di tutte le congruenze di rette del 1° e 2° ordine (già effettuata da Kummer, salvo qualche omissione) e allo studio delle proprietà principali di ciascuna di esse; mentre invece di congruenze del 3° ordine non furono studiati che alcuni casi particolari; p. e. la congruenza (3, 3) di Roccella (3), le congruenze cremoniane di Hirst (4), e le congruenze di classe ≤ 6 che i signori Segre e Castelnuovo ottennero come proiezioni di varietà cubiche di S_4 con un numero finito e ≥ 6 di punti doppi (5). La mia Nota cit. del 1894 ha portato tuttavia un primo contributo alla determinazione e classificazione di tutte le congruenze del 3° ordine, o almeno di quelle prive di linea singolare; risolvendo in particolare per queste ultime il problema della classe massima, già stato risolto da Kummer per le congruenze di 2° ordine. Questo stesso argomento io riprendo oggi, proponendomi di farne un'esposizione completa e più dettagliata. E la difficoltà dell'argomento (che niuno vorrà disconoscere) valga a scusare quei difetti che il lavoro non potrà a meno di presentare.

INDICE

(1) Contenuti in lavori di Clebsch, “ Compt. Rend. de l'Ac. d. S. „, 1868; Noether, “ Math. Ann. „, Bd. 8; Castelnuovo, “ Rend. Ist. Lomb. „, 1891, e nelle *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* del sig. Enriques, “ Mem. della R. Acc. di Torino „, s. II, t. XLIV; nonchè in lavori (che però avevano altro indirizzo) di alcuni geometri francesi, e specialmente dei sig. Picard e Humbert.

(2) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme...* “ Abhandl. der Berl. Akad. „, 1866, pp. 1-120.

(3) *Sugli enti geometrici dello spazio di rette...* (Piazza Armerina, 1882).

(4) “ Proc. of the Lond. Math. Soc. „, vol. 16°; “ Rend. di Palermo „, t. I, p. 64.

(5) Segre, “ Mem. della R. Acc. di Torino „, ser. 2a, t. XXXIX; Castelnuovo, “ Atti del R. Ist. Veneto „, ser. 6a, t. 5 e 6.

§ 1.

Considerazioni preliminari. *Punti e coni singolari della congruenza.*

1. — Nelle congruenze algebriche di rette si sogliono distinguere i tre caratteri seguenti:

1° *l'ordine* m, ossia il numero delle rette della congruenza che passano per un punto generico dello spazio;

2° la *classe* n, ossia il numero delle rette della congruenza che stanno in un piano generico;

3° il *rango* r, ossia il numero dei fasci determinati da coppie di rette della congruenza, i quali contengono una retta generica dello spazio.

Una congruenza di ordine m e di classe n si suole indicare col simbolo (m, n). Le congruenze che noi considereremo si supporranno sempre *irriducibili* (nel solito senso che ha questa parola per una varietà algebrica).

L'invariabilità dei tre caratteri considerati è dovuta al fatto che ciascuno di essi è il numero delle soluzioni di un certo sistema di equazioni algebriche. Ciascuno di questi caratteri potrà tuttavia divenire infinito per certi elementi (punti, piani, rette) particolari dello spazio. Questi elementi si diranno *singolari.*

Per un punto singolare della congruenza passerà una semplice infinità di raggi di questa, formanti un certo cono algebrico (cono *singolare*); e in un piano singolare sarà pure contenuta una semplice infinità di rette della congruenza, le quali formeranno un certo inviluppo; avvertendo tuttavia che al punto o piano singolare potrà anche appartenere un numero finito di raggi della congruenza, non contenuti nel cono o inviluppo anzidetto. Questi raggi, quando ve ne siano, li chiameremo *isolati* (sottintendendo: rispetto a quel punto o piano singolare).

Quando in una congruenza vi siano infiniti punti singolari (e non potrà esservene che una semplice infinità, tranne che nel caso del *piano rigato*), essi costituiranno una o più linee, le quali si diranno pure *singolari.*

In questa Memoria noi ci occuperemo delle *congruenze di rette del 3° ordine* (onde $m = 3$) *prive di linea singolare,* aventi cioè soltanto un numero finito di punti singolari. Con ciò rimane escluso che vi siano piani singolari contenenti un inviluppo di rette della congruenza di classe ≥ 3; perchè se no l'intersezione di questo piano con ogni altro raggio della congruenza sarebbe un punto singolare. Vi potranno essere bensì dei piani contenenti un inviluppo quadrico di rette della congruenza, ma (come si riconosce facilmente [1]) soltanto in numero finito; fatta eccezione per

---

[1] Supposto infatti che vi siano nella congruenza ∞^1 inviluppi quadrici di rette, i piani di questi inviluppi non potranno formare un fascio, perchè se no sarebbero singolari tutti i punti della retta asse di questo fascio; e non un inviluppo quadrico — ossia il sistema dei piani tangenti a un cono quadrico —, e nemmeno un inviluppo di una classe qualsiasi $k \geq 2$ contenuto in una stella, perchè la congruenza risultante sarebbe di ordine $2k$, e perciò in nessun caso di 3° ordine. Potranno

la congruenza $(3, 1)$ duale del sistema delle corde di una cubica sghemba, la quale contiene ∞^1 inviluppi di 2ª classe, appartenenti ai piani osculatori di una certa cubica. E non vi potrà essere nemmeno una semplice infinità di fasci di rette, perchè se no sarebbe singolare la linea luogo dei centri di questi fasci. Eccettuata dunque la sola $(3, 1)$ di cui sopra, *le nostre congruenze avranno tutte un numero finito di punti* (coni) *e di piani* (inviluppi) *singolari.*

2. — Un quarto carattere delle congruenze di rette (non però indipendente dai primi tre) che conviene anche considerare è il *genere* p della rigata (di ordine $m + n$) secondo cui la data congruenza (m, n) è incontrata da un complesso lineare generico; in particolare dunque (se questo complesso è *speciale*) della rigata costituita dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta generica dello spazio. In questa rigata, concepita come una curva di genere p, i gruppi di generatrici appartenenti ai singoli punti ovvero ai singoli piani della direttrice rettilinea formano rispettivamente due serie lineari, una g^1_m e una g^1_n, aventi r coppie a comune. Avremo perciò, per una nota formola che si trova già in Riemann (¹):

$$p = (m - 1)(n - 1) - r.$$

Per una congruenza del 3° ordine dunque:

$$p = 2(n - 1) - r \quad ; \quad r = 2(n - 1) - p.$$

Rappresentata la congruenza con una superficie dello spazio S_5 (contenuta nella quadrica delle rette), il carattere p sarebbe il genere delle curve sezioni iperpiane di questa superficie. Lo chiameremo perciò (con denominazione suggeritami dal signor Segre) *genere sezionale* della congruenza (e della superficie che ne è immagine).

3. — È noto che ogni congruenza (m, n) priva di linea singolare ammette una *superficie focale*, la quale è in pari tempo luogo dei punti per cui due degli m raggi della congruenza che ne escono sono venuti a coincidere, e inviluppo dei piani per cui coincidono due degli n raggi ivi contenuti. Indicando sempre con r il rango della congruenza, l'ordine μ e la classe ν della superficie focale sono dati rispettivamente dalle formole:

$$\mu = 2n(m - 1) - 2r \qquad \nu = 2m(n - 1) - 2r; \tag{1}$$

---

però quei piani formare un inviluppo (non conico) Σ di 3ª classe, purchè i tre raggi della congruenza uscenti da un punto qualunque dello spazio siano le mutue intersezioni dei tre piani di Σ passanti per tale punto. E questa congruenza si comporrà allora delle intersezioni dei piani di Σ (che sono tutti osculatori a una stessa cubica) a due a due. Infine, quegli stessi piani non potranno nemmeno formare un inviluppo non conico di classe > 3, perchè la congruenza risultante sarebbe certo di ordine > 3.

(¹) *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 7, "Journal de Crelle", Bd. 54; Ges. Werke, 2te Aufl., p. 114. Cfr. anche Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, "Atti della R. Acc. di Torino", vol. XXIV, n° 4.

ovvero, introducendo il genere sezionale p:

$$(1') \qquad \mu = 2(m + p - 1) \qquad \nu = 2(n + p - 1).$$

In particolare, per una congruenza di 3° ordine sarà $\mu = 2p + 4$.

Sarà bene ricordare brevemente in qual modo si stabilisca la prima delle formole (1). Nel fascio di piani che ha per asse una retta generica l dello spazio si considerino come corrispondenti due piani i quali proiettino rette della congruenza uscenti da un medesimo punto di r. Nasce così in quel fascio una corrispondenza involutoria d'indice $n(m-1)$, la quale avrà $2n(m-1)$ elementi uniti (o coincidenze). Ora queste coincidenze possono verificarsi in due modi diversi: o perchè coincidono le due rette della congruenza che si sono proiettate da l, e questo avviene tante volte quant'è l'ordine μ della superficie focale; oppure senza che quelle rette coincidano, e ciò avverrà r volte; tante cioè quante sono le coppie di rette della congruenza che stanno in un fascio con l. Queste ultime coincidenze, per una nota proprietà delle corrispondenze involutorie, devono contarsi due volte; e si avrà perciò $\mu + 2r = 2n(m-1)$, da cui segue tosto la prima delle (1).

4. — Ogni raggio della congruenza ha due *fuochi* (o *punti focali*), in generale distinti, nei quali esso è tangente alla superficie focale [1], e per ciascuno dei quali punti esso conta come due fra gli m raggi della congruenza che ne escono; e ha pure due *piani focali*, che si definiscono in modo duale, e sono precisamente i piani tangenti alla superficie focale nei due fuochi dello stesso raggio. Sotto altra forma, si suole anche dire che ogni raggio della congruenza incontra nei propri fuochi altri due raggi di questa, ad esso infinitamente vicini. Se F e F′ sono i due fuochi di un raggio g, e g_1 e g' sono i due raggi infinitamente vicini a questo che l'incontrano rispettivamente in F e F′, i piani (completamente determinati) $\overline{gg_1}$ e $\overline{gg'}$ saranno tangenti alla superficie focale rispett. in F′ e in F; e si diranno pure piani focali “ corrispondenti ” al fuoco F il primo, e al fuoco F′ il secondo.

Se S è un punto singolare della congruenza, ogni raggio g del cono singolare uscente da questo punto ha in S uno dei propri fuochi. Il punto S apparterrà dunque alla superficie focale, e ne sarà anzi (come vedremo fra poco) punto multiplo. Il piano focale di g corrispondente al fuoco S sarà il piano tangente lungo g stesso al cono singolare della congruenza; e questo piano sarà tangente anche alla superficie focale nel secondo fuoco F del raggio g. Viceversa, il piano focale corrispondente al fuoco F sarà tangente in S alla superficie focale; e ai fuochi F dei singoli raggi del cono singolare considerato corrisponderanno i diversi piani tangenti in S alla superficie focale, ossia i piani inviluppanti il cono tangente in S a quest'ultima superficie.

---

[1] Vi sono anche delle congruenze nelle quali ogni raggio ha i propri fuochi coincidenti; e queste congruenze, se prive di linea singolare, si compongono di *tangenti principali* (ossia tripunte) della rispettiva superficie focale. Questo caso s'intenderà escluso in seguito; ma le congruenze di 3° ordine composte di tangenti tripunte di una superficie formeranno oggetto, spero fra non molto, di un altro lavoro.

Vediamo così che fra i due coni (algebrici) di vertice S, il cono singolare della congruenza e il cono ivi tangente alla superficie focale, si può stabilire una corrispondenza biunivoca (poichè i piani tangenti al secondo cono sono determinati piani focali dei raggi del primo). *Se i due coni sono irriducibili, essi avranno dunque lo stesso genere;* e se si spezzano, sussisterà questa proprietà per due loro parti le quali si corrispondano biunivocamente nel modo indicato: ma potrà anche darsi che a tutta una parte dell'un cono corrisponda un unico elemento (eccezionale) dell'altro.

Se poi dal punto singolare S esce anche qualche raggio isolato della congruenza, questo non avrà in generale il punto S per fuoco.

5. — Considerato un cono singolare Σ_h di un certo ordine h, e una retta generica l passante pel vertice S di questo cono, è chiaro che la rigata di ordine $m+n$ delle rette della congruenza che si appoggiano a l (o, come diremo brevemente, *la rigata* R^{m+n} *di direttrice* l) si spezzerà nel cono Σ_h e in una rigata residua di ordine $m+n-h$ avente ancora l come direttrice m^{pla}. Applicando a questa retta l e alla rigata residua R^{m+n-h} lo stesso ragionamento che ci ha servito al n° 3 per determinare l'ordine μ della superficie focale, si trova che il numero di quelle intersezioni di l con questa superficie che non cadono in S è $=2(n-h)(m-1)-2r'$, essendo r' $(\leq r)$ il numero delle coppie di rette della congruenza che, uscendo da un punto di l diverso da S, stanno altresì in un piano per l.

Senza conoscere pertanto il valore di r', possiamo tuttavia affermare che l'anzidetto numero di intersezioni è pari (e $<\mu$, poichè S appartiene certamente alla superficie focale). E perciò anche:

Ogni punto singolare di una congruenza è multiplo di ordine pari (≥ 2) *per la superficie focale.*

6. — Supponiamo ora che per il punto singolare S passi anche un numero finito γ (≥ 0) di raggi isolati della congruenza. Allora, considerata una retta generica l passante per S e la relativa rigata residua R^{m+n-h}, le m generatrici di questa uscenti da S saranno date da quei γ raggi isolati e da $m-\gamma$ generatrici (variabili) del cono Σ_h. Il piano che da l proietta una qualunque g di queste ultime $m-\gamma$ rette sarà un piano focale della retta stessa; perchè delle n rette della congruenza che stanno in un piano generico per l, e delle quali h sono generatrici del cono Σ_h e $n-h$ della rigata R^{m+n-h}, due (una delle prime e una delle seconde) coincidono con g. E il piano considerato sarà precisamente il piano focale corrispondente a quel fuoco di g che è distinto (in generale) da S; perchè se no esso dovrebbe sempre toccare il cono Σ_h lungo g stessa. Ciò si vede d'altronde anche direttamente [1]. Il ragionamento potendosi invertire, si conclude che gli $m-\gamma$ piani che proiettano da l le generatrici comuni al cono Σ_h e alla rigata R^{m+n-h} sono precisamente i piani tangenti che da l stessa possono condursi al cono tangente in S alla superficie focale. Quest'ultimo cono sarà dunque di classe $m-\gamma$, vale a dire:

---

[1] Cfr. Sturm, *Die Grundgebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, Bd. II, p. 11, n° 295.

Se da un punto singolare di una congruenza di ordine m *escono* $\gamma\ (\geq 0)$ *raggi isolati di questa congruenza, il cono tangente in quel punto alla superficie focale sarà di classe* m — γ.

Applicando quanto precede al caso di una congruenza di 3° ordine abbiamo:

In un punto singolare di una congruenza di 3° ordine, dal quale non esca alcun raggio isolato di questa, la superficie focale della congruenza ammetterà un cono tangente di 3ª classe (1). Invece *in un punto singolare per il quale passi* UN *raggio isolato della congruenza, questo cono tangente sarà di 2ª classe.* Più di un raggio isolato non potrà escire (come vedremo) da nessun punto singolare.

7. — Consideriamo di nuovo, ma limitandoci d'ora in poi al solo caso di una congruenza $(3, n)$, un punto singolare S vertice di un cono singolare di ordine h della congruenza, e una retta generica l passante per questo punto; di modo che la rigata R^{n+3} di direttrice l si spezzerà in quel cono e in una rigata residua di ordine $n + 3 - h$.

Indichiamo con $2i$ l'ordine di multiplicità (certo pari; cfr. n° 5) del punto S per la superficie focale della congruenza. Poichè questa superficie è di ordine $2p + 4$, la retta l l'incontrerà, oltre che in S, in altri $2p + 4 - 2i$ punti. Ora nella rigata residua R^{n+3-h} di direttrice l, e il cui genere indicheremo con p', le terne di generatrici uscenti dai singoli punti di l formano una serie lineare g_3^1, la quale deve contenere $2(p' + 2)$ terne con un elemento doppio. E queste terne di rette devono essere tutte quelle e quelle soltanto che escono dalle intersezioni di l colla superficie focale (escluso, in generale, il punto singolare S); sarà dunque:

$$2p' + 4 = 2p + 4 - 2i$$

da cui: $p' = p - i$. Poichè questo ragionamento è anche invertibile, così si può concludere:

In una congruenza $(3, n)$ *di genere sezionale* p *le rette che si appoggiano a una retta generica passante per un punto singolare il quale sia punto* $2i^{\text{plo}}$ *per la superficie focale formano, astrazion fatta dal cono singolare, una rigata residua di genere* $p - i$, e inversamente.

8. — Indichiamo con Γ il cono di raggi della congruenza uscente dal punto singolare S. Ogni raggio a di questo cono ha per piano focale corrispondente a quel suo fuoco che è distinto in generale da S un piano α dell'inviluppo conico Γ_1, di classe ≤ 3 (cfr. n° 6), che è tangente in S alla superficie focale. Fra i coni Γ e Γ_1 nasce così una corrispondenza biunivoca (n° 4). Se dunque il cono Γ non contiene nessuna parte che sia eccezionale rispetto a questa corrispondenza (ossia nessuna parte luogo di raggi a aventi un medesimo piano focale α), esso — sia pure irri-

(1) Questo cono, se irriducibile ed ellittico, sarebbe dunque di 6° ordine, con nove generatrici cuspidali. E quando fosse razionale, sarebbe invece (in generale) di 4° ordine, con tre generatrici cuspidali. Di qui si può già intravedere quali saranno le multiplicità dei diversi punti singolari per la superficie focale della congruenza; ma conviene determinarle per altra via, benchè indiretta, per non escludere i casi in cui quei coni si spezzino.

ducibile o riducibile — si rappresenterà certo birazionalmente, elemento per elemento, sopra un inviluppo di classe ≤ 3 (trascurando l'eventuale parte eccezionale di Γ_1), e il suo genere (1) sarà perciò certo ≤ 1 (2). E questa proprietà sussisterà altresì quando il cono Γ contenga qualche parte eccezionale; poichè, se vi sono ∞^1 raggi a aventi un medesimo piano focale α — e questi raggi non potranno formare evidentemente che il fascio $S(\alpha)$ —, la parte residua Γ' di Γ avrà con questo fascio un solo elemento a comune (o al più due, se α è elemento doppio di Γ_1; nel qual caso però Γ' sarebbe certo di genere zero). Pertanto, l'aggiunta del fascio eccezionale lascerà invariato il genere del cono di raggi; o tutt'al più, se era zero, lo farà diventare $= 1$.

Diremo perciò: *I coni singolari di una congruenza* $(3, n)$, *siano pure irriducibili o riducibili, sono tutti di genere zero oppure di genere uno* (e diremo anche brevemente *razionali* od *ellittici*, senza intendere esclusi i casi di riducibilità).

Consideriamo ora la rigata R^{n+3-h} formata dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta qualunque per S (astrazion fatta dal cono Γ). Questa rigata che è di genere $p - i$ se il punto S si suppone $2i^{\text{plo}}$ $(i \geq 1)$ per la superficie focale, insieme al cono Γ che è di genere *zero* od *uno* e col quale essa ha al più *tre* generatrici a comune, dovrà formare una R^{n+3} complessiva di genere p. Si può anche aggiungere che, se il cono Γ e la rigata R^{n+3-h} hanno meno di tre generatrici a comune, vale a dire se dal punto S esce qualche raggio isolato della congruenza, l'inviluppo di piani Γ_1 dianzi considerato sarà di classe ≤ 2 (nº 6), e il cono Γ sarà perciò certo di genere zero.

Pertanto, se da S escissero due raggi isolati della congruenza, si avrebbero una rigata di genere $p - i$ e un cono di genere *zero* con una sola generatrice a comune, e formanti insieme una rigata di genere p. Dovrebbe dunque essere (3) $(p - i) + 0 + 1 - 1 = p$, ossia $i = 0$; il che va escluso. *Da nessun punto singolare potrà dunque escire più di un raggio isolato della congruenza.*

Se vi è *un* raggio isolato, si ricava analogamente $i = 1$. *Un punto singolare dal cui vertice esca un raggio isolato della congruenza è sempre punto doppio per la superficie focale; e il cono singolare uscente da esso è sempre di genere zero.*

---

(1) Considerata una congruenza come una superficie, un cono singolare di essa (comunque riducibile) appare come una curva parziale del sistema lineare irriducibile ∞^5 formato dalle rigate R^{n+3} intersezioni della congruenza coi complessi lineari; e come tale esso ha un genere determinato, da valutarsi ad es. nel modo stabilito dal sig. ENRIQUES (*Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, " Mem. della Soc. It. d. Scienze ", s. III, t. X, § 16). Questo genere nel caso attuale sarà ≤ 1, perchè se no il cono non potrebbe rappresentarsi che sopra un inviluppo di classe > 3.

(2) Ogni congruenza di rette può riferirsi in una corrispondenza razionale (1, 2) alla sua superficie focale, luogo o inviluppo, facendo corrispondere a ogni raggio di essa i propri fuochi o piani focali. Per un cono singolare di raggi, il sistema dei piani focali corrispondenti si spezza in due parti distinte, ciascuna delle quali risulta riferita biunivocamente a quel cono; ed è appunto una di queste corrispondenze biunivoche che noi ora consideriamo.

(3) La formola $\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$ (NOETHER: *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, " Acta Math. ", Bd. 8; ENRIQUES, l. c.) si può applicare ad ogni curva totale riducibile contenuta in un sistema lineare irriducibile di genere π sopra una superficie, purchè si tenga conto debitamente nel valutare π_1 e π_2 (come noi abbiamo appunto supposto nella nota (1) qui sopra) dei *ponti di connessione* sulla superficie di Riemann immagine della curva riducibile. (Superfluo l'osservare che l'i di questa formola, che indica il numero dei punti comuni alle due parti della curva riducibile, non ha nulla a che fare col carattere che nel nostro ragionamento trovasi indicato colla stessa lettera).

Supposto infine che da S non escano raggi isolati della congruenza, si ricava $i=2$ o $i=3$ secondo che il cono Γ è di genere *zero* o *uno*. Dunque: *Un punto singolare pel quale non passi nessun raggio isolato della congruenza sarà punto quadruplo o sestuplo della superficie focale, secondo che il cono di raggi della congruenza che ne esce è razionale od ellittico.*

9. — È bene aggiungere qualche avvertenza sul modo in cui questi risultati vanno interpretati.

È stato già osservato che, per poter applicare la formola $\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$ relativa al genere di una curva riducibile, bisogna valutare π_1 o π_2 in modo opportuno (valendosi ad es. dei *ponti di connessione*): quando noi affermiamo pertanto che *è ellittico ogni cono di raggi della congruenza il quale esca da un punto sestuplo della superficie focale*, intendiamo che *deve essere eguale a* 1 *il genere, debitamente valutato, di questo cono;* ma non escludiamo ad es. che il cono stesso possa essere razionale per il fatto di avere come generatrice doppia un raggio semplice della congruenza uscente da S. Quando ciò avvenga, si dovrà considerare questo raggio come sede di un ponte di connessione (semplice), il quale implicherà un aumento di un'unità nel genere virtuale del cono.

Un'opportuna interpretazione dei risultati precedenti è più che mai necessaria quando il punto S appartiene a un *raggio multiplo proprio* (*o di* 2ª *specie*) della congruenza (cfr. § seg.); a un raggio tale cioè, che le rigate R^{n+3} che lo contengono siano di genere $< p$. In questo caso, nel valutare il genere del cono, *si deve intendervi compreso anche quel raggio multiplo*, ossia la curva (o rigata) fondamentale propria del sistema lineare delle R^{n+3} rappresentata da quel raggio (1). Questi raggi multipli sono poi a lor volta, come vedremo (nº 15), rette multiple (doppie, quadruple, sestuple) per la superficie focale.

Diciamo infine qualche parola anche sul modo in cui va concepito un cono riducibile della congruenza. Supponiamo ad es. che l'inviluppo di piani Γ_1 di 3ª classe considerato al nº 8 si spezzi in un inviluppo quadrico Γ'_1 e in un fascio di piani Γ''_1 con due elementi α e β a comune; e, per fissare le idee, che a ciascuna di queste parti corrisponda biunivocamente (nel senso stabilito al nº 4) una certa parte (Γ', Γ'') del cono Γ della congruenza. Questi due coni Γ' e Γ'' saranno razionali, e avranno a comune i due raggi a e b della congruenza, completamente determinati, di cui α e β sono i piani focali corrispondenti al fuoco distinto (in generale) da S. Gli stessi coni Γ', Γ'' potranno avere a comune anche altre generatrici $c, d, \ldots$; ma una qualunque c di queste, secondo che la si considera come raggio dell'uno o dell'altro cono, avrà per piano focale corrispondente al proprio fuoco distinto da S due piani distinti γ' e γ'', appartenenti rispett. a Γ'_1 e Γ''_1. Pertanto, benchè c sia generatrice comune dei due coni Γ' e Γ'', non si può dire che questi, considerati come coni della congruenza, abbiano ivi a comune un raggio di questa; invece *la retta c è sostegno di due raggi della congruenza completamente distinti* (poichè ne sono distinti i piani

(1) E del cono così concepito si può ancora affermare che avrà il genere ≤ 1, perchè nel cono-inviluppo Γ_1 di vertice S (nº 8) sono già compresi i piani focali relativi al raggio multiplo.

focali γ' e γ''; come pure, in generale, gli altri due piani focali, dei quali l'uno è tangente lungo c a Γ' e l'altro a Γ''); e di questi due raggi uno appartiene al cono Γ' e l'altro al cono Γ''. La retta c sarà un *raggio doppio improprio* (*o di 1ª specie*) della congruenza, come verrà meglio chiarito nel § seg.

Il cono complessivo Γ si comporrà dunque di due coni razionali aventi *due soli elementi* (raggi) *a comune;* e potrà perciò appunto considerarsi come proveniente dallo spezzamento di un cono ellittico. Qualcosa di analogo potrebbe dirsi per ogni altro caso, anche se Γ contenesse una parte eccezionale rispetto alla corrispondenza con Γ_1.

§ 2.

Raggi multipli di una congruenza.
Genere sezionale delle congruenze (3, n) con raggi multipli.

10. — Può avvenire che una congruenza (m, n) contenga un raggio u tale che, fra le m o rispett. n rette di essa che appartengono a un punto generico di u o a un piano generico del fascio u, sempre almeno k (≥ 2) coincidano con u. Si dice allora che u è raggio k^{plo} o *multiplo di ordine* k della congruenza.

Concepita la congruenza come una superficie F (di ordine $m+n$) dello spazio di rette, e contenuta perciò in un S_5, si riconosce facilmente che ogni punto k^{plo} di questa superficie (ossia ogni punto nel quale coincidano almeno k delle $m+n$ intersezioni della superficie con un S_3 passante per esso) è immagine di un raggio k^{plo} della congruenza, e inversamente (almeno con una restrizione, che cioè il cono tangente alla F in quel punto non sia tutto contenuto nella M_4^2 fondamentale) (1).

Per una congruenza (m, n) avente soltanto un numero finito di punti e di piani singolari, la multiplicità di un raggio qualunque non può superare il minore dei due numeri m e n. In particolare, le congruenze del 3° ordine prive di linea singolare

(1) Infatti, se un punto P è k^{plo} per la F^{m+n}, considerando l'S_3 determinato da un piano della quadrica fondamentale passante per questo punto e da un piano di sistema opposto non passante per P, ma incontrante il primo in una retta, e tali che nessuno dei due abbia infiniti punti a comune con F^{m+n}, dovranno coincidere in P almeno k delle $m+n$ intersezioni di F con questo S_3; e quindi, poichè il secondo piano non passa per P, almeno k delle m o n sue intersezioni col primo piano: vale a dire a P corrisponderà un raggio k^{plo} della congruenza. Viceversa, se sussiste questa proprietà, cadranno in P almeno k delle intersezioni di F con ogni S_3 determinato nel modo anzidetto. Se dunque P fosse per la F un punto multiplo di ordine $<k$, tutti quegli S_3 dovrebbero contenere almeno una generatrice del cono tangente in P alla F. Ora, se questo cono non è contenuto nella quadrica fondamentale, si può certo prendere un piano di questa, e quindi un S_3 per questo piano, i quali non contengano nessuna generatrice del detto cono; ma nel caso opposto ciò non è più possibile, sicchè allora P risulterebbe per F punto multiplo di ordine $<k$. Sarebbe questo il caso in cui il raggio considerato della congruenza incontrasse tutti quelli ad esso infinitamente vicini. La restrizione posta si può togliere però se $k=2$; poichè, anche se il piano tangente a F in un suo punto semplice P stesse sulla quadrica fondamentale, i piani di questa passanti per P e dello stesso sistema del primo non avrebbero con quel piano altri punti a comune. Perciò, senza restrizioni: *Ogni raggio doppio di una congruenza ha per immagine sulla superficie corrispondente un punto doppio di questa.*

potranno avere soltanto dei raggi doppi e tripli. Questi raggi, quando ve ne siano, noi li supporremo sempre *in numero finito*.

11. Si abbia in una congruenza (m, n) un cono singolare Σ_h, e sia u una sua generatrice doppia (supposta esistente).

Può avvenire che u sia raggio semplice della congruenza; allora ad esso corrisponderà un punto semplice P della superficie immagine F^{m+n}; la curva (piana) corrispondente al cono Σ_h starà nel piano tangente in P a questa superficie, e questo piano starà a sua volta sulla M_4^2 fondamentale. Questo caso si presenterà precisamente quando, nel valutare il genere del cono Σ_h, debba ritenersi u come sede di un ponte di connessione (cfr. n° 9); e in particolare ogni qual volta, essendo riducibile il cono Σ_h, sia u un raggio comune a due parti di esso. Queste generatrici u s'intenderanno escluse nel seguito; epperò *in ogni altro caso al raggio u corrisponderà un punto doppio della superficie immagine della congruenza, e u stesso sarà raggio doppio della congruenza.*

Ora il cono di raggi della congruenza uscente da un punto singolare S si compone di tangenti condotte da questo punto alla superficie focale; e una sua generatrice doppia (colle esclusioni da noi stabilite) è una retta passante per S e tangente alla superficie focale, in generale, in due altri punti. In altri termini, quel cono è tangente alla superficie focale della congruenza lungo una certa linea γ (intersezione o parte dell'intersezione di questa superficie colla prima polare di S); e le sue generatrici doppie provengono da punti doppi apparenti rispetto ad S (o da tangenti, se sono generatrici cuspidali) della curva γ.

Fermiamoci intanto, per maggior chiarezza, sul caso di una retta u passante per S e tangente alla superficie focale in due altri punti distinti F e F_1 (dunque generatrice doppia non cuspidale del cono singolare). Vi è allora un raggio della congruenza, completamente determinato, che ha i propri fuochi in F e in S, e per piano focale corrispondente al fuoco S ha il piano tangente in F alla superficie focale. E vi è un secondo raggio della congruenza che ha per fuochi S e F_1, e per piano focale corrispondente al fuoco S ha il piano tangente alla superficie focale in F_1 (1). Solo che questi due raggi della congruenza, completamente determinati e distinti l'uno dall'altro, hanno entrambi per sostegno la stessa retta u; e così risulta chiaro che, fra gli m raggi della congruenza uscenti da un punto qualunque di u, *vi sono quei due*. Ed è perciò appunto che u è *raggio doppio* della congruenza (2).

Se poi u è generatrice cuspidale del cono singolare, essa sarà una tangente della linea γ considerata di sopra (e avrà colla superficie focale un contatto almeno tripunto: v. però n° 15). Se F e F_1 sono i due punti ora consecutivi che essa ha a

---

(1) I rimanenti piani focali di questi due raggi sono due distinti piani tangenti alla superficie focale in S.

(2) Nessuna modificazione si avrebbe se i punti F e F_1 coincidessero in un secondo punto singolare della congruenza. Il punto S, come fuoco dell'uno e dell'altro dei due raggi sovrapposti, avrebbe per piani focali rispett. corrispondenti due diversi dei piani tangenti alla superficie focale nel suo punto multiplo $F \equiv F_1$.

comune con γ, saranno SF e SF_1 due raggi semplici della congruenza che hanno ancora per sostegno comune la u, ma sono ora infinitamente vicini (nella congruenza), perchè così avviene dei fuochi e piani focali dell'uno rispetto agli analoghi elementi dell'altro. Ad es., i piani focali corrispondenti al fuoco comune S sono i piani tangenti alla superficie focale nei due punti consecutivi F e F_1, e gli altri due piani focali sono due piani tangenti consecutivi del cono tangente in S alla superficie focale.

La natura stessa di questo raggio doppio u (risultante da due raggi semplici che hanno una medesima retta per sostegno) permette anche di rendersi ragione fin d'ora di una proprietà che soltanto in seguito (n° 26) riceverà fondamento e significato preciso; vale a dire che, per un punto qualunque di u, è completamente indeterminato, nel fascio u, il piano dei due raggi sovrapposti che ne escono [1]. Diremo perciò:

Ogni generatrice doppia di un cono singolare della congruenza (colle esclusioni stabilite) *è anche raggio doppio della congruenza e precisamente in guisa tale che ogni piano che la contiene può considerarsi come piano dei due raggi uscenti da un punto qualunque di essa e ad essa sovrapposti.*

Viceversa, ogni raggio doppio di una congruenza, il quale risulti dalla sovrapposizione di due raggi semplici e non isolati uscenti da un dato punto singolare, è generatrice doppia del cono singolare uscente da questo punto.

Considerazioni analoghe possono farsi pei raggi tripli o di multiplicità superiore.

12. — I raggi doppi (o tripli, ecc.) della congruenza dianzi considerati risultano, come si è detto, da due o più raggi semplici aventi una medesima retta u per sostegno, e che non sono in generale posizioni consecutive di un raggio variabile entro la congruenza, ma possono tuttavia essere tali. A questi raggi corrisponderanno pertanto sulla superficie F immagine della congruenza dei punti multipli risultanti anche, per così dire, dalla materiale sovrapposizione di due o più punti semplici della stessa superficie. Da ciò possiamo trarre due conseguenze importanti:

1° Questi punti multipli — e diciamo in generale k^{pli} — sono k-planari; o più esattamente, il cono tangente alla superficie F in ciascuno di essi si spezza in k piani; senza escludere però che tali piani possano coincidere in parte o tutti. Questi piani saranno tangenti rispett. a altrettante falde della superficie passanti per il punto multiplo considerato;

2° Gli stessi punti multipli sono anche *impropri,* ossia una sezione iperpiana generica di F passante per uno di questi punti ha lo stesso genere p di una sezione affatto arbitraria (e non genere inferiore). Anche questa proprietà è conseguenza immediata del fatto che si tratta di punti i quali sono immagini di un certo numero di punti semplici dell'ente algebrico ∞^2 che si considera.

I raggi multipli dianzi considerati li diremo *di prima specie;* e, più generalmente, diremo " di prima specie " ogni raggio multiplo al quale corrisponda sulla superficie

[1] Secondo l'espressione adottata dal sig. STURM (Op. cit., cfr. in part. i n[i] 56, 289, 316), potremo dire che, per ogni punto di u, è indeterminato (nel fascio u) uno dei piani corrispondenti a questo punto nel " *sistema nullo superiore* " (" *höheres Nullsystem* ") determinato dalla congruenza.

immagine della congruenza un punto multiplo *improprio*. A tutti questi raggi multipli spetta, come vedremo in seguito, la proprietà caratteristica che, per ogni loro punto, sono completamente indeterminati (nel fascio corrispondente) i piani dei raggi sovrapposti che ne escono. Gli altri raggi multipli, corrispondenti a punti multipli propri della superficie F, li diremo di 2ª specie.

13. — Consideriamo invece sulla superficie F immagine di una congruenza (m, n) un punto doppio *conico* P (supposto esistente); questo sarà certamente un punto multiplo *proprio*. In questo punto la F ammetterà un cono tangente di 2° ordine Γ, irriducibile e perciò contenuto in uno spazio S_3. Questo S_3 segherà la quadrica (M_4^2) fondamentale anche in un cono quadrico Γ_1, che supponiamo (e che sarà pure in generale) irriducibile e distinto da Γ. Al punto P corrisponderà nella congruenza un raggio v, doppio per questa. Consideriamo ora sulla M_4^2 fondamentale un piano qualsiasi π_1 dell'uno o dell'altro sistema, il quale si muova su di essa in modo determinato, tendendo come posizione limite a un piano generico π (dello stesso suo sistema) passante per P. Allora due delle m o n intersezioni di π_1 colla superficie F, e siano P_1 e P_2, tenderanno a P come posizione limite; e le rette PP_1 e PP_2 tenderanno a coincidere con certe due tangenti della superficie F nel punto P, ossia con certe due generatrici t_1 e t_2 del cono Γ. Consideriamo ancora la retta P_1P_2. Essa è intersezione del piano π_1, che ha come posizione limite π, col piano $P\,P_1\,P_2$, che ha come limite il piano t_1t_2; dunque i due piani (certo distinti) π e t_1t_2 avranno a comune una retta, che sarà posizione limite di P_1P_2; e che, appartenendo (perchè contenuta nel piano t_1t_2) allo spazio S_3 del cono Γ, sarà l'intersezione di questo S_3 col piano π, ossia una determinata generatrice q del cono Γ_1. Anzi, non essendo contenuta in π che una sola generatrice di quest'ultimo cono, se ne conclude che la stessa retta q sarà sempre la posizione limite di P_1P_2, in qualunque modo si scelga (nello stesso sistema primitivo) il piano π_1 sulla M_4^2, e in qualunque modo lo si faccia poi avvicinare a π. Interpretando questo per la nostra congruenza, abbiamo:

Facendo tendere un punto o piano qualsiasi ad un punto o piano determinato appartenente al raggio doppio v, *due fra i raggi della congruenza appartenenti a quel punto o piano tendono a coincidere con* v, *ma in guisa tale che il fascio da essi determinato tende ad una posizione limite completamente individuata, e che dipende soltanto dal punto o piano di* v *considerato.*

In altri termini: La punteggiata v e il fascio di piani v possono riferirsi in una corrispondenza biunivoca e quindi proiettiva — e che è precisamente la proiettività $\mathfrak{L}$ determinata dalla congruenza lineare speciale avente per immagine il cono Γ_1 —, la quale gode della proprietà seguente: Ogni qual volta un punto qualsiasi si avvicina indefinitamente a un punto determinato A di v, due fra gli m raggi della congruenza uscenti da quel punto si avvicinano indefinitamente fra loro e a v in modo che il loro piano tende al piano α omologo di A nella proiettività $\mathfrak{L}$. E viceversa, ogni qual volta un piano arbitrario si fa tendere alla posizione α del fascio v, due delle n rette della congruenza in esso contenute tendono a coincidere con v, ma in modo che il loro punto d'incontro ha per posizione limite A.

Sotto altra forma ancora, si può dire che per ogni punto A del raggio v i due raggi coincidenti (con v) che ne escono stanno in un piano α completamente determinato; e inversamente, in ogni piano α del fascio v due degli n raggi della congruenza coincidono con v stesso, ma avendo un punto d'incontro A determinato. La corrispondenza fra i punti A e i piani α è proiettiva.

È questo appunto il tipo generale di un *raggio doppio di 2ª specie*. Se un punto S di questo raggio doppio è punto singolare della congruenza, il cono di raggi uscente da esso conterrà bensì (o almeno potrà contenere) il raggio v, ma come generatrice semplice; poichè in un piano generico passante per v questo raggio conta bensì come due fra gli n raggi della congruenza, ma il punto d'incontro di questi due non è in generale S. Soltanto si può affermare che il piano corrispondente a S nella proiettività $\mathfrak{T}$ sarà il piano tangente al cono singolare lungo la generatrice v [1].

Un esempio di un tal raggio doppio lo si ha nella congruenza (2, 2) intersezione di un complesso tetraedrale con un complesso lineare non speciale contenente uno degli spigoli del tetraedro fondamentale [2]. Questo spigolo è appunto quel raggio doppio: esso contiene quattro punti singolari della congruenza, ciascuno dei quali è centro di un fascio di rette di questa.

14. — Le stesse considerazioni precedenti possono applicarsi a un punto triplo della superficie F, nel quale questa abbia un cono tangente irriducibile e contenuto in uno spazio S_3; quindi certo ogni qual volta questo cono (cubico) sia di genere uno (e un tal punto sarà anche certamente punto multiplo *proprio*). Si ha allora, nella congruenza di cui F è immagine, un raggio triplo v (e di 2ª specie), i cui punti e piani risultano anche riferiti fra loro in una corrispondenza proiettiva $\mathfrak{T}$. Quando un punto arbitrario si fa tendere a una posizione determinata A sopra v, tre dei raggi della congruenza uscenti da esso tendono a coincidere con v; e i piani determinati da questi tre raggi a due a due tendono a un medesimo piano del fascio v, che è il corrispondente di A nella proiettività $\mathfrak{T}$. E similmente per un piano il quale tenda a una posizione limite nel fascio v.

Di raggi tripli così fatti incontreremo alcuni esempi in seguito (§ 7). E raggi di multiplicità superiore non possono esistere nelle congruenze di cui noi dobbiamo occuparci.

Il sig. Sturm (op. cit., nⁱ 376, 401) chiama i nostri raggi doppi di 1ª specie " *nothwendige Doppelstrahlen* ", e quelli di 2ª specie " *mögliche Doppelstrahlen* ", corrispondentemente al fatto che una congruenza generale $(2, n)$ priva di linea singolare ha sempre (se $n > 3$) un numero determinato di raggi doppi della prima categoria, e non ne ha nessuno della seconda; ma esistono tuttavia congruenze particolari (di classe ≤ 6, e se $= 6$ di 2ª specie) contenenti anche uno o più raggi doppi del se-

---

[1] Tutto ciò che abbiamo detto sussiste egualmente se il cono Γ tangente in P alla superficie F si spezza in una coppia di piani contenuta in un S_3, purchè rimanga irriducibile il cono Γ_1 intersezione di questo S_3 colla M_4^2 fondamentale. È noto infatti che in S_5 anche un punto doppio biplanare di una superficie può essere proprio, e lo è se i due piani tangenti stanno in un S_3 e i due intorni del punto hanno, fuori di questo punto, un punto semplice a comune. Se poi il cono Γ_1 si spezza a sua volta in due piani, non sembra potersi affermare nulla con sicurezza: certo però dovrà presentarsi questo caso quando il punto P fosse biplanare e improprio, coi piani tangenti contenuti in un S_3.

[2] Sturm, Op. cit., II, p. 196, n° 402. E basterebbe anche prendere un qualsiasi complesso quadratico avente un raggio doppio, e un complesso lineare contenente quest'ultimo raggio.

condo tipo. Lo stesso avviene pure, fino a un certo punto, per le congruenze del 3° ordine; ma per queste la presenza di raggi tripli di 2ª specie può influire sul *genere* della congruenza, considerata come superficie (o varietà ∞^2), e quindi su altre proprietà di essa.

15. — Le due specie di raggi multipli che abbiamo incontrate si distinguono anche nel loro comportamento rispetto alla superficie focale della congruenza.

Un raggio doppio u di prima specie non cuspidale non appartiene alla superficie focale della congruenza (1). Infatti, applicando il ragionamento del n° 3 a una retta l incontrante questo raggio u, il piano lu appare soltanto come uno degli r piani che contengono una coppia di rette della congruenza formanti fascio con l, ed è perciò una delle coincidenze che non conducono a intersezioni di l colla superficie focale. D'altronde il punto lu non è nemmeno un punto per il quale due fra i raggi della congruenza che ne escono siano infinitamente vicini.

Invece, *un raggio doppio di prima specie cuspidale appartiene alla superficie focale*, perchè i due raggi sovrapposti uscenti da un suo punto qualunque sono infinitamente vicini (come raggi della congruenza). Un punto generico di un tal raggio è punto semplice della superficie focale; e questa è ivi toccata da un piano determinato passante pel raggio medesimo (2).

Infine, *un raggio doppio di seconda specie appartiene pure alla superficie focale* (poichè i due raggi della congruenza uscenti da un punto qualunque di esso e ad esso sovrapposti sono infinitamente vicini entro la congruenza), *e ne è anzi in generale retta doppia* (3). Ciò può vedersi nel modo seguente. Se l è una retta qualunque dello spazio incidente al raggio doppio di 2ª specie v, le rette della congruenza che si appoggiano a l formeranno una rigata di genere (non superiore, ed eguale in generale a) $p-1$, nella quale la serie lineare g^1_m dei gruppi di generatrici uscenti dai singoli punti di l conterrà $2(m+p-2)$ gruppi con elemento doppio. Tante dunque sono le intersezioni di l, fuori del punto lv, colla superficie focale (chè è di ordine $2\{m+p-1\}$): e le rimanenti due cadranno perciò in lv, c. s. v. d.

Queste osservazioni si estendono facilmente ai raggi tripli. In particolare, un raggio triplo di 2ª specie apparterrà non soltanto alla superficie focale della congruenza, ma anche alla sua curva cuspidale (luogo dei punti per cui coincidono tre dei raggi della congruenza che ne escono). E se le rigate R^{n+3} contenenti questo raggio sono di genere $p-i$, il raggio stesso sarà la retta $2i^{\text{pla}}$ per la superficie focale. Quanto ad i, esso avrà in generale (se non si aggiungono cioè singolarità ulteriori) il valore 2 o il valore 3, secondo che al raggio considerato corrisponde sulla superficie immagine della congruenza un punto triplo *apparente*, oppure *non apparente*.

(1) STURM, Op. cit., II, p. 52, n° 319. Sembra però che il sig. STURM non abbia avvertita l'eccezione presentata (anche per congruenze di 2° ordine) dai raggi cuspidali.

(2) Nelle congruenze $(3, n)$ di genere sezionale *uno* ottenute dai sig.ri SEGRE e CASTELNUOVO nelle loro Mem. cit. come proiezioni di varietà cubiche (M^3_3) dello spazio S_4, si vede chiaramente che, quando un raggio doppio diventa cuspidale, esso appartiene altresì al contorno apparente della M^3_3 considerata, e perciò appunto alla superficie focale della congruenza proiezione.

(3) STURM, Op. cit., II, p. 195, n° 401.

16. — Le rette di una congruenza $(3, n)$ che si appoggiano a una retta generica l dello spazio formano, come già più volte si è detto, una rigata R^{n+3} avente l per direttrice tripla. Se però la retta l appartiene alla congruenza, da ogni suo punto non esciranno che due generatrici variabili di quella rigata; e questa sarà perciò iperellittica. Se facciamo un altro passo, e supponiamo che l sia un raggio doppio della congruenza, da ogni punto di essa escirà una sola generatrice variabile della rigata R^{n+3}, e questa sarà perciò razionale. Infine, se l è raggio triplo della congruenza, ogni suo punto dal quale esca un altro raggio di questa sarà necessariamente un punto singolare. La rigata R^{n+3} delle rette della congruenza che si appoggiano a un raggio triplo (supposto esistente) dovrà dunque spezzarsi in due o più coni singolari (due almeno, non potendovi essere coni di ordine $> n$). E dai vertici di questi coni non potranno nemmeno escire raggi isolati della congruenza.

Un raggio triplo di una congruenza $(3, n)$ *deve dunque contenere almeno due punti singolari di questa.* E si riconosce anche facilmente che un raggio triplo di 1ª specie, dovendo essere pure triplo per ciascuno dei coni singolari uscenti da punti di esso (nⁱ 11-12), non può nemmeno contenere più di due punti singolari. Supposto infatti che ne contenga un certo numero j, dai quali escano coni singolari degli ordini rispett. $h_1, h_2, \dots h_j$, si avrà la relazione:

$$h_1 + h_2 + \dots + h_j \equiv \Sigma h = n + 3.$$

E poichè un piano generico passante per il raggio triplo deve contenere, all'infuori di questo, altri $n - 3$ raggi della congruenza; e questi non possono risultare che dalle $h_1 - 3$, $h_2 - 3, \dots$ generatrici secondo cui quel piano incontra ulteriormente i diversi coni; così dovrà anche essere:

$$\Sigma (h - 3) \equiv \Sigma h - 3j = n - 3.$$

E sottraendo la seconda relazione membro a membro dalla prima:

$$3j = 6 \qquad \text{ossia} \qquad j = 2.$$

Concludiamo perciò: *Un raggio triplo di prima specie di una congruenza* $(3, n)$ *deve sempre congiungere due punti singolari di questa, e non può contenere, all'infuori di questi due, altri punti singolari.*

Se esiste pertanto un raggio triplo u di prima specie, i due coni singolari a cui esso appartiene dovranno formare insieme una rigata riducibile R^{n+3}, il cui genere, valutato secondo la solita formola del genere di una curva riducibile (cfr. nº 8), dovrà risultare eguale al genere sezionale p della congruenza. Ora quei due coni hanno a comune soltanto le tre generatrici sovrapposte ad u; dunque, se p' e p'' sono i generi di tali coni, sarà precisamente $p = p' + p'' + 3 - 1 = p' + p'' + 2$. E poichè p' e p'' sono entrambi ≤ 1 (nº 8), così dovrà essere $p \leq 4$, vale a dire:

Il genere sezionale di una congruenza $(3, n)$ *contenente un raggio triplo di prima specie non può essere superiore a 4.*

Possiamo anzi affermare che il genere sezionale sarà $= 4$ ogni qual volta i due punti singolari che appartengono al raggio triplo siano entrambi vertici di coni ellittici della congruenza; sarà $=3$ se di questi coni uno è ellittico e l'altro razionale, e sarà $=2$ se i due coni sono entrambi razionali. In nessun caso esso sarà < 2.

Per un raggio triplo non appartenente alla superficie focale della congruenza (ossia risultante dalla sovrapposizione di tre raggi a due a due non infinitamente vicini) si potrebbe giungere allo stesso risultato anche con quest'altra osservazione; che cioè i due punti singolari appartenenti a quel raggio sono le sole intersezioni di questo raggio colla superficie focale (di ordine $2p+4$), e sono punti al più sestupli per tale superficie. Sarà dunque $2p+4 \leq 12$, e perciò $p \leq 4$.

17. — La stessa proprietà $p \leq 4$ sussiste anche nel caso in cui la congruenza, pur non contenendo raggi tripli, contenga tuttavia qualche raggio doppio (sempre di prima specie). Non possiamo asserire che anche un raggio doppio u di prima specie debba sempre contenere due punti singolari della congruenza; ma certo esso non può contenerne più di due. Supposto infatti che ne contenga un certo numero j, e che questi siano vertici di coni singolari degli ordini rispett. $h_1, h_2, \ldots h_j$ (essendo perciò $\Sigma h < n+3$), ne seguirà che un piano generico passante per u dovrà contenere, oltre alle generatrici sue intersezioni coi diversi coni, altre

$$(n-2) - \Sigma(h-2) = n - \Sigma h + 2(j-1)$$

rette della congruenza. E siccome queste rette, supposto che ve ne siano, saranno a lor volta generatrici di una rigata di ordine $n+3-\Sigma h$ (residua degli j coni rispetto alla R^{n+3} complessiva di direttrice u), così avremo in ogni caso:

$$n - \Sigma h + 2(j-1) \leq n + 3 - \Sigma h.$$

E di qui si ricava $2(j-1) \leq 3$, e quindi $j \leq 2$, c. s. v. d.

Bisognerà ora esaminare separatamente i tre casi di un raggio doppio u passante per due punti singolari, oppure per uno solo o per nessuno di tali punti.

Se il raggio u non appartiene alla superficie focale, si possono facilmente contare i piani tangenti che per esso possono condursi a quella superficie; ed eguagliandone poi il numero complessivo (tenuto conto anche delle rispettive multiplicità) alla classe $2(n+p-1)$ della superficie stessa, si ha una relazione dalla quale scompare n, e scompaiono pure gli ordini degli eventuali coni singolari contenenti il raggio u; sicchè si potrà ricavarne il valore di p. Ad es., se u non contiene punti singolari, ed è perciò tangente alla superficie focale in quattro punti distinti, vi saranno intanto, fra i piani tangenti alla superficie focale che passano per u, quelli che la toccano in questi quattro punti, da contarsi due volte ciascuno. Di più, nella solita R^{n+3} di direttrice u (ora razionale e irriducibile) i piani per u determineranno una serie lineare g^1_{n-2}, contenente $2(n-3)$ gruppi con un elemento doppio; e i piani di questi gruppi saranno precisamente quelli che passano per u e toccano la superficie focale in un punto fuori di u. Sarà dunque:

$$8 + 2(n-3) = 2(n+p-1)$$

da cui $p = 2$. E in modo analogo si potrebbe anche ragionare se u contenesse uno o due punti singolari. Ma, per comprendere anche il caso in cui u sia generatrice cuspidale, preferiamo considerare direttamente il genere della rigata R^{n+3} formata da tutte le rette della congruenza che si appoggiano a u.

Ora, se u contiene due punti singolari, la solita rigata R^{n+3} si spezza nei due coni corrispondenti, i quali avranno due generatrici (sovrapposte) a comune, e in una rigata razionale che con ciascuno di quei coni avrà a comune al più una generatrice. (E questa generatrice comune vi sarà precisamente ogni qual volta si tratti di un cono dal cui vertice non esca alcun raggio isolato della congruenza). Pertanto, se i due coni sono entrambi ellittici, si avrà:

$$p = (1 + 1 + 0) + (2 + 1 + 1) - 2 = 4;$$

e in ogni altro caso sarà $p < 4$.

Se u contiene un solo punto singolare, la rigata R^{n+3} si spezza nel cono uscente da questo punto e in una rigata residua razionale R_1. Queste due parti hanno a comune due generatrici sovrapposte a u (essendo u direttrice semplice e generatrice doppia della rigata R_1), e eventualmente anche un'altra generatrice uscente dal punto singolare sopra u (se da questo punto non esce nessun raggio isolato). Sarà dunque in ogni caso $p \leq 1 + 0 + 3 - 1$, ossia $p \leq 3$.

Infine, se u non contiene punti singolari, la rigata R^{n+3} è irriducibile e razionale; ma ciascuno dei due raggi (semplici per la congruenza) sovrapposti ad u è generatrice doppia di essa (senza che compaiano in generale altre singolarità); e questo fa sì che la rigata debba avere il genere inferiore di due unità al genere sezionale della congruenza (1). Sarà perciò $p = 2$ (cfr. anche sopra).

Concludiamo pertanto:

Il genere sezionale di una congruenza del 3° ordine avente qualche raggio doppio o triplo di prima specie non può essere superiore a 4. Ed è eguale a 4 sempre e solo quando ciascuno di questi raggi sia generatrice (doppia o tripla) comune a due coni ellittici della congruenza.

18. — *Anche una congruenza* $(3, n)$ *contenente un raggio triplo di 2ª specie è di genere sezionale* $p \leq 4$; e lo dimostriamo subito (benchè ciò non sia necessario in seguito) per rendere più semplici le considerazioni che dovremo fare al § 5.

Un raggio triplo di 2ª specie contiene in generale *sei* punti singolari (e certo non ne contiene di più). Esso è infatti (in generale) generatrice semplice dei coni a cui appartiene; e se questi coni sono in numero di j, lo stesso ragionamento del n° 16 conduce a stabilire le due relazioni:

$$\Sigma h = n + 3 \qquad\qquad \Sigma (h - 1) \equiv \Sigma h - j = n - 3$$

dalle quali si ricava appunto $j = 6$.

(1) In sostanza, si tratta di una curva dalla quale si sono staccate due componenti eccezionali (punti), e la cui parte residua ha, con ciascuna di quelle componenti, due punti a comune. Allora, se p è il genere della curva totale, sarà $p - 2$ il genere di questa parte residua.

Inoltre, se S è il vertice di uno di questi coni, le ∞^2 rigate R^{n+3-h} aventi per direttrici le rette passanti per S avranno a comune con quel cono una sola generatrice variabile (poichè le altre due loro generatrici uscenti da S coincideranno col raggio triplo della congruenza). E di qui si trae che i sei coni singolari sono tutti razionali.

Infine, il raggio triplo di 2ª specie (v) deve considerarsi come una curva fondamentale propria γ, di genere *zero* od *uno* (n° 8 bis), del sistema lineare Γ costituito, nella data congruenza, dalle rigate R^{n+3} intersezioni di quest'ultima coi complessi lineari. Il sistema residuo di γ rispetto a Γ si comporrà di curve γ_1 di un certo genere $p-i$ ($i=2, 3$; cfr. n° 15) incontranti γ in tre punti variabili. In particolare, alla rigata R^{n+3} di direttrice v, la quale è composta dei 6 coni che hanno il vertice sopra v e ha perciò v come retta sestupla, corrisponderà una curva γ_1 che conterrà ancora γ come parte, e si spezzerà precisamente in γ e in sei curve razionali (i sei coni) aventi ciascuna un punto a comune con γ (e non incontrantisi l'una coll'altra). Questa particolare curva γ_1 avrà dunque lo stesso genere (*zero* o *uno*) di γ; e sarà perciò $p-i=0$ oppure $=1$. In ogni caso sarà dunque $p \leq i+1$; e quindi, poichè $i \leq 3$, anche $p \leq 4$, c. s. v. d.

Anzi, poichè si ha precisamente $i=2$ o $i=3$ secondo che la curva fondamentale γ è (o almeno va computata come) di genere zero o uno, così nel primo caso sarà sempre $p=2$, e nel secondo caso $p=4$. E questo risulterà anche confermato in seguito.

§ 3.

Terne di raggi della congruenza contenute in un fascio. Multiplicità dei luoghi φ, (P), (l) *nei punti singolari.*

19. — Nelle nostre ricerche sulle congruenze del 3° ordine non ci siamo ancora domandati se i tre raggi della congruenza uscenti da un punto generico dello spazio possano o no stare sempre in un piano; e, quando ciò non avvenga per ogni punto, se lo stesso fatto possa verificarsi per punti particolari (all'infuori dei punti singolari).

Supponiamo che si abbia una congruenza $(3, n)$, priva di linea singolare, e tale che i tre raggi di essa uscenti da un punto qualunque dello spazio stiano in un piano. La classe n sia, se possibile, > 3. Allora gli n raggi della congruenza contenuti in un piano generico dovranno formare una configurazione tale, che per il punto d'incontro di due qualunque di essi ne passi anche un terzo. — Considerato poi un raggio generico g della congruenza, da ogni punto di esso dovranno escire altri due raggi di questa, contenuti in un piano per g; e in ogni piano per g dovranno stare altri $n-1$ raggi, che, distribuiti in coppie, incontreranno g in $\frac{n-1}{2}$ punti tutti variabili con quel piano (non potendovi essere sopra g punti singolari). Nasce così tra il fascio di piani di asse g e la punteggiata g una corrispondenza $\left[1, \frac{n-1}{2}\right]$; e vi saranno perciò $n-3$ piani passanti per g, pei quali due dei punti corrispondenti sono venuti a coincidere. Questi piani sono tutti piani focali, e anzi piani focali affatto generici. Ora, in ciascuno di questi piani sono infinitamente vicini due raggi h e k della congruenza, i quali si appoggiano a g senza formare fascio con esso; e allora dovranno essere infinitamente vicini anche i rimanenti (terzi) raggi dei fasci hg e kg. Ciò vuol dire che ogni piano tangente alla superficie focale dovrebbe contenere almeno due coppie di raggi infinitamente vicini, e dovrebbe perciò toccare quella superficie in almeno due punti (in generale distinti), il che non è possibile. Si deve dunque escludere l'ipotesi $n > 3$.

20. — Si abbia ora una congruenza (3, 3) tale che i tre raggi di essa appartenenti a un punto o piano arbitrario formino sempre fascio. Allora, se ai singoli punti di un raggio g della congruenza facciamo corrispondere i piani delle terne di raggi uscenti da essi (i quali piani passeranno tutti per g), verremo a stabilire fra la punteggiata g e il fascio di piani di asse g una corrispondenza algebrica e biunivoca, vale a dire una proiettività. Questa proiettività definirà una congruenza lineare speciale Γ, avente g come (unica) direttrice; e in questa congruenza sarà contenuta la rigata R^6 formata dalle rette della data congruenza (3, 3) che si appoggiano a g.

Pertanto, il complesso lineare che contiene la congruenza Γ e una nuova retta arbitraria (non incidente a g) della congruenza (3, 3) proposta, avrà a comune con quest'ultima congruenza una rigata di 6° ordine (già contenuta in Γ) e un'altra retta ancora; esso dovrà dunque contenerla per intero, vale a dire *la congruenza proposta sarà contenuta in un complesso lineare* (necessariamente *non speciale*, se la data congruenza non ha una linea singolare).

Ora, per un noto teorema di KLEIN (1), ogni congruenza di grado k (ossia di ordine e classe $= k$) contenuta in un complesso lineare non speciale è intersezione di questo complesso con un complesso di grado k. Concludiamo perciò:

Vi è una sola congruenza (3, n) *priva di linea singolare e tale che i tre raggi di essa uscenti da un punto qualunque stiano in un piano; e questa è la congruenza* (3, 3) *intersezione di un complesso lineare non speciale con un complesso cubico.*

Questa è altresì *l'unica congruenza* (3, n) *priva di linea singolare e contenuta in un complesso lineare.*

Questa congruenza, al pari di ogni altra contenuta in un complesso lineare, è di rango *zero*. Invero, il fascio determinato da due rette qualunque della congruenza fra loro incidenti deve appartenere tutto al complesso lineare in cui la congruenza è contenuta; e perciò una retta che non stia in questo complesso non potrà appartenere a nessuno di quei fasci. — Dalla formola generale del n° 2 segue pertanto che la detta congruenza (3, 3) avrà il genere sezionale *quattro*; il che può riconoscersi anche direttamente (2). Essa ha una superficie focale di 12° ordine e 12ª classe, con curva cuspidale di ordine 30 (3); e non è in generale rappresentabile sul piano (4).

(1) Cfr. la Nota: *Ueber einen liniengeometrischen Satz*, " Gött. Nachr. „, 1872; " Math. Ann. „, Bd. 22, p. 234.

(2) Infatti la superficie immagine di questa congruenza sarebbe una F^6 dello spazio S_4, intersezione di una quadrica e di una varietà cubica. Le sue sezioni iperpiane sono dunque sestiche di S_3, intersezioni di una quadrica e di una superficie del 3° ordine, e perciò (in generale) di genere 4. Cfr. anche la mia Mem. cit. negli Annali di Matem., n° 7.

(3) Voss: *Ueber Complexe und Congruenzen*, " Mathem. Ann. „, Bd. 9, p. 138; SCHUMACHER: *Classification der algebraischen Strahlensysteme*, " Mathem. Ann. „, Bd. 37, p. 124.

(4) Cfr. ancora la mia Mem. cit., n° 7.

21. — D'ora in poi faremo astrazione dalla congruenza (3, 3) contenuta in un complesso lineare; e supporremo perciò che nella nostra congruenza $(3, n)$ i tre raggi uscenti da un punto generico dello spazio non stiano in un piano.

Per queste congruenze si può dimostrare che i due caratteri r e p, legati dalla relazione $r + p = 2(n-1)$, soddisfano anche alle due diseguaglianze:

$$p \leq n - 1 \qquad r \geq n - 1$$

ciascuna delle quali è evidentemente conseguenza dell'altra.

Infatti la rigata R^{n+3} formata dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta arbitraria l può considerarsi come una curva C_p^{n+3} dello spazio S_4. Alle terne di generatrici di quella rigata uscenti dai singoli punti di l corrispondono sulla C_p^{n+3} i gruppi di punti di una serie lineare g_3^1; e dire che quelle terne di generatrici non stanno in generale in un fascio equivale a dire che i tre punti di un gruppo generico di questa g_3^1 non sono collineari. La curva C_p^{n+3} di S_4 è dunque *non speciale* (perchè, in caso contrario, questi gruppi dovrebbero appunto essere collineari) (¹); e sarà perciò $p \leq (n+3) - 4$, ossia $p \leq n - 1$, c. s. v. d.

22. — Se per una data congruenza del 3° ordine i tre raggi uscenti da un punto generico dello spazio non stanno in un piano, può avvenire tuttavia che stiano in un piano le terne di rette uscenti da punti particolari; e presumibilmente dai punti di una superficie, trattandosi di un'unica condizione imposta ai tre raggi. Noi possiamo domandarci pertanto se e quando ciò avvenga; quale sia il luogo dei punti (dato che ve ne siano) che godono della proprietà accennata, e in pari tempo quale sia l'inviluppo dei piani che contengono le terne di raggi uscenti da quei punti.

Questi due enti furono considerati per la prima volta da R. Schumacher nella sua Dissertazione: *Untersuchungen über das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe*... (München, 1885), e successivamente da lui stesso nella Memoria: *Classification der algebraischen Strahlensysteme* (Math. Ann., Bd. 37; p. 100 e seg.). In questa Memoria è dimostrato che, data una qualsiasi congruenza (m, n) di rango r tale che degli m raggi di essa uscenti da un punto generico dello spazio tre qualunque non stiano in un piano, vi è tuttavia una superficie (che l'A. chiama *Tripelfläche*) luogo di punti pei quali tre di quei raggi stanno in un piano; e l'ordine di questa superficie è dato dall'espressione:

$$(m-2)\left[r + \frac{(m-1)\,(m-3n)}{6}\right].$$

Scambiando in quest'espressione i due numeri m e n, si ha la classe dell'inviluppo formato dai piani delle stesse ∞^2 terne di raggi.

Quest'espressione può anche dedursi da una nota formola di *geometria sopra una curva algebrica.* Consideriamo infatti, nella congruenza (m, n), la solita rigata R^{m+n}

(¹) Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche,* "Atti della R. Acc. di Torino", vol. XXIV, n° 14.

avente una direttrice generica l; e questa si concepisca come una curva C_p^{m+n} dello spazio S_4, contenente una serie lineare g_m^1 in corrispondenza ai gruppi di m generatrici di quella rigata che escono dai singoli punti di l. Il numero (che noi appunto cerchiamo) di quelli fra questi gruppi che contengono tre rette di un fascio, sarà precisamente il numero dei gruppi della g_m^1 che contengono una terna di punti collineari. Ora, poichè gli ∞^1 gruppi di questa g_m^1 stanno nei piani di un cono quadrico, così il numero richiesto sarà dato dalla formola fondamentale del Sig. SEGRE relativa alle involuzioni sopra un ente algebrico ∞^1 (1):

$$z = \binom{m-1}{k}(n-k) - \binom{m}{k+1}\nu - \binom{m-2}{k-1}(p - m\pi)$$

nella quale si ponga $k = 2$ (poichè i gruppi della g_m^1 appartengono a piani); $\nu = 2$, $\pi = 0$ (poichè questi piani formano una varietà quadratica razionale); e si cambi inoltre m (ordine della curva) in $m+n$, e p in $(m-1)(n-1)-r$. Fatte queste sostituzioni e alcune riduzioni, si troverà:

$$z = (m-2)\left[r + \frac{(m-1)(m-3n)}{6}\right]$$

che è appunto l'espressione già data da SCHUMACHER (2).

23. — In particolare per una congruenza $(3, n)$ — facendo cioè $m = 3$ — ricaviamo:

Data una congruenza $(3, n)$ *di rango* r *e genere sezionale* p, *i punti dello spazio pei quali i tre raggi di essa che ne escono stanno in un piano formano una superficie* φ *di ordine* $r - n + 1 = n - p - 1$.

Ciò dimostra per altra via la diseguaglianza $p \leq n - 1$. E nel caso estremo $p = n - 1$ non vi sarà nessun punto non singolare dal quale escano tre raggi della congruenza contenuti in un piano.

Scambiando invece m e n nell'espressione di z, e facendo poi di nuovo $m = 3$,

---

(1) È questa la formola (4) a p. 61 della Memoria: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, " Annali di Matem. ", s. 2ª, t. 22. Vedi anche la nota dello stesso A.: *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*, " Rend. della R. Acc. dei Lincei ", 1887.

(2) Il numero z testè determinato e il suo duale (che si ottiene scambiando fra loro m e n), sommati insieme, danno il numero totale di quelle terne di generatrici della solita rigata R^{m+n} che appartengono ad un fascio; poichè queste tre generatrici, incontrando tutte la direttrice rettilinea l, devono appartenere o a uno stesso punto di l, o a uno stesso piano per l. La somma anzidetta $\left\{m-2\right\}\left\{r + \frac{(m-1)(m-3n)}{6}\right\} + \left\{n-2\right\}\left\{r + \frac{(n-1)(n-3m)}{6}\right\}$ deve dunque essere eguale al numero delle trisecanti della curva C_p^{m+n} dello spazio S_4, immagine di quella rigata. Quest'ultimo numero fu determinato per la prima volta dal sig. CASTELNUOVO (*Un'applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, " Rend. di Palermo ", vol. III, 1889), e ritrovato dal sig. TANTURRI (*Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica*, " Ann. di Matem. ", s. III, t. 4, p. 67 e seg.). Supposto che sia finito, esso vale $\binom{m+n-2}{3} - (m+n-4)p$. E infatti la somma precedente, quando in essa si ponga $r = (m-1)(n-1) - p$, si riduce con un breve calcolo a quest'ultima espressione.

ricaviamo: *I piani, per cui tre fra gli n raggi della data congruenza* $(3, n)$ *che vi sono contenuti passano per uno stesso punto, formano un inviluppo* ψ *di classe:*

$$(n-2)\left\{r+\frac{(n-1)(n-9)}{6}\right\}=(n-2)\left\{\frac{(n-1)(n+3)}{6}-p\right\}=\binom{n-1}{3}+(n-2)(n-p-1).$$

Per quest'ultimo risultato occorre però un'avvertenza.

Mentre da un punto, il quale non sia singolare per la data congruenza $(3, n)$, non possono escire più di tre raggi di questa congruenza, e quindi nemmeno più di tre raggi contenuti in un piano, non si può invece escludere che fra gli n raggi contenuti in un piano, anche non singolare, ve ne siano $h>3$ passanti per un medesimo punto (che sarà allora punto singolare), oppure anche vi siano due o più terne di raggi appartenenti ciascuna ad un fascio. In quest'ultimo caso il piano sarà doppio, o multiplo di un ordine corrispondente, per l'inviluppo ψ. E nel primo caso, poichè con h raggi si possono formare $\binom{h}{3}$ terne distinte, il piano avrà per l'inviluppo ψ la multiplicità $\binom{h}{3}$. Epperò: *Il vertice di ogni cono singolare di ordine* $h \geq 3$ *della data congruenza si stacca dall'inviluppo* ψ (come inviluppo ∞^2 di piani di prima classe) *colla multiplicità* $\binom{h}{3}$.

Un'altra osservazione che importa fare è la seguente. *Se la congruenza ha qualche raggio doppio di prima specie, questi raggi apparterranno tutti alla superficie* φ. Infatti la curva C_p^{n+3}, immagine della rigata R^{n+3} avente per direttrice una retta l appoggiata a un raggio doppio, avrà (corrispondentemente a questo raggio) un punto doppio che conterà come due elementi nel gruppo della g_3^1 che lo contiene; ed è noto che questo gruppo deve allora considerarsi come uno di quelli collineari (1). Ciò è anche giustificato dal fatto che, dei tre raggi uscenti da un punto di un tal raggio doppio, i due sovrapposti hanno un piano completamente indeterminato (cfr. n° 26), sicchè tutti tre potranno considerarsi come contenuti in un fascio.

Similmente, *i raggi tripli di prima specie sono rette doppie della superficie* φ. Per accertarcene, possiamo fare la considerazione seguente. La curva C_p^{n+3} di S_4, immagine della rigata R^{n+3} avente per direttrice una retta appoggiata al raggio triplo, ha in questo caso un punto triplo che costituisce da per sè un gruppo della g_3^1. Da questo punto triplo essa si proietta in una C_p^n di S_3, sulla quale i gruppi della g_3^1 stanno nei piani di un fascio; e quelli fra questi gruppi che sono collineari sono proiezioni di gruppi anche collineari della C_p^{n+3}. Ora, sulla C_p^n di S_3, applicando la stessa formola di poc'anzi, si trova che vi sono $n-p-3$ gruppi della g_3^1 costituiti da punti in linea retta; dunque sulla C_p^{n+3}, degli $n-p-1$ gruppi collineari del caso generale, *due* saranno assorbiti dal punto triplo; come appunto si voleva dimostrare.

I raggi doppi e tripli di seconda specie non appartengono alla superficie φ. Anche quest'ultimo ragionamento non è ad essi applicabile, perchè le rigate R^{n+3} contenenti questi raggi multipli sono di genere $<p$.

---

(1) Segre, Mem. cit., p. 58.

24. — Proponiamoci ora di determinare la multiplicità della superficie φ nei diversi punti singolari della congruenza.

Consideriamo un punto singolare S, il quale sia vertice di un cono di ordine h contenuto nella congruenza, e sia un punto $2i^{\text{plo}}$ della superficie focale. Se l è una retta generica passante per questo punto, le rette della congruenza appoggiate ad l formeranno, astrazion fatta da quel cono, una rigata di ordine $n+3-h$ e di genere $p-i$ (cfr. n° 7). Dalla stessa formola già applicata al n° 22 segue pertanto che vi saranno sopra l:

$$(n-h)-(p-i)-1=(n-p-1)-(h-i)$$

punti, distinti in generale da S, dai quali esciranno tre raggi della congruenza contenuti in un piano, e che apparterranno perciò alla superficie φ. E la multiplicità di questa superficie (che è di ordine $n-p-1$) nel punto S sarà perciò $h-i$.

Facendo ora successivamente $i=3, 2, 1$, ricaviamo (cfr. anche n. 8):

In un punto singolare vertice di un cono ellittico di ordine h (≥ 3) di raggi della congruenza, la superficie φ ha la multiplicità $h-3$. In particolare, la superficie φ non passerà per quei punti singolari che sono vertici di coni cubici di genere uno.

In un punto singolare dal quale esca un cono razionale di ordine h (≥ 2) di raggi della congruenza, e nessun raggio isolato di questa, la superficie φ avrà la multiplicità $h-2$. Per $h=2$ il punto singolare non apparterrà dunque alla superficie φ; e lo stesso avverrà pure se $h=1$ (¹).

Infine, *in un punto singolare della congruenza dal quale esca un cono razionale di ordine h (≥ 1) e anche un raggio isolato della stessa congruenza, la superficie φ avrà la multiplicità $h-1$* (²).

Osserviamo ancora che nel caso $p=n-1$, non esistendo la superficie φ, non potrà esservi nessun punto singolare pel quale sia $h>i$; ossia nessuno di quei punti che, quando esistessero, dovrebbero appartenere alla detta superficie. Dunque: *Una congruenza $(3, n)$ di genere sezionale $p=n-1$ non può contenere altri coni singolari, all'infuori di coni cubici di genere uno, coni quadrici pel cui vertice non passino raggi isolati della congruenza, e fasci di rette.* In particolare, non vi potranno essere coni

---

(¹) In questo caso, quando si abbia cioè un fascio di rette contenuto nella congruenza e dal cui centro S non escano altri raggi di questa, le rette incidenti a una direttrice generica l passante per S formeranno, astrazion fatta dal fascio, una rigata di ordine $n+2$ e genere $p-2$; sicchè sopra l vi saranno $n-p$ punti pei quali le tre generatrici di questa rigata che ne escono staranno in un fascio. Di questi, uno è evidentemente S medesimo; gli altri saranno le intersezioni di l colla superficie φ.

(²) Qualche avvertenza speciale va fatta per i coni i cui vertici S appartengono a un raggio triplo di 2ª specie v. Per una retta l uscente da un tal punto S la rigata R^{n+3-h} residua del cono singolare ha v come generatrice doppia; e di qui segue che, nella solita g_3^1 su di essa, la terna delle generatrici uscenti da S (fra le quali sta appunto la generatrice doppia, contando come due fra le tre) va computata come una di quelle contenute in un fascio. La multiplicità di φ nel punto S non sarà dunque soltanto $h-i$, ma $h-i+1$. Sotto altra forma, si può dire che il numero i deve qui computarsi come se fosse inferiore di un'unità al suo vero valore.

con generatrici multiple; e nemmeno coni quadrici dal cui vertice esca anche un raggio isolato della congruenza.

25. — Parliamo ora di alcune altre superficie, che si collegano allo studio delle congruenze di rette, e delle quali si vale continuamente anche il Sig. STURM (nell'opera già più volte cit.) per le congruenze di 2° ordine.

Data una qualsiasi congruenza (m, n) di rango r, e fissato nello spazio un punto arbitrario P, si può domandare quale sia il luogo dei punti tali che, fra le m rette della congruenza che ne escono, ve ne siano due il cui piano passi per P (1). Questo luogo è una superficie, che il Sig. STURM indica e noi pure indicheremo col simbolo (P); essa è di ordine $\frac{m(m-1)}{2}+r$ (2), avendo in P stesso un punto multiplo di ordine $\binom{m}{2}$, ed essendo incontrata da una retta generica passante per P in altri r punti. Le m rette della congruenza uscenti da P appartengono a questa superficie, e ne sono precisamente rette multiple di ordine $m-1$.

Nel caso di una congruenza di 3° ordine, questa superficie (P) sarà di ordine $r+3=2n-p+1$; avrà il punto P come triplo, e le tre rette della congruenza uscenti da P come rette doppie.

Volendo ora trovare la multiplicità delle superficie (P) nei punti singolari di una congruenza $(3, n)$, determineremo direttamente il numero delle intersezioni di una tal superficie con una retta generica dello spazio; numero che abbiamo detto testè essere $=r+3=2n-p+1$; e vedremo poi come si modifichi questo numero quando la retta considerata passa per uno dei punti singolari (3).

26. — Data una retta generica l, si domanda per quanti punti di essa passano coppie di rette della congruenza contenute in un piano per un punto arbitrario P. — Consideriamo la rigata R^{n+3} delle rette della congruenza incidenti a l, e seghiamola con un piano generico passante per P. Avremo una C_p^{n+3} piana, sulla quale le terne di rette della congruenza uscenti dai singoli punti di l segheranno i gruppi di una g_3^1; e il punto triplo che quella curva ha nell'intersezione del proprio piano con l costituirà di per sè un gruppo di questa serie lineare.

Il numero che noi cerchiamo è quello delle coppie di punti contenute in gruppi della g_3^1 e allineate su P, ossia la classe dell'inviluppo formato dalle rette che congiungono a due a due i punti di ogni singolo gruppo della g_3^1. Questo numero, che indicheremo con x, si determina con una semplicissima applicazione del principio di corrispondenza; considerando cioè come omologhi nel fascio di rette P due raggi che

(1) Sotto altra forma, sarebbe questo il luogo dei punti tali che uno dei piani ad essi corrispondenti nel sistema nullo superiore determinato dalla congruenza passi per P.

(2) STURM, Op. cit., II, p. 3, n° 289.

(3) Un'altra via, forse un po' più breve, consisterebbe nel determinare in quanti punti una (P) è incontrata dalla retta che congiunge un punto singolare S al punto P ad essa corrispondente, fuori ben inteso dei punti stessi S e P (il secondo dei quali è triplo per essa). Il numero di questi punti è quello delle coppie di raggi della congruenza uscenti da un punto non singolare della retta SP e formanti fascio con questa stessa retta; cioè il numero da noi indicato con r' al n° 5, e che ora, conoscendo la multiplicità di S per la superficie focale, potremmo facilmente determinare in ogni singolo caso.

proiettano punti di uno stesso gruppo della g_3^1 sulla C_p^{n+3}. Nasce così una corrispondenza involutoria d'indice $2(n+3)$, le cui coincidenze conducono a stabilire la relazione:

$$4(n+3) = 2x + y + y'$$

dove y è il numero $(= 2p + 4)$ dei gruppi della g_3^1 che contengono un elemento doppio [1], e y' è il numero di coincidenze assorbite da quei punti multipli della C_p^{n+3} che rappresentano due o tre punti di uno stesso gruppo della g_3^1. Nel nostro caso vi è soltanto un punto triplo che costituisce di per sè un gruppo della g_3^1, e assorbe perciò *sei* coincidenze; avremo quindi:

$$4(n+3) = 2x + (2p + 4) + 6$$

da cui $x = 2n - p + 1$. — Se però la retta l incontra un raggio doppio u di 1ª specie, la C_p^{n+3} piana avrà in corrispondenza un punto doppio, che rappresenterà due punti di uno stesso gruppo della g_3^1; la classe x diminuirebbe allora di un'unità, dal che si trae che delle $2n - p + 1$ intersezioni della retta l colla superficie (P) una cadrà nel punto lu. *I raggi doppi di 1ª specie della congruenza sono dunque contenuti* (*semplicemente*) *in tutte le superficie* (P); e similmente si vedrebbe che *i raggi tripli di 1ª specie sono rette triple delle superficie* (P). Sotto altra forma, ciò vuol dire che per un punto arbitrario di un raggio doppio o triplo di 1ª specie u è completamente indeterminato nel fascio u il piano dei due, o di due qualunque dei tre raggi sovrapposti che ne escono: ogni piano per u può considerarsi, rispetto a quel punto arbitrario, come piano di tali raggi (cfr. n. 10). — Non occorre avvertire che questo ragionamento non è applicabile ai raggi multipli di 2ª specie, risultando allora la C^{n+3} di genere $< p$.

27. — Consideriamo ora una retta l passante per un punto singolare S, il quale sia vertice di un cono di ordine h contenuto nella congruenza, e sia un punto $2i^{\text{plo}}$ per la superficie focale di questa. Il numero x_1 di quelle intersezioni di l con una (P) che cadono fuori di S si potrà determinare con un ragionamento analogo al precedente, cambiando soltanto l'ordine $n+3$ della C_p^{n+3} piana in $n+3-h$, e il numero $y = 2p + 4$ dei punti doppi della g_3^1 in $2p + 4 - 2i$ (poichè tante sono le intersezioni di l colla superficie focale, fuori di S). Avremo perciò la relazione:

$$4(n+3-h) = 2x_1 + (2p + 4 - 2i) + 6$$

dalla quale si ricava:

$$x_1 = (2n - p + 1) - (2h - i).$$

La superficie (P) avrà dunque nel punto S la multiplicità $2h - i$; vale a dire:

[1] Questi gruppi sono segati dalle terne di generatrici della rigata R^{n+3} che escono dalle intersezioni di l colla superficie focale. — Avvertiamo poi che la questione qui risoluta rientra in una notissima di geometria sopra una curva algebrica (v. la Mem. cit. del sig. Segre, pp. 57-58).

Le superficie (P) *hanno la multiplicità* $2h - 3$ *in ogni punto singolare il quale sia vertice di un cono ellittico di ordine* h *di raggi della congruenza; vi hanno invece la multiplicità* $2h - 2$ *se questo cono è razionale, senza però che da quel punto escano raggi isolati della congruenza; e hanno la multiplicità* $2h - 1$ *in ogni punto singolare dal quale esca un raggio isolato della congruenza.*

28. — Anche ad ogni retta l dello spazio si può collegare rispetto a una data congruenza (m, n) un certo luogo di punti, e precisamente una certa linea (l) (1). Indicheremo con questo simbolo la linea luogo dei punti dai quali escono coppie di raggi della congruenza contenute in un piano passante per la data retta l; in altri termini, la curva doppia della rigata costituita dalle rette della congruenza che si appoggiano ad l. Questa curva incontra la retta l in r punti (tanti precisamente, quant'è il rango della congruenza), e incontra ancora ogni piano per l in $\binom{n}{2}$ punti; essa è perciò di ordine $\binom{n}{2} + r$; dunque per $m = 3$, $r = 2n - p - 2$, di ordine:

$$\binom{n}{2} + 2n - p - 2 = \binom{n+2}{2} - p - 3 = \frac{(n-1)(n+4)}{2} - p.$$

Questa curva (per $m = 3$) avrà come punti tripli tutte le sue intersezioni colla superficie φ, perchè i tre raggi della congruenza uscenti da un tal punto (supposto non singolare) dovranno stare tutti nel piano passante per quel punto e per l, e determineranno perciò a due a due tre piani (coincidenti) passanti tutti per l. Questi stessi punti saranno pure tripli per la rigata R^{n+3} di cui la (l) è curva doppia. E ogni punto singolare vertice di un cono di ordine h sarà h^{plo} per la R^{n+3} e $\binom{h}{2}^{\text{plo}}$ per la curva (l).

§ 4.

Carattere t *di una congruenza.* *Espressione del genere numerico mediante i caratteri* n, p, t.

29. — Insieme ai due caratteri di una congruenza di rette che abbiamo considerati ai n^i 22-23 e che sono fra loro duali, l'ordine cioè della superficie φ e la classe dell'inviluppo ψ, occorre considerarne un terzo, duale di sè stesso, e meno facile a determinare: *il numero* t *delle terne di raggi della congruenza contenute in un fascio, e tali ancora che il centro di questo fascio appartenga a un piano assegnato, e il piano dello stesso fascio appartenga a una determinata stella.* Questo numero t è altresì l'ordine della curva luogo di quei punti P della superficie φ dai quali escono tre raggi della congruenza contenuti in un medesimo piano di una data stella A (curva che chiameremo brevemente la " C^t corrispondente al punto A "); e, dualmente, la classe della sviluppabile formata dai piani π che contengono una terna di raggi della congruenza formanti fascio intorno a un punto di un piano assegnato. Questa sviluppabile sarà naturalmente contenuta nell'inviluppo ∞^2 ψ.

---

(1) Sturm, Op. cit., II, p. 2, n° 289.

Questo carattere t fu anche considerato dal Sig. SCHUMACHER, il quale però si è limitato a determinarlo in qualche caso particolare, e a fissarne un confine superiore (Mem. cit., pag. 115), che per una congruenza di 3° ordine non è mai raggiunto (tranne che per $n=2$, $p=1$).

Ma nel caso di una congruenza di 3° ordine il numero t è legato al numero dei raggi multipli (doppi e tripli) di prima specie da una relazione che può stabilirsi facilmente.

30. — Cerchiamo come debba comporsi, nel caso di una congruenza di 3° ordine, l'intersezione della superficie φ con una (P) generica: intersezione che deve essere complessivamente di ordine $(n-p-1)(2n-p+1)$.

I punti della superficie φ godono della proprietà caratteristica che i tre raggi della congruenza che ne escono stanno in un piano. Per quei punti di essa che stanno in pari tempo sopra una data (P), il piano dei tre raggi, supposto determinato, dovrà dunque passare per il punto P corrispondente a questa (P); e il luogo di tali punti sarà la curva C^t (n. 29) corrispondente al punto P. Questa curva sarà anzi tripla per la superficie (P) considerata, perchè per ogni punto di essa i piani determinati dai tre raggi della congruenza a due a due (coincidono e) passano tutti per P.

All'infuori di questa curva, che conterà come parte di ordine $3t$ nell'intersezione complessiva, le due superficie φ e (P) non avranno a comune che i raggi doppi e tripli (di prima specie) della congruenza, dei quali i primi (cfr. n[i] 23, 26) saranno rette semplici di entrambe le superficie, mentre i secondi saranno doppi per φ e tripli per (P). Indicando pertanto con d il numero dei raggi doppi e con d_1 il numero dei raggi tripli (sempre di prima specie), avremo la relazione:

$$(1) \qquad 3t+d+6d_1=(n-p-1)(2n-p+1).$$

Conviene però osservare che, se vi sono raggi tripli u di prima specie, ciascuno di questi può considerarsi come parte della curva C^t corrispondente a un qualsiasi punto P (potendo assumersi come piano dei tre raggi sovrapposti uscenti da un punto qualunque di u il piano determinato dalla retta u, comune sostegno di quei raggi, e dal punto stesso P). Se perciò nell'ordine t di questa curva intendiamo già computati anche gli eventuali raggi tripli di prima specie della congruenza, potremo dare alla stessa relazione la forma più semplice:

$$(1') \qquad 3t+d=(n-p-1)(2n-p+1)$$

dove il termine d sostituisce la somma $d+3d_1$ di poc'anzi; vale a dire d indica il numero dei raggi doppi di prima specie, computati fra questi anche i raggi tripli, come equivalenti ciascuno a tre raggi doppi.

Per una congruenza di 3° ordine priva di raggi multipli di prima specie sarà dunque:

$$t=\frac{(n-p-1)(2n-p+1)}{3};$$

e in ogni caso questo valore sarà un confine superiore di t (inferiore, in generale, a quello del sig. SCHUMACHER).

Nel nostro ragionamento si è supposto implicitamente $p < n - 1$; se no non esisterebbe la superficie φ. Ma abbiamo già detto che, se $p = n - 1$, da nessun punto non singolare escono tre rette della congruenza contenute in un fascio; sarà dunque allora $t = 0$ e $d = 0$.

31. — Vediamo ora quale sia il significato di t rispetto alla superficie immagine della data congruenza in S_5; e quale relazione passi, nel caso di una congruenza di 3° ordine, fra il *genere numerico* di quella superficie, ossia della stessa congruenza, e i vari caratteri di questa già stati considerati.

La superficie F^{m+n}, immagine (nello spazio S_5) di una data congruenza (m, n), si proietta da una retta qualunque u della M_4^2 fondamentale (non incidente ad essa) in una superficie f (semplice, se la u è stata scelta in modo generale) dello spazio S_3 e dello stesso ordine $m + n$, con un punto m^{plo} (A) e un punto n^{plo} (B), proiezioni rispett. degli m e n punti di F che stanno nei due piani α e β della M_4^2 passanti per u. — Le corde di F incidenti ad u daranno origine a una curva doppia della superficie f^{m+n}, la quale nei due punti A e B avrà rispett. le multiplicità $\binom{m}{2}$ e $\binom{n}{2}$. Le intersezioni ulteriori di questa curva doppia con un piano passante per la retta AB proverranno da quelle corde di F, che si appoggiano a u, e stanno in un S_4 passante per i due piani α e β, ma non in uno di questi piani; e il loro numero (come si vede facilmente) è eguale al rango r della congruenza.

La superficie f^{m+n} avrà dunque una curva doppia di ordine $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + r$ (1); e all'infuori di questa non avrà che (eventualmente) dei punti multipli isolati, se (come abbiamo supposto fin da principio (n. 10)) la congruenza proposta non ha infinite rette multiple, e la superficie F^{m+n} non ha perciò già essa una curva multipla. Il genere p delle sezioni piane di f^{m+n} (che è poi il genere sezionale della congruenza) sarà perciò legato ai caratteri m, n, r dalla relazione:

$$p = \binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2} - r$$

che si riduce alla forma già nota (n° 2):

$$p = (m-1)(n-1) - r.$$

32. — La superficie f avrà anche in generale un certo numero di punti tripli, i quali saranno pure tripli per la sua curva doppia. Essi provengono dalle trisecanti della superficie F, che si appoggiano ad u. — Alla retta u della quadrica fondamentale corrisponde nello spazio di rette un certo fascio di raggi P (π); e ad ogni trisecante di F la quale si appoggi ad u corrisponderà perciò una terna di raggi della

---

(1) Per una congruenza contenuta in un complesso lineare non speciale ($m = n = k$, $r = 0$) la superficie immagine $F^{m+n} \equiv F^{2k}$ starebbe in uno spazio S_4; e da una retta generica u della M_4^2 fondamentale (non contenuta in questo S_4) essa si proietterebbe in una f^{2k} di S_3, la cui curva multipla sarebbe costituita da una conica k^{pla}.

congruenza contenuta in un fascio, e tale che questo fascio abbia un raggio a comune con P (π); abbia dunque il suo centro nel piano π, e il suo piano passante per P. Il numero di queste terne di raggi è dunque quello che abbiamo indicato con t (n° 29).

Diremo perciò: *La superficie* f^{m+n} *ha, all'infuori dei punti multipli* A *e* B, *anche* t *punti tripli, i quali sono pure tripli per la sua curva doppia.*

Nel caso particolare di una congruenza di 3° ordine, la superficie immagine F^{n+3} si proietterà in S_3 secondo una superficie f^{n+3} con una curva doppia di ordine:

$$\binom{n}{2}+3+r=\binom{n}{2}+2n-p+1=\binom{n+2}{2}-p$$

la quale avrà un punto multiplo di ordine $\binom{n}{2}$, che sarà n^{plo} per la superficie; e $t+1$ punti tripli (includendovi anche A), che saranno tripli anche per la superficie.

Ai raggi doppi e tripli di 1ª specie della congruenza devono corrispondere sopra f^{n+3} punti rispett. doppi e tripli, ma impropri, e quindi appartenenti alla curva doppia dianzi considerata; anzi i punti tripli saranno tali anche per la curva doppia. E questi ultimi risulteranno già computati nei $t+1$ di cui sopra, se a t diamo (come daremo sempre) il significato convenuto a proposito della formola (1') del n° 30.

Ai raggi doppi e tripli di 2ª specie della data congruenza, quando ve ne siano, corrisponderanno invece sopra f^{n+3} dei punti multipli isolati. In generale, si può dire che questi consisteranno in punti doppi non appartenenti alla curva doppia, e in punti tripli i quali o non apparterranno affatto alla curva doppia (punti tripli non apparenti), oppure saranno per essa punti generici (punti tripli apparenti).

33. — Conoscendo pertanto i caratteri della superficie f^{n+3} (che per il momento supporremo priva di punti multipli isolati), è facile calcolarne il genere numerico p_n.

Questo carattere non è altro che il numero *virtuale* delle superficie di ordine inferiore di quattro unità alla proposta, che sono *aggiunte* ad essa e linearmente indipendenti (¹); nel nostro caso dunque il numero virtuale delle superficie di ordine $n-1$ e linearmente indipendenti, che contengono la curva doppia (δ) della f^{n+3}.

Se questa curva doppia non avesse che un certo numero T di punti tripli (i quali fossero tali anche per la superficie f^{n+3}) sarebbe per una nota formola (²):

$$p_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-(n-1)\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-p\right\}+2T+\pi-1$$

dove π è il genere della curva δ.

Nel nostro caso, oltre ai $t+1$ punti che sono tripli per δ e per f^{n+3}, vi è un altro punto, n^{plo} per la superficie f^{n+3} e $\binom{n}{2}^{\text{plo}}$ per la curva δ; e questo punto equi-

(¹) Cfr. ad es. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche,* " Mem. della Soc. Ital. delle Scienze " s. III, t. X, 1896, p. 70.

(²) Quest'espressione del genere numerico di una superficie (secondo la denominazione odierna) fu data per la prima volta da Cayley, " Math. Ann. ", 3. Zeuthen, " Math. Ann. ", 4 e Noether, " Math. Ann. ", 8 ne dimostrarono poi l'invariantività rispetto a trasformazioni birazionali.

vale a $\binom{n}{3}$ punti tripli analoghi ai precedenti (tanti quante sono le diverse terne che possono formarsi cogli n punti semplici ivi soprapposti). Dovremo dunque porre:

$$T = \binom{n}{3} + t + 1.$$

Anche il genere π della curva δ può esprimersi in funzione dei soli caratteri n, p, t. E dico precisamente che la curva proiezione di δ dal suo punto $\binom{n}{2}^{\text{plo}}$, la quale è di ordine $2n - p + 1$ e ha $t + 1$ punti tripli (proiezioni di quelli di δ), non ha, all'infuori di questi, altri punti multipli. — Infatti, se ne avesse altri, questi dovrebbero provenire da punti doppi apparenti di δ rispetto al suo punto $\binom{n}{2}^{\text{plo}}$; allora i raggi proiettanti relativi dovrebbero stare sopra f^{n+3} (avendo a comune con questa almeno $n + 4$ punti), e sarebbero perciò proiezioni di rette di F^{n+3} incontranti il piano β della quadrica fondamentale. Ora la retta u (asse di proiezione) si può certo prendere in modo che i due piani α e β per essa non incontrino nessuna retta di F (anzi, se $n > 1$, nessuna linea, la quale sia immagine di un cono o inviluppo singolare della congruenza); e allora la curva proiezione di δ non avrà certo che i $t + 1$ punti tripli.

Il genere π di δ sarà dunque quello di una curva piana di ordine $2n - p + 1$ avente (soltanto) $t + 1$ punti tripli; vale a dire:

$$\pi = \frac{(2n - p)(2n - p - 1)}{2} - 3(t + 1).$$

Sostituendo pertanto nell'espressione di p_n a T e π questi loro valori, ed eseguendo alcune riduzioni, si trova:

$$p_n = \frac{(n - p - 1)(n - p + 2)}{2} - t.$$

Volendo ora tener conto anche degli eventuali raggi doppi e tripli di 2ª specie della congruenza, ossia dei punti multipli isolati che loro corrispondono sulla superficie f^{n+3} (e che noi supporremo *ordinari*), basta introdurre una lieve modificazione nel risultato finale. Anzitutto i punti doppi (ordinari) non influiscono affatto sul genere numerico della superficie. E i punti tripli influiscono soltanto quando siano *non apparenti*; e in tal caso ciascuno di essi, dovendo appartenere (come punto semplice) alle superficie aggiunte della proposta, diminuisce di un'unità il valore di p_n. Se indichiamo dunque con τ il numero di quei raggi tripli (di 2ª specie), ai quali corrispondono sulla superficie immagine della congruenza punti tripli isolati non apparenti (e tali sono ad es. tutti i punti tripli a cono tangente irriducibile ellittico), avremo:

$$p_n = \frac{(n - p - 1)(n - p + 2)}{2} - t - \tau.$$

34. — Dall'espressione trovata di p_n si ricava:

$$t = \frac{(n-p-1)(n-p+2)}{2} - p_n - \tau;$$

espressione valevole per ogni congruenza $(3, n)$ non contenuta in un complesso lineare. D'altronde, nelle congruenze contenute in un complesso lineare non si fa nemmeno luogo alla considerazione del carattere t.

Ricordando ora la relazione $(1')$ del n° 30:

$$3t + d = (n-p-1)(2n-p+1)$$

e sostituendo a t il suo valore testè determinato, ricaviamo:

$$d = \frac{(n-p-1)(n+p-4)}{2} + 3(p_n + \tau);$$

formola che dà il numero dei raggi doppi di prima specie di una qualsiasi congruenza $(3, n)$ non contenuta in un complesso lineare, essendo fra questi computati anche gli eventuali raggi tripli (di prima specie), ciascuno come equivalente a tre raggi doppi.

Vedremo ad es. che per gli stessi valori $n = 9$, $p = 4$, sono possibili i tre casi: $p_n = -1$, $\tau = 0$, $d = 15$ (n° 52); $p_n = -1$, $\tau = 1$, $d = 18$ (n° 55); $p_n = \tau = 0$, $d = 18$ (n° 76).

35. — La superficie focale di una congruenza di ordine ≥ 3 ha in generale una curva cuspidale, luogo dei punti pei quali non soltanto due, ma tre dei raggi della congruenza che ne escono sono venuti a coincidere. Il Sig. SCHUMACHER ha determinato (Mem. cit., pag. 124) l'ordine R di questa curva, per il caso di una congruenza (m, n) di rango r priva di raggi multipli; e ne ha trovata l'espressione:

$$\mathrm{R} = 3\left\{(m+n-2)\left(\frac{mn}{2} - r\right) + t - 2n\right\}$$

dove t è il solito carattere da noi definito al n° 29.

Per una congruenza di 3° ordine $(m = 3)$, ricordando che $r = 2n - p - 2$, si ricava subito:

$$\mathrm{R} = 3\left\{(n+1)\left(p + 2 - \frac{n}{2}\right) + t - 2n\right\}. \tag{1}$$

Questa stessa formola è pure valida per ogni congruenza avente raggi multipli di prima (ma non di seconda) specie, purchè a t si dia il valore convenuto per la formola $(1')$ del n° 30. Ciò è conseguenza immediata del fatto che il ragionamento del Sig. SCHUMACHER è basato soltanto sulla considerazione della superficie f^{m+n} di S_3 (n° 32-33), e del numero (che è sempre $= t$) dei punti tripli per essa e per la sua curva doppia.

I raggi doppi di seconda specie (ordinari) non influiscono nemmeno sul valore di R. Vi influiscono invece i raggi tripli di 2^a specie, i quali possono anzi considerarsi essi stessi come facenti parte della curva cuspidale (n° 15). — Indicando in questo caso con R l'ordine della curva cuspidale residua (astrazion fatta da quei raggi), si trova, rifacendo il ragionamento del Sig. SCHUMACHER, che ogni raggio triplo di seconda specie (ordinario) produce, in generale, nel valore dato dal secondo membro della (1) un abbassamento di *sei* o di *tre* unità, secondo che il punto corrispondente sopra f^{n+3} è non apparente oppure apparente. Se dunque indichiamo con τ' il numero dei raggi tripli a cui corrispondono punti tripli apparenti, avremo più generalmente:

$$\mathrm{R} = 3\left\{(n+1)\left(p+2-\frac{n}{2}\right)+t-2\tau-\tau'-2n\right\}. \tag{2}$$

Introducendo ora in luogo di t il suo valore trovato al n° preced., e riducendo, si trova:

$$\mathrm{R} = 3\left\{\binom{p+1}{2}+1-p_n-3\tau-\tau'\right\}. \tag{2'}$$

Osserviamo ancora che, quando non vi siano raggi multipli di prima specie, essendo (n° 30):

$$t = \frac{(n-p-1)(2n-p+1)}{3}$$

si potrà sostituire nella (2) quest'ultimo valore di t, e valersi perciò, anzichè della (2'), di quest'altra espressione:

$$\mathrm{R} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}+(p+1)(p+2)-6\tau-3\tau'$$

la quale, se non vi sono affatto raggi multipli (ovvero anche se vi sono soltanto raggi doppi di 2ª specie) si riduce a:

$$\mathrm{R} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}+(p+1)(p+2).$$

§ 5.

Congruenze prive di raggi multipli. Loro genere sezionale.

36. — Occupiamoci ora più particolarmente delle congruenze $(3, n)$ prive di raggi multipli di prima specie. Anche per queste vi è un caso in cui si può dimostrare facilmente che il loro genere sezionale è ≤ 4; il caso in cui esse contengono un fascio di rette, il cui centro sia punto doppio per la superficie focale.

Si abbia una congruenza (che possiamo supporre priva di raggi multipli di prima specie) contenente un fascio di rette P del tipo indicato. Ogni raggio di questo fascio avrà in P stesso uno dei propri fuochi; sarà tangente alla superficie focale nel suo secondo fuoco, distinto in generale da P; e incontrerà ulteriormente questa superficie in altri $2p$ punti. Il piano π del fascio sarà dunque tangente alla superficie focale lungo tutta la linea luogo dei secondi fuochi dei raggi del fascio P (π); e l'incontrerà ulteriormente secondo una linea di ordine $\geq 2p$. Anzi la linea luogo di quei secondi fuochi sarà precisamente una conica passante per P (e non una retta), perchè, come il cono tangente alla superficie focale in un suo punto singolare deve essere di classe ≥ 2 (n° 8), così, dualmente, deve essere di ordine ≥ 2 la linea di contatto di essa con ogni piano singolare. E il piano π, essendo tangente alla superficie focale lungo una conica, dovrà contenere, all'infuori del fascio P, altre $n - 2$ rette della congruenza [1].

Queste $n - 2$ rette, fra le quali possiamo supporre non vi siano raggi multipli di prima specie, si incontreranno a due a due in $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ punti tutti distinti [2], perchè se no si avrebbero nel piano π almeno quattro raggi concorrenti in un punto diverso da P: ora, se ciò avvenisse, questo punto sarebbe singolare e vertice di un cono di raggi della congruenza di ordine ≥ 4 (o di un cono cubico razionale, se uno dei quattro raggi fosse isolato rispetto ad esso); sicchè questo cono avrebbe generatrici multiple, e quindi la congruenza avrebbe dei raggi multipli di prima specie [3]. — Di quegli $\binom{n-2}{2}$ punti, ve ne saranno $n - 3$ sopra ciascuna delle $n - 2$ rette; e dovranno tutti appartenere alla superficie φ, oppure saranno punti singolari. Ma sulla superficie φ (che non contiene le $n - 2$ rette, perchè per un punto generico di una di esse due dei tre raggi della congruenza che ne escono stanno nel piano π, e il terzo fuori di questo piano) potranno stare al più $n - p - 1$ di quegli stessi punti (nessuno, se $p = n - 1$); dunque almeno $(n - 3) - (n - p - 1) = p - 2$ di essi saranno punti singolari.

D'altra parte questi punti sono allora i secondi fuochi dei raggi del fascio P (π) cui essi rispett. appartengono [4]; dunque staranno sulla conica di contatto del piano π colla superficie focale; e di qui segue $p - 2 \leq 2$, ossia $p \leq 4$, c. s. v. d.

37. — Resta ora a vedere quale possa essere il genere sezionale di una congruenza priva in pari tempo di raggi multipli di prima specie, e di fasci di rette aventi il centro in un punto doppio della superficie focale.

Questa stessa congruenza si potrà anche supporre priva di raggi tripli di seconda

---

(1) Più generalmente, un piano il quale tocchi la superficie focale lungo una curva di ordine γ, contiene, oltre al proprio inviluppo singolare, altri $n - \gamma$ raggi isolati della congruenza (teorema duale di quello del n° 6): cfr. Sturm, Op. cit., II, p. 11, n° 295.

(2) Anche se vi fosse in π qualche raggio doppio di 2ª specie, questo non farebbe eccezione, trattandosi di due raggi che hanno sempre in π un'intersezione ben determinata.

(3) Si potrebbe anche pensare che questo punto fosse centro di un secondo fascio di rette della congruenza, appartenente pure al piano π. Ma allora, se $p > 4$, e perciò $n > 5$, vi sarebbero nel piano π, all'infuori dei due fasci, ancora $n - 4$ e perciò almeno due raggi della congruenza; e per il punto d'incontro di questi due passerebbero di nuovo quattro raggi di un fascio.

(4) A dir vero, potrebbe anche supporsi che, per qualcuno di questi punti singolari, il raggio del fascio P(π) che lo contiene fosse isolato, e il punto stesso non fosse perciò fuoco di tale raggio. Ma si tratta di un punto dal quale escono già tre raggi della congruenza contenuti nel piano π, e che per ipotesi non appartiene alla superficie φ; dunque esso non può essere centro che di un fascio di rette (v. Nota prec.), oppure di un cono cubico ellittico, nel qual caso non vi sono raggi isolati.

specie (n° 18), il che ci dispenserà da alcune considerazioni ulteriori che la presenza di tali raggi avrebbe richieste.

Cominciamo col ricordare l'ultima formola del n° 35, che esprime l'ordine della curva cuspidale della superficie focale di una congruenza (3, n) priva di raggi multipli, o anche avente soltanto dei raggi doppi di 2ª specie (il che si sottintenderà nel seguito di questo §). Vale a dire:

$$\mathrm{R} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2).$$

La superficie focale della congruenza, non avendo altra curva multipla all'infuori della curva cuspidale (¹), sarà perciò di rango:

$$\rho = (2p+4)(2p+3) - 3\mathrm{R} = (p+2)(p+3) - 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

e questo numero sarà certamente > 0. Dunque:

Per ogni congruenza di 3° ordine priva di raggi multipli sussiste la diseguaglianza:

$$(p+2)(p+3) - 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{2} > 0.$$

Ora, per $p \leq n-5$ questa diseguaglianza non è certo verificata. Concludiamo perciò:

Le congruenze (3, n) *prive di raggi multipli hanno tutte il genere sezionale eguale a uno dei numeri* $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$.

38. — Consideriamo una congruenza arbitraria (3, n) priva di raggi multipli. I coni singolari in essa contenuti saranno tutti di ordine ≤ 3; e quelli di 3° ordine saranno tutti ellittici.

Alla superficie φ, supposta esistente (supposto cioè $p < n-1$), apparterranno quei soli punti singolari, dai quali esce un cono quadrico di raggi della congruenza, e inoltre un raggio isolato di questa: tali punti saranno semplici per la φ. Sia x_2 il numero di questi punti singolari; S_2 uno qualunque di essi.

Questi stessi punti saranno poi tripli per le superficie (P); come pure saranno punti tripli per le (P) i vertici degli eventuali coni cubici ellittici. Sia x_3 il numero di questi coni; S_3 il vertice di uno qualunque di essi.

Per le curve (l) (cfr. n° 28) i punti S_2 saranno semplici e i punti S_3 tripli.

Osserviamo infine che dall'inviluppo ψ di classe $\binom{n-1}{3} + (n-2)(n-p-1)$ formato dai piani che contengono terne di rette della congruenza appartenenti ad un fascio, si staccheranno le x_3 stelle aventi i centri nei singoli punti S_3 (n° 23).

(¹) Una sua curva doppia non cuspidale sarebbe infatti luogo di punti pei quali dovrebbero escire due diverse coppie di raggi della congruenza infinitamente vicini, e quindi in tutto almeno 4 raggi; il che in una congruenza di ordine < 4 non può avvenire che per i punti singolari.

L'inviluppo residuo ψ_1, di classe $\binom{n-1}{3}+(n-2)(n-p-1)-x_3$, sarà formato esclusivamente dai piani delle terne di raggi uscenti dai punti della superficie φ.

È facile ora stabilire fra i numeri x_2 e x_3 due relazioni, dalle quali questi numeri potranno poi ricavarsi.

Consideriamo le intersezioni della superficie φ e di una curva (l) generica. Gli ordini di questi due enti sono rispett. $n-p-1$ e $\frac{(n-1)(n+4)}{2}-p$. Fra le loro intersezioni vi sono gli x_2 punti S_2, semplici tanto per φ quanto per (l), e che non saranno nemmeno loro punti di contatto, se la (l) è stata scelta in modo generale; nè vi saranno altri punti singolari della congruenza, perchè nessuno di questi appartiene a φ. Le rimanenti intersezioni, in numero di

$$(n-p-1)\left\{\frac{(n-1)(n+4)}{2}-p\right\}-x_2$$

dovranno dunque cadere in quei punti non singolari, dai quali escono tre raggi della congruenza contenuti in uno stesso piano per l. E il numero di questi punti non è altro che la classe dell'inviluppo ψ_1. Siccome poi questi punti sono tripli per la (l) e semplici per la φ, così ciascuno di essi assorbirà tre intersezioni. Si avrà dunque questa prima relazione:

$$(n-p-1)\left\{\frac{(n-1)(n+4)}{2}-p\right\}-x_2=3\left\{\binom{n-1}{3}+(n-2)(n-p-1)-x_3\right\}.$$

39. — Si considerino ora le intersezioni di due superficie (P) generiche — chiamiamole (P_1) e (P_2) — e della φ, il numero complessivo di $(2n-p+1)^2(n-p-1)$. Di punti singolari, non vi sono fra esse che gli x_2 punti S_2, tripli per le (P) e semplici per la φ, i quali conteranno come 9 intersezioni ciascuno. Le rimanenti intersezioni, in numero di

$$(2n-p+1)^2(n-p-1)-9x_2$$

dovranno cadere in quei punti (non singolari), pei quali i tre raggi della congruenza che ne escono stanno in un piano passante in pari tempo per P_1 e P_2, dunque per la retta P_1P_2. Il numero di questi punti è di nuovo la classe dell'inviluppo ψ_1; e ciascuno di essi, essendo triplo per le due (P), assorbe 9 intersezioni. Abbiamo dunque quest'altra relazione, che scriviamo già divisa per 9:

$$\frac{(2n-p+1)^2}{9}(n-p-1)-x_2=\binom{n-1}{3}+(n-2)(n-p-1)-x_3.$$

Da questa relazione e dalla precedente si ricava tosto:

$$x_2=\frac{n-p-1}{2}\left\{\frac{(2n-p+1)^2}{3}-\frac{(n-1)(n+4)}{2}+p\right\}$$

$$x_3=\binom{n-1}{3}+\frac{n-p-1}{2}\left\{\frac{(2n-p+1)^2}{9}-\frac{n(n-1)}{2}+p-2\right\}.$$

Queste due relazioni, dimostrate nell'ipotesi $p < n - 1$ (perchè se no non esisterebbe la superficie φ), valgono pure se $p = n - 1$. Esse dànno infatti in quest' ultima ipotesi $x_2 = 0$, $x_3 = \binom{n-1}{3}$. Ora, che in tal caso sia $x_2 = 0$, l' abbiamo già veduto al n° 24. Quanto a x_3, basta osservare che in questo caso l'inviluppo ψ non può comporsi che delle stelle aventi i centri nei vertici dei coni cubici della congruenza; il numero x_3 sarà dunque la classe dell'inviluppo ψ. E questa, per $p = n - 1$, è appunto $\binom{n-1}{3}$.

40. — Le considerazioni svolte nei due n[i] prec. si estendono facilmente a qualunque congruenza $(3, n)$. Ci limiteremo a dare l'estensione della formola trovata al n° 38. Se indichiamo con Σ_1 una somma da estendersi a tutti i coni della congruenza i cui vertici sono punti doppi per la superficie focale, con Σ_2 e Σ_3 somme da estendersi a quei coni i cui vertici sono punti rispett. quadrupli e sestupli per la stessa superficie, e infine con Σ una somma da estendersi a tutti indistintamente i coni singolari; l'ordine di un tal cono essendo sempre indicato con h; lo stesso ragionamento del n° 38 conduce a stabilire la relazione più generale:

$$(n-p-1)\left\{\frac{(n-1)(n+4)}{2} - p\right\} - \Sigma_1(h-1)\binom{h}{2} - \Sigma_2(h-2)\binom{h}{2} - \Sigma_3(h-3)\binom{h}{2}$$
$$= 3\left\{\binom{n-1}{3} + (n-2)(n-p-1) - \Sigma\binom{h}{3}\right\}$$

che si riduce a:

$$\Sigma_3\binom{h}{2} - \Sigma_1\binom{h}{2} = (p-2)\binom{n-1}{2} + (p-3)(n-p-1) \text{ [1]}.$$

41. — Per una congruenza priva di raggi multipli abbiamo già determinato il numero x_3 dei coni cubici e il numero x_2 di quei coni quadrici dal cui vertice esce anche un raggio isolato della congruenza. Ci sarà facile ora, con una nuova relazione, di determinare anche il numero x_1 di quei punti singolari S_1 dai quali escono un fascio di raggi e in pari tempo un raggio isolato della congruenza. Eguagliando a zero questo numero, e cercando le soluzioni dell' equazione che ne risulterà, saremo sicuri di comprendere tutte quelle congruenze che sfuggono ai teoremi dei n[i] 16-18 e 36.

Ricordiamo che la superficie focale di ogni congruenza di ordine ≥ 3 ha una linea cuspidale, luogo dei punti per cui coincidono tre dei raggi della congruenza che ne escono. Questi raggi, ciascuno dei quali conta come tre rispetto a un suo

---

[1] Scompaiono dunque da questa relazione (e così anche dall'altra che troveremo al n° 41) tutti quei coni i cui vertici sono punti quadrupli della superficie focale (ossia quei coni razionali, dai cui vertici non escono raggi isolati della congruenza). Questo è d'accordo col fatto, che una congruenza può acquistare o perdere coni di questo tipo (cfr. ad es. § 10) senza che si alteri nessuno dei suoi caratteri. — Avvertiamo inoltre che nell'applicare la relazione scritta di sopra bisogna tener conto dell'ultima nota al n° 24.

punto determinato, formano una rigata, della quale il Sig. SCHUMACHER ha determinato l'ordine (¹). E questo ordine, per una congruenza (m, n) di rango r (anche con raggi multipli), è espresso dalla formola:

$$L = 4 \{ 3mn - 2(m+n) - 3r \}.$$

Per una congruenza di 3° ordine, introducendo in luogo di r la solita espressione $2n - p - 2$, si avrà dunque:

$$L = 4(n + 3p).$$

Nella rigata avente l'ordine L così determinato sono però ancora compresi *tutti indistintamente i coni singolari della congruenza* (²); indicando perciò con h l'ordine di uno qualunque di questi coni, scriveremo più esattamente e prescindendo dalla considerazione dei coni stessi:

$$L = 4(n + 3p) - \Sigma h$$

dove la somma Σ s'intende estesa a tutti i coni singolari della congruenza (³).

D'altra parte, nel caso di una congruenza di 3° ordine, le generatrici di questa rigata (Γ) di ordine L sono anche le sole rette della congruenza che incontrano la curva cuspidale (γ) della superficie focale, almeno fuori dei punti singolari; questa rigata dovrà dunque coincidere, colle debite cautele relativamente ai coni singolari, con quella che è costituita dalle rette della data congruenza che si appoggiano alla curva γ. Ora quest'ultima rigata, quando si indichi con R l'ordine della curva γ, è di ordine $R(n+3)$; ma da essa si staccheranno tutti quei coni singolari che hanno il vertice sopra γ, vale a dire quelli dal cui vertice non esce nessun raggio isolato della congruenza. E precisamente ciascuno di questi coni si staccherà tante volte, quanta è la multiplicità del suo vertice per la curva γ; cioè *tre* volte o *nove* volte,

---

(¹) Mem. cit. dei Mathem. Ann., 37, p. 126. Questa rigata è chiamata dall'A. " *die Regelfläche, welche die Rückkehrcurve der Brennfläche trägt* ".

(²) Rappresentata infatti la congruenza con una superficie F^{n+3} dello spazio S_5, la questione si riduce facilmente a determinare quanti piani ϵ_2 del sistema dei *punti* sulla M_4^2 fondamentale siano osculatori a una qualche curva tracciata su F in un punto di un determinato spazio S_4, ossia della curva C secondo cui tale S_4 incontra la F. (A dir vero, il sig. SCHUMACHER ragiona sopra una F^{n+3} di S_4, che è proiezione della nostra da un punto della M_4^2 fondamentale; ma ciò non fa differenza). Ora, ad ogni cono di ordine h (≥ 1) contenuto nella congruenza corrisponde un piano ϵ_2 che ha a comune con F una linea pure di ordine h; e questo piano può considerarsi come osculatore a tale linea in ogni punto di essa, in particolare nelle sue h intersezioni colla C. Il piano stesso viene dunque contato h volte nel numero che si tratta di calcolare.

(³) Una conferma di questa riduzione che bisogna far subire all'ordine L ci è data dalle congruenze di 2° ordine. Per queste, essendo $m = 2$, $r = n - 2$, l'espressione prima di L diventa $= 4(n+2)$. D'altra parte in una congruenza di 2° ordine la superficie focale non ha curva cuspidale; dunque quella rigata di ordine $4(n+2)$ deve essere tutta costituita dai coni singolari. E infatti, per una nota formola (STURM, Op. cit., II, p. 43, n° 314. Cfr. anche MASONI, " Rend. Acc. di Napoli ", vol. 22) la somma degli ordini di tutti i coni singolari di una congruenza $(2, n)$ priva di linea singolare vale appunto $4(n+2)$. — Bisogna però avvertire che, se vi sono raggi doppi di 2ª specie, i coni singolari aventi i vertici sopra questi vanno computati due volte nella somma (e sono i " *binäre Kegel* " di STURM, Op. cit., II, p. 197, n° 402; p. 307, n° 475). Lo stesso avviene anche per le congruenze di 3° ordine e per i raggi tripli di 2ª specie.

secondo che si tratta di un cono razionale od ellittico. Infatti le tangenti alla curva cuspidale γ in uno qualunque di questi punti singolari sono precisamente le generatrici di regresso del cono che ivi tocca la superficie focale; e questo cono, che è sempre di 3ª classe, o è razionale e di 4° ordine, e allora ha *tre* generatrici cuspidali; oppure è ellittico e di 6° ordine, e allora ha *nove* generatrici cuspidali [1]. L'ordine della rigata residua (dopo tolti questi coni, colle rispettive multiplicità) dovrà ancora dividersi per *tre*, perchè, siccome per ogni punto di γ i tre raggi della congruenza che ne escono coincidono tutti, e coincidono con una generatrice di Γ, così l'intersezione residua che noi avremo ottenuta sarà bensì la rigata Γ, ma contata tre volte. — Adoperando pertanto i simboli sommatori Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ cogli stessi significati che abbiamo loro attribuiti al n° preced., potremo scrivere la relazione:

$$4(n+3p)-\Sigma h=\frac{1}{3}\left\{\mathrm{R}(n+3)-3\Sigma_2 h-9\Sigma_3 h\right\}. \tag{1}$$

E svolgendo la somma $\Sigma h=\Sigma_1 h+\Sigma_2 h+\Sigma_3 h$, la stessa relazione assumerà la forma:

$$4(n+3p)-\Sigma_1 h=\frac{\mathrm{R}(n+3)}{3}-2\Sigma_3 h \text{ [2]}. \tag{1'}$$

42. — Occupiamoci ora più particolarmente delle congruenze prive di raggi multipli. Per queste si dovrà porre (n° 35):

$$\mathrm{R}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+(p+1)(p+2)$$

e inoltre:

$$\Sigma_1 h=x_1+2x_2 \qquad \Sigma_3 h=3x_3.$$

La relazione (1') del n° preced. assumerà dunque la forma:

$$4(n+3p)-x_1-2x_2=\frac{n+3}{3}\left\{\frac{(n-2)(n-3)}{2}+(p+1)(p+2)\right\}-6x_3.$$

E di qui, sostituendo a x_2 e x_3 le loro espressioni trovate al n° 39, ricaviamo:

$$x_1=4(n+3p)+(n-1)(n-2)(p-2)+2(n-p-1)(p-3)-\frac{n+3}{3}\left\{\frac{(n-2)(n-3)}{2}+(p+1)(p+2)\right\}.$$

Se vi è dunque qualche congruenza priva ad un tempo di raggi multipli, e di fasci di rette il cui centro sia punto doppio per la superficie focale, la classe n e il ge-

---

[1] Ed è invece di 2° ordine e 2ª classe, e perciò privo di generatrici cuspidali, per quei punti singolari dai quali esce anche un raggio isolato della congruenza. — In quanto è detto di sopra, il cono (di 3ª classe) tangente alla superficie focale si è supposto implicitamente irriducibile; ma se anche si spezzasse, la multiplicità di quei punti singolari per la linea γ resterebbe in generale la stessa.

[2] Se vi sono nella congruenza dei raggi tripli di 2ª specie, questi si possono considerare come facenti parte della curva cuspidale; e occorre perciò qualche avvertenza sul modo di applicare quest'ultima formola. Si può allora designare con R l'ordine della curva cuspidale residua, astrazion fatta da quei raggi tripli (cfr. n° 35); ma bisogna ricordare che i coni singolari aventi i vertici sopra tali raggi non compariranno allora affatto nel secondo membro della (1), e i loro ordini (opportunamente computati; cfr. la 2ª nota a questo n°) dovranno perciò ancora sottrarsi dal primo membro della (1').

nere sezionale p di essa dovranno annullare quest'espressione di x_1. E sappiamo anche (n° 37) che per queste congruenze p non può avere che uno dei valori $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$. Siamo dunque sicuri di poter determinare tutte queste congruenze con un numero finito di operazioni.

Eguagliamo a zero l'espressione di x_1, e poniamo in essa $p=n-4$. Troviamo così per n l'equazione:

$$3n^3-16n^2+93n-222=0$$

che non ha soluzioni intere e positive. Facendo poi $p=n-3$, si trova l'equazione:

$$3n^3-46n^2+245n-450=0$$

colla soluzione $n=5$, la quale richiederebbe fosse $p=2$. A questa soluzione corrisponderebbe per x_3 (n° 39) il valore 3; si tratterebbe dunque di una congruenza (3, 5) di genere sezionale 2 contenente tre coni cubici ellittici. E ciò non è possibile, poichè una congruenza di genere sezionale 2 non può contenere coni ellittici (n° 65); se ne contenesse uno, per una retta generica uscente dal vertice di questo cono la solita rigata (riducibile) R^{n+3} sarebbe di genere ≥ 3, il che va escluso.

Anche per $p=n-2$ si ha l'equazione:

$$3n^3-44n^2+207n-270=0$$

priva di radici intere e positive. Infine, ponendo $p=n-1$, troviamo l'equazione:

$$n^3-14n^2+55n-42=0$$

che ha le tre radici $n=1$, $n=6$, $n=7$. La prima di queste conduce a una congruenza (3, 1) di genere sezionale *zero*, che è infatti priva tanto di raggi multipli quanto di fasci di rette, ed è anzi completamente priva di punti singolari: la congruenza duale del sistema delle corde di una cubica sghemba. Le altre due soluzioni $n=6$ e $n=7$ lasciano intravedere come possibili una congruenza (3, 6) di genere sezionale 5, e una congruenza (3, 7) di genere sezionale 6. L'effettiva esistenza di queste due congruenze verrà dimostrata negli ultimi due §§ di questa Memoria [1]. E saranno esse — possiamo già affermarlo — le sole congruenze di 3° ordine prive di linea singolare e di genere sezionale >4.

Possiamo dunque riassumere tutti i risultati finora ottenuti nel seguente enunciato:

Le congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare sono tutte di genere sezionale ≤ 4, *fatta eccezione soltanto per:*

una congruenza (3, 6) *di genere sezionale* 5; e

una congruenza (3, 7) *di genere sezionale* 6.

---

(1) Nel mio lavoro: *Aggiunta alla Nota: Sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XXXI, sono incorso, a proposito della congruenza (3, 7) di cui sopra, in un errore. Proiettando la superficie F^{10} immagine della congruenza da una sua trisecante sopra S_3, si ha una F^7 contenente tre rette, immagini rispett. delle tre intersezioni di F^{10} colla trisecante considerata. E la presenza di queste rette sulla F^7 non permette di concludere, come io avevo fatto al n° 6 della Nota cit., che vi è incompatibilità fra le diverse proprietà di cui la F^{10}, e quindi la congruenza (3, 7), supposta esistente, avrebbe dovuto godere.

Di queste due ultime congruenze possiamo affermare sin d'ora che saranno prive di raggi multipli (a meno forse di qualche raggio doppio di 2ª specie) e prive altresì di punti singolari dai cui vertici escano raggi isolati della congruenza. La prima di esse conterrà 10, e la seconda 20 coni cubici di genere uno.

43. — Le considerazioni svolte in questo § si potrebbero anche sostituire in parte con altre, più brevi forse, ma che condurrebbero a un risultato un po' meno preciso: tale però sempre, da poter servire di base al teorema generale del prossimo §. Trattandosi di argomento piuttosto difficile, non sarà male indicare brevemente anche quest'altra via che si sarebbe potuta tenere.

Procedendo secondo quest'altra via, si sopprimerebbero completamente i n[i] 36, 41 e 42. Cominciando col n° 37, e facendo del risultato finale di questo n° uno studio più accurato, si potrebbe concludere che anche le due ipotesi $p = n - 4$ e $p = n - 3$ non conducono a nessuna congruenza per la quale sia $p > 5$. L'ipotesi $p = n - 2$, per $p > 5$, ossia $n > 7$, rende fratto o negativo il numero x_2 calcolato al n° 39, e si deve perciò escludere. Supposto infine $p = n - 1$, si possono considerare le intersezioni di tre superficie (P), di ordine $r + 3 = n + 2$, corrispondenti a punti i quali siano le mutue intersezioni di tre raggi della congruenza contenuti in un piano generico. Queste tre superficie non possono avere che un numero finito di intersezioni; e d'altra parte, considerando quelle intersezioni che cadono nello stesso piano nominato, nonchè nei vertici degli $\binom{n-1}{3}$ coni cubici della congruenza, se ne ha un numero il quale, per $n > 7$, supera il prodotto $(n + 2)^3$ degli ordini delle tre superficie. Si conclude perciò che dovrà essere $n \leq 7$, e $p \leq 6$; sicchè soltanto in quest'ultima ipotesi $(p = n - 1)$ il genere sezionale potrà arrivare al valore 6: negli altri casi esso sarà sempre ≤ 5.

Si avrebbe dunque il risultato (meno preciso, ma sufficiente per il seguito): " Le congruenze $(3, n)$ prive di linea singolare sono tutte di genere sezionale ≤ 5, " fatta eccezione soltanto (eventualmente) per una congruenza (3, 7) di genere se- " zionale 6 ".

§ 6.

Un teorema generale sulle congruenze $(3, n)$.

44. — Facciamo astrazione in questo momento dalla congruenza (3, 7) di genere sezionale 6, e così pure (come sempre dal n° 21 in qua) dalla congruenza (3, 3) contenuta in un complesso lineare.

Per tutte le altre congruenze $(3, n)$ prive di linea singolare noi abbiamo dimostrato che il genere sezionale p è ≤ 5; e sappiamo anche che per esse è $p \leq n - 1$ (n° 21). Sommando ora membro a membro le due diseguaglianze:

$$p \leq 5 \qquad \text{e} \qquad p < n$$

ricaviamo:

$$2p < n + 5 \qquad \text{ossia:} \qquad n + 3 > 2p - 2.$$

Queste congruenze sono dunque rappresentate in S_5 da superficie aventi le sezioni iperpiane di un certo genere p e di ordine $> 2p - 2$.

Ora, per un teorema gentilmente comunicatomi dal signor Castelnuovo, e dovuto a lui stesso e al signor Enriques (¹), ogni superficie algebrica a sezioni di genere p e di ordine $> 2p - 2$ è razionale o riferibile a una rigata. Dunque:

Ogni congruenza $(3, n)$ *priva di linea singolare e non contenuta in un complesso lineare* — fatta eccezione eventualmente per la congruenza $(3, 7)$ di genere sezionale 6 — *si può rappresentare birazionalmente sul piano o sopra una rigata.*

Risulterà in seguito (§ 14) che la congruenza $(3, 7)$ di genere sezionale 6 non è infatti razionale nè riferibile a una rigata; e ha per immagine in S_5 una superficie regolare di genere *zero* e bigenere *uno*.

E la superficie F^6 immagine di una congruenza $(3, 3)$ contenuta in un complesso lineare non speciale è, in generale, una superficie regolare di genere uno; quindi anche non razionale nè riferibile a una rigata.

45. — Il teorema del n° prec. può completarsi, facendo vedere che, se una congruenza $(3, n)$ è riferibile a una rigata non razionale, questa rigata è certo ellittica (²).

Consideriamo infatti una congruenza $(3, n)$ della quale si sappia che può rappresentarsi birazionalmente sopra una rigata. Alle ∞^1 generatrici di questa rigata (come luoghi di punti) corrisponderanno nella congruenza altrettante serie razionali ∞^1 di rette, ossia altrettante rigate razionali R, formanti un sistema tale che ogni retta generica della congruenza appartenga a una e una sola di queste rigate. Per un punto generico dello spazio passeranno dunque tre rigate R. E la superficie focale della congruenza sarà l'inviluppo delle R.

D'altra parte queste rigate, considerate come superficie dello spazio S_3, saranno contenute nel sistema lineare di tutte le superficie aventi lo stesso loro ordine; e il loro sistema ∞^1 apparterrà perciò a un determinato sistema lineare di dimensione minima di tali superficie. E precisamente, trattandosi di un sistema ∞^1 (algebrico, irriducibile) d'indice *tre*, questo dovrà stare in un sistema lineare di dimensione ≤ 3; e anzi in una rete, ogni qual volta esso non sia razionale. Di più, in questo caso esso sarà certo di genere uno; e ciò è quanto si voleva dimostrare.

Concludiamo pertanto:

All'infuori della congruenza $(3, 7)$ di genere sezionale 6 e della $(3, 3)$ contenuta in un complesso lineare, *ogni altra congruenza di 3° ordine priva di linea singolare è rappresentabile sul piano o sopra una rigata ellittica.* In quest'ultimo caso, alle generatrici della rigata corrisponderanno nella congruenza ∞^1 rigate razionali, formanti un sistema ∞^1 d'indice tre contenuto in una rete di superficie.

(¹) Cfr. una Nota dei sig.ri Castelnuovo e Enriques, nei “ Compt. Rend. de l'Acad. d. Sciences „, novembre 1900, nonchè una Memoria degli stessi A. che è in corso di stampa negli “ Annali di Matem. „.

(²) Ciò va anche d'accordo col fatto che una rigata algebrica la quale contenga, all'infuori delle generatrici, una curva (semplice) razionale od ellittica — quale potrebbe essere nel nostro caso la curva corrispondente a un cono della congruenza — è anch'essa razionale od ellittica. Ma senza fermarci a chiarire ulteriormente questo punto, preferiamo il ragionamento usato di sopra, il quale ci preparerà anche la via pel seguito.

Io mi propongo ora di dimostrare che le rigate R non possono avere curva doppia. Di qui seguirà ch'esse saranno di ordine ≤ 2, e non potranno essere perciò che quadriche.

46. — Indichiamo con $|\,R\,|$ il sistema ∞^1 delle rigate R, con Σ la rete di superficie contenente questo sistema ∞^1, e con S una superficie generica di questa rete. Le S passanti per un punto generico dello spazio formeranno un fascio, al quale apparterranno le tre R passanti per quel punto.

Consideriamo adesso una R arbitraria, e sia R_0; e, su di essa, una generatrice g e un fuoco F di questa generatrice. Poichè dei tre raggi della congruenza uscenti da F due coincidono con g, così delle tre rigate R passanti per F due coincideranno con R_0; e perciò il fascio delle superficie S passanti per F dovrà concepirsi come tangente al sistema $|\,R\,|$ secondo l'elemento R_0. In questo fascio vi sarà poi un'altra R, distinta in generale da R_0, e che potrà considerarsi come *tangenziale* di R_0 (secondo l'ordinario concetto di punto tangenziale di un altro sopra una cubica piana).

D'altra parte, entro la rete Σ, il fascio tangente al sistema $|\,R\,|$ in R_0 è unico; si deve dunque trovare sempre lo stesso fascio comunque si scelgano sopra R_0 la generatrice g e il fuoco F di questa.

Di qui si conclude:

La linea luogo dei fuochi delle generatrici di una rigata R (ossia la linea di contatto di questa R colla superficie focale) *appartiene per intero a una seconda* R *completamente determinata* (la *tangenziale* della prima). E per un punto generico di questa linea non potrà passare nessuna R ulteriore.

47. — Supponiamo ora che R_0 (ossia una R generica) abbia una curva doppia, non contenuta (per il momento) nella superficie focale della congruenza. Allora delle tre rette (distinte) della congruenza che passano per un punto generico di questa curva doppia, due saranno generatrici di R_0; dunque ancora delle tre R che passano per questo punto due coincideranno con R_0, vale a dire il fascio delle S passanti per questo punto sarà di nuovo il fascio tangente a $|\,R\,|$ secondo R_0. E la curva doppia di R_0 apparterrà perciò anch'essa alla R tangenziale di R_0 (che indicheremo con R_1).

L'intersezione di una R *qualunque e della sua tangenziale è dunque riducibile, e si compone di due parti affatto distinte; la linea di contatto di quella* R *colla superficie focale, e la curva doppia della stessa* R.

Di qui si conclude facilmente che anche l'intersezione (variabile) di due R qualunque, e perciò di due S qualunque, è una curva riducibile. Consideriamo infatti insieme a R_0 un'altra R qualunque, e sia R'; e facciamo avvicinare indefinitamente R' a R_1 (tangenziale di R_0) entro il sistema $|\,R\,|$, in guisa che ogni generatrice di R' e quindi ogni punto dell'intersezione $R_0\,R'$ si muova in modo determinato. Quest'intersezione tenderà a trasformarsi con continuità nell'intersezione $R_0\,R_1$. Ora, fra le intersezioni di una generatrice arbitraria g di R_1 con R_0, un certo numero k (fra distinte e coincidenti) apparterranno alla superficie focale della congruenza, ossia alla curva di contatto di R_0 con questa superficie; e un certo numero k' apparterranno invece alla curva doppia di R_0. Se consideriamo pertanto una generatrice

g' di R', la quale tenda (nel movimento di cui sopra) alla posizione g, è chiaro che, delle $k+k'$ sue intersezioni con R_0, k avranno la proprietà che le due rette della congruenza uscenti da esse e distinte da g' tenderanno a coincidere; mentre ciò non avverrà per le rimanenti k'. E da ciò si trae che, al variare della generatrice g' sopra R', i primi k punti dovranno avere per luogo una curva completamente distinta da quella che è luogo dei rimanenti k'; vale a dire l'intersezione $R_0 R_1$ sarà anche riducibile, c. s. v. d.

Stabilito così che l'intersezione variabile di due R qualunque è riducibile, ne segue che nel fascio segato sopra una qualsiasi R dalle rimanenti, ogni curva si comporrà di due parti distinte, entrambe variabili. E queste parti dovrebbero anche appartenere rispett. a due diversi sistemi ∞^1 di curve; perchè, facendo avvicinare indefinitamente due R, per tutti i punti di una delle due parti della loro intersezione, due dei tre raggi della congruenza che escono da questo punto devono anche tendere a coincidere; mentre per i punti dell'altra parte ciò non avviene. Ora un fascio di curve di questo tipo, nel quale cioè la curva generica si componga di due parti variabili rispett. entro diversi sistemi ∞^1, non può esistere sopra nessuna superficie irriducibile; rimane dunque escluso che le R possano avere una curva doppia non appartenente alla superficie focale della congruenza.

48. — Supponiamo ora (se possibile) che ogni R abbia una curva doppia appartenente alla superficie focale della congruenza. Questa curva sarà allora una curva cuspidale, e le R saranno perciò sviluppabili (uno dei due sistemi di sviluppabili contenuti nella congruenza). Possiamo anche supporre che queste sviluppabili non abbiano altra curva doppia, all'infuori dei rispettivi spigoli di regresso (se no si ricadrebbe nell'ipotesi precedente); esse si comporranno dunque delle tangenti a altrettante cubiche sghembe.

Le R siano dunque sviluppabili biquadratiche circoscritte a cubiche sghembe. Sia R_0 una di esse, e γ_0 la relativa curva cuspidale, la quale apparterrà anche alla R tangenziale di R_0. Viceversa, le quattro R aventi per tangenziale R_0 avranno le proprie curve cuspidali sopra R_0 stessa.

Sia R' una di queste R aventi per tangenziale R_0, e g una generatrice di R_0 la quale sia una retta generica della congruenza; dunque una retta tangente alla superficie focale della congruenza in due punti (i suoi fuochi) e che l'incontri ulteriormente in $2p$ punti tutti distinti.

Le quattro intersezioni di g con R', essendo fuochi delle generatrici di R' cui rispett. appartengono (e non di g stesso), cadranno tutte fra questi ultimi $2p$ punti. Ora, poichè la cubica di regresso γ' di R' sta sopra R_0, vi sarà fra quelle intersezioni un punto almeno (P') di questa cubica; e non ve ne sarà nemmeno più di uno, perchè le generatrici g di R_0, tutte tangenti alla cubica γ_0, non possono essere in pari tempo corde di un'altra cubica γ'. Nel punto P', che è doppio (e precisamente cuspidale) per R', cadranno almeno due delle 4 intersezioni di g con R'; e si vede facilmente che non ve ne potranno cadere nemmeno più di due. Infatti, se ve ne cadessero tre, g dovrebbe stare nel piano osculatore a γ' in P' stesso; e allora questo piano, contenendo la generatrice g di R_0 e la tangente in P' alla curva γ' tracciata sopra R_0, sarebbe lo stesso piano tangente a R_0 lungo g; e perciò un piano osculatore a γ_0; sicchè le cubiche γ_0 e γ' avrebbero gli stessi piani osculatori, il che non è possibile essendo esse distinte. Le rimanenti due intersezioni di g con R' saranno dunque punti semplici di R', e punti di contatto di R' stessa colla superficie focale. Esse saranno certo distinte, perchè se no nel punto in cui per avventura coincidessero g risulterebbe tangente a R' e quindi alla superficie focale. Concludiamo perciò che vi sono sopra g tre punti distinti appartenenti alla rigata (sviluppabile) R'. Ora R_0 è tangenziale di quattro diverse rigate R, e con ciascuna di queste g avrà tre intersezioni distinte; anzi tutte queste $3 \cdot 4 = 12$ intersezioni saranno distinte fra loro, perchè due punti di diverse terne non potrebbero coincidere che in punto singolare della congruenza (risultando questo comune già a tre R non formanti fascio). Dovendo pertanto quei 12 punti distinti cadere fra le $2p$ intersezioni semplici di g colla superficie focale, sarà $2p \geq 12$, ossia $p \geq 6$. Ma noi sappiamo che deve essere invece $p \leq 5$ (n° 43); è dunque escluso che le R possano essere sviluppabili biquadratiche (¹).

Concludiamo pertanto: *In ogni congruenza* $(3, n)$ *priva di linea singolare e riferibile a una rigata ellittica, alle generatrici di questa rigata devono corrispondere nella congruenza rigate quadriche.*

§ 7.

Congruenze $(3, n)$ rappresentabili sopra una rigata ellittica.

49. — Le considerazioni svolte nel § prec. permettono di determinare senza difficoltà tutte le congruenze del 3° ordine prive di linea singolare e rappresentabili sopra una rigata ellittica.

Sappiamo intanto che una tale congruenza deve contenere una serie ∞^1 ellittica di rigate quadriche, inviluppanti la superficie focale; e che le ∞^1 quadriche sostegni di queste rigate devono stare in una rete Σ. Questa rete potrà anche avere infiniti punti basi; ma certo le ∞^1 rigate della nostra congruenza non potranno avere a comune nessuna direttrice (se no tutti i punti di questa sarebbero singolari per la congruenza). Potranno invece avere a comune una o due generatrici. Di qui si trae che la rete Σ:

o avrà soltanto un numero finito di punti basi (dunque *otto* punti basi, ma che potrebbero non essere tutti distinti);

oppure si comporrà delle quadriche passanti per una data retta (che sarà generatrice comune delle rigate da considerarsi) e per altri *quattro* punti fuori di questa (eventualmente non tutti distinti);

ovvero infine si comporrà di quadriche aventi a comune due rette dello stesso sistema (e non altri punti fuori di queste).

Esamineremo ora separatamente questi tre casi. I punti basi isolati (nei primi due casi) si supporranno per semplicità tutti distinti; ma ciò che diremo potrebbe estendersi senza difficoltà al caso di punti basi infinitamente vicini.

(¹) Al momento di licenziare le bozze di questa Memoria mi accorgo che quest'ultimo ragionamento si potrebbe modificare in guisa tale da rendere superfluo quello del n° 47 (facendo vedere anzitutto che g non può avere a comune con R' più di due punti distinti, ed esaminando poi quante loro intersezioni possono cadere in ciascuno di questi punti). Il lettore se ne persuaderà facilmente.

Essendo il genere numerico p_n di una rigata ellittica eguale a -1, le formole dei n[i] 34-35 diventano per questo caso:

$$t = \frac{(n-p-1)(n-p+2)}{2} + 1 - \tau \qquad d = \frac{(n-p-1)(n+p-4)}{2} - 3 + 3\tau$$

$$R = 3\left\{\binom{p+1}{2} + 2 - 3\tau - \tau'\right\}.$$

Possiamo anche osservare che, nel sistema ∞^1 di rigate quadriche aventi per luogo la nostra congruenza, ciascuna quadrica sarà tangenziale di altre 4; e le $2 . 4 = 8$ intersezioni (tutte distinte) di una sua generatrice arbitraria con queste 4 saranno le sole intersezioni di quella generatrice colla superficie focale della congruenza, all'infuori dei propri fuochi. Ora queste intersezioni devono essere in numero di $2p$; sarà perciò $2p = 8$, ossia $p = 4$.

Le congruenze $(3, n)$ *riferibili a una rigata ellittica sono tutte di genere sezionale* 4. Esse avranno perciò una superficie focale di 12° ordine e di classe $2(n+3)$, con una curva cuspidale di ordine $R = 36 - 9\tau - 3\tau'$. (Sarà anzi sempre $\tau' = 0$, e quindi $R = 36 - 9\tau$).

I.

50. — Consideriamo una rete Σ di quadriche con otto punti basi $(A_1, A_2, \dots A_8)$. Le generatrici di ambo i sistemi di queste quadriche formano, com'è noto, un complesso cubico Γ, che i signori STURM (1) e REYE (2) hanno incontrato in varie ricerche, e che è stato poi oggetto di speciale studio da parte del signor MONTESANO, nella Memoria: *Su di un complesso di rette di 3° grado* (Mem. Acc. di Bologna, ser. V, t. III; 1893). Il cono del complesso uscente da un punto generico dello spazio è quello che proietta la quartica base del fascio formato dalle quadriche di Σ che passano per questo punto.

Questo complesso può rappresentarsi birazionalmente sullo spazio punteggiato, e ci sarà anzi utile una delle rappresentazioni che ne ha date il signor MONTESANO (Mem. cit., n° 11, p. 18 e seg.). Consideriamo uno dei punti basi della rete, p. e. A_1. Un raggio generico u del complesso appartiene a una quadrica determinata della rete; e sopra questa quadrica, la quale contiene il punto A_1, sarà pure individuata la generatrice v di sistema opposto a u passante per A_1 stesso. Il punto uv si assuma allora come corrispondente al raggio u. Viceversa, dato nello spazio un punto generico P, vi sarà una ed una sola quadrica della rete che contiene la retta $A_1 P$, e la seconda generatrice di questa quadrica passante per P sarà la retta corrispondente a P nel complesso.

La corrispondenza è dunque tale che due elementi omologhi qualunque si appartengono. Si vede altresì che: *A rette u di una stessa rigata quadrica corrispondono punti di un raggio della stella* A_1 (di quel raggio che è direttrice di questa rigata). La rete Σ viene così riferita in corrispondenza razionale $(1, 2)$ alla stella di raggi A_1, e birazionalmente a un'involuzione I_2 di questa stella. In particolare agli ∞^2 fasci di quadriche contenuti nella rete Σ corrisponderanno nella stella A_1 i coni

(1) " Journ. de Crelle ", Bd. 70; " Math. Ann. ", Bd. 6.

(2) *Geometrie der Lage*, 3[te] Aufl., Bd. 3, p. 137.

cubici proiettanti le quartiche basi di questi fasci, ossia gli ∞^2 coni cubici passanti per i sette raggi $A_1 A_i \equiv a_{1i} (i = 2, 3, \ldots 8)$. L'involuzione I_2 è definita appunto da questa rete di coni.

Ora, la congruenza $(3, n)$ che noi andiamo cercando deve comporsi delle generatrici di un sistema ∞^1 ellittico d'indice *tre* di quadriche, contenuto nella rete Σ. A un tale sistema di quadriche (che può concepirsi come una cubica piana, entro la rete Σ considerata come un piano) corrisponderà nella stella A_1 un cono di 9° ordine appartenente all'involuzione I_2, e avente come tripli i sette raggi (fondamentali) a_{1i}. Questo stesso cono, come luogo di punti, sarà l'immagine della congruenza formata dalle generatrici di ambo i sistemi delle ∞^1 quadriche considerate.

Ma questa congruenza sarà di 6° ordine, poichè per ogni punto dello spazio passano tre quadriche del sistema ∞^1, e due generatrici di ciascuna di queste. A noi occorrerà pertanto un sistema ∞^1 di quadriche $|R|$ tale che, variando una quadrica entro di esso, i due sistemi di rette di questa quadrica descrivano due congruenze distinte, ciascuna delle quali sarà allora di 3° ordine. E perchè questo avvenga, è necessario e sufficiente che il cono di 9° ordine corrispondente al sistema $|R|$ di quadriche nella stella A_1 si spezzi in due coni ellittici non appartenenti all'involuzione I_2 (e perciò mutuamente coniugati in questa involuzione).

Ora, questi due coni non potranno essere che uno di 3° ordine e uno di 6°, oppure uno di 4° ordine e uno di 5°. Nel primo caso il cono cubico dovrà contenere sei dei 7 raggi fondamentali a_{1i} (e non il settimo), e il cono di 6° ordine avrà quegli stessi sei raggi come generatrici doppie e il settimo come generatrice tripla. Nel secondo caso, il cono quartico conterrà come doppî due dei 7 raggi fondamentali e passerà semplicemente per gli altri cinque, mentre il cono quintico avrà questi ultimi per doppî e i primi come semplici. — Viceversa, ogni cono siffatto, insieme al suo coniugato nell'involuzione I_2, dà luogo a un cono (riducibile) di 9° ordine come a noi occorre. E ciascuno di quei coni può scegliersi entro un numero finito (7, oppure $\binom{7}{2} = 21$) di sistemi lineari ∞^3.

Esistono dunque certo congruenze del 3° ordine contenute nel complesso cubico delle generatrici di una rete generale di quadriche, e riferibili a una rigata ellittica. E noi le abbiamo sostanzialmente già determinate tutte, perchè abbiamo detto quali sono le superficie che ne sono immagini in una nota rappresentazione di quel complesso cubico sullo spazio. Precisamente, in ogni complesso Γ sono contenuti $7 + 21 + 21 + 7 = 56$ sistemi ∞^3 di congruenze soddisfacenti alle condizioni richieste. Ma questi 56 sistemi si distribuiscono in 28 coppie, tali che due sistemi ∞^3 di una medesima coppia provengono dagli stessi ∞^3 sistemi $|R|$ di quadriche, e soltanto da generatrici di opposte schiere di questi. Chiameremo per brevità *coniugate* due congruenze costituite dalle generatrici di diverse schiere sopra un medesimo sistema $|R|$ di quadriche. E allora potremo dire che i 56 sistemi ∞^3 di congruenze di 3° ordine da noi trovati in Γ si distribuiscono in 28 coppie, tali che i due sistemi ∞^3 di ciascuna coppia si compongono di congruenze mutuamente coniugate.

51. — Proponiamoci ora di studiare un po' più da vicino queste congruenze, determinandone la classe, i punti singolari, ecc.

Ricordiamo intanto che la rete Σ di quadriche contiene un sistema ∞^1 di coni, d'indice *quattro* e di genere tre; e che la curva K (pure di genere tre) luogo dei vertici di questi coni è di 6° ordine.

Si riconosce facilmente (Montesano, Mem. cit., p. 19) che, nella rappresentazione data del complesso cubico sullo spazio punteggiato, una superficie di ordine μ la quale abbia il punto A_1 come ρ^{plo}, le rette a_{1i} come multiple di ordine σ_i, e la curva K come multipla di ordine κ, è l'immagine di una congruenza (contenuta nel complesso Γ) di ordine $m = 4(\mu - \kappa) - \rho - \Sigma\sigma_i$ e di classe $n = 3(3\mu - \Sigma\sigma_i - 4\kappa)$ (dunque sempre multipla di 3). Ora le superficie immagini delle congruenze che cerchiamo sono tutte coni di vertice A_1 (onde $\rho = \mu$), e non passano per la curva K (onde $\kappa = 0$). Sarà perciò:

$$m = 3\mu - \Sigma\sigma_i \qquad n = 3(3\mu - \Sigma\sigma_i) = 3m.$$

E poichè già sappiamo che $m = 3$, ne segue tosto $n = 9$; il che viene anche confermato dalle formole scritte, in ogni singolo caso.

Le congruenze di 3° ordine che così otteniamo sono tutte di classe 9.

La linea cuspidale della superficie focale (di 12° ordine) dovrà avere la proprietà che il fascio delle quadriche di Σ passanti per un suo punto qualunque incontri il sistema $|R|$ secondo tre quadriche coincidenti; sia cioè, per così dire, un fascio tangente d'inflessione del sistema $|R|$. Essa si comporrà dunque delle quartiche basi dei nove fasci tangenti d'inflessione del sistema $|R|$; e sarà perciò, complessivamente, di 36° ordine. Ciò è d'accordo colla formola del n° 49, dovendosi porre in questa $\tau = \tau' = 0$.

Questa congruenza non si è presentata nelle mie ricerche precedenti; ma ne è anche chiaro il motivo. Nel mio lavoro del 1894 io aveva infatti supposto, a proposito delle congruenze di genere sezionale 4 (nota (2) a p. 20, e p. 21), che la curva cuspidale della superficie focale non si spezzasse: le maggiori difficoltà allora incontrate mi avevano indotto a porre questa restrizione. E nel caso attuale, come si è visto, la detta curva si spezza in 9 quartiche. Per la stessa ragione non mi si sono presentate allora nemmeno le congruenze che incontreremo al n° 55.

52. — I punti singolari della congruenza non potranno cadere che nei punti comuni a tutte le quadriche del sistema $|R|$, ossia negli otto punti basi della rete Σ; e nei vertici di quei coni che appartengono al sistema $|R|$. Viceversa, questi punti saranno anche tutti singolari per la congruenza.

Quanto al cono singolare uscente dal punto A_1, è facile determinarlo in base all'osservazione seguente: Considerate nel complesso Γ due congruenze $(3, 9)$ coniugate, quel cono di genere uno, che è immagine di una di queste nella rappresentazione adottata del complesso cubico sopra S_3, appartiene all'altra come cono singolare. Si avrà dunque sempre un cono ellittico di ordine ≤ 6.

Siccome poi i punti $A_2, A_3, \ldots A_8$ si trovano tutti, rispetto alla rete Σ, nelle stesse condizioni di A_1, così anche ciascuno di essi sarà vertice di un cono ellittico di raggi della congruenza. E una volta noto il cono singolare A_1, si potranno determinare gli altri 7, valendosi della proprietà (Montesano, Mem. cit., p. 6-7) che ogni rigata quadrica della rete Σ contiene uno ed un solo raggio di ciascuna stella A_i; e che, assumendo come corrispondenti, in due determinate di queste stelle, i raggi che appartengono a una stessa rigata, si viene a stabilire fra le due stelle una corrispondenza cremoniana di 5° ordine con sei raggi fondamentali doppî: quelli che proiettano i rimanenti 6 punti A_i. I coni singolari uscenti da $A_2, \ldots$ si otterranno dunque applicando al cono A_1 queste trasformazioni cremoniane. Ecco il risultato a cui si giunge:

Vi sono due diversi tipi di congruenze (3, 9) *contenute nel complesso* Γ *e costituite da un sistema* ∞^1 *ellittico di rigate quadriche.*

Per le congruenze del primo tipo, gli otto punti A_i *sono vertici rispett. di due coni singolari cubici* (A_1, A_2) *e di sei coni di 5° ordine* ($A_3, \ldots A_8$). *Queste congruenze hanno 15 raggi doppî di 1ª specie,* che sono precisamente le congiungenti a_{ik} per $i, k = 3, 4, \ldots 8$; il raggio a_{12} non appartiene invece alla congruenza; le altre rette a_{1i}, a_{2i} ne sono raggi semplici.

Le congruenze del secondo tipo contengono invece due coni sestici (A_1, A_2) *e sei coni quartici* ($A_3, \ldots A_8$). *Esse hanno un raggio triplo* (a_{12}) *e 12 raggi doppî* (a_{1i}, a_{2i}) *di prima specie* (che equivalgono insieme a 15 raggi doppî); le altre congiungenti a_{ik} ne sono raggi semplici.

Due congruenze coniugate sono sempre di tipo diverso.

Vediamo infine quanti coni quadrici contengano queste congruenze (ossia quanti coni vi siano in un sistema $|R|$). Nella nostra rappresentazione del complesso cubico sullo spazio, a ogni generatrice di un cono contenuto nella rete Σ corrisponde il punto vertice di questo cono; e viceversa a questo punto corrisponde nel complesso ogni generatrice di quel cono. Bisogna dunque cercare le intersezioni del cono di vertice A_1 e di ordine $\nu = 3, 4, 5, 6$ che è immagine della nostra congruenza (3, 9) colla curva K^6 luogo dei vertici dei coni quadrici contenuti nella rete Σ, ovverosia col cono che proietta questa curva da A_1.

Si trova allora che, delle 6ν generatrici comuni ai due coni, sempre $6(\nu - 1)$ cadono nei raggi fondamentali a_{1i}. E di qui si conclude: *La congruenza* (3, 9) *contiene sempre sei coni quadrici, appartenenti al sistema* $|R|$. È chiaro altresì che *due congruenze coniugate contengono gli stessi sei coni quadrici.* Pel vertice di uno qualunque di questi coni passa anche un raggio isolato della congruenza (appartenente alla quadrica tangenziale di quel cono nel sistema $|R|$).

I 14 coni singolari verificano appunto le due relazioni generali dei nⁱ 40 e 41, che in questo caso diventano:

$$\Sigma_3 \binom{h}{2} - \Sigma_1 \binom{h}{2} = 60 \qquad 2\Sigma_3 h - \Sigma_1 h = 60$$

dove le somme Σ_3 vanno estese agli 8 coni ellittici, e le somme Σ_1 ai sei coni quadrici.

53. — Considerata la rete Σ di quadriche come un piano, e, per conseguenza, il sistema ∞^1 dei coni di questa rete come una quartica q (di genere tre), il sistema delle singole schiere rigate contenute nelle quadriche di Σ si potrà concepire a sua volta come un *piano doppio,* di cui la quartica q sarebbe la curva limite (o di diramazione). La ricerca del nostro sistema $|R|$ di quadriche si riconduce allora a quella di una cubica ellittica la quale, nel piano doppio, sia immagine di una coppia di curve ellittiche (anzichè di un'unica curva irriducibile, contenente un'involuzione ellittica di coppie di punti).

Per questo è condizione *necessaria* che la cubica sia tangente alla quartica q in ogni sua intersezione con essa, dunque in *sei* punti (che saranno i coni quadrici del sistema $|R|$). Ma questa condizione, che sarebbe anche sufficiente se si trattasse di una curva razionale, non lo è per una curva di genere > 0.

La questione può tuttavia risolversi completamente, e in modo assai semplice, considerando il piano doppio come proiezione di una superficie cubica da un suo punto; e il breve ragionamento che occorre cammina di pari passo col nostro del n° 50.

Dei 64 sistemi ∞^3 di cubiche tangenti in sei punti a una data quartica [1] risulta pertanto che 28 hanno, rispetto al piano doppio con quella quartica come curva limite, la proprietà dianzi accennata. Questi 28 sistemi sono precisamente quelli per i quali i punti di contatto vengono segati sulla quartica dalle ∞^3 coniche passanti per i punti di contatto di una bitangente; sicchè essi vengono a corrispondere in certo qual modo alle 28 bitangenti della quartica.

II.

54. — Consideriamo ora una rete Σ di quadriche aventi a comune una generatrice g e quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 fuori di questa. Le generatrici di queste quadriche di sistema opposto a g costituiranno allora il complesso lineare speciale avente g stessa per direttrice (asse); questo complesso si staccherà perciò dal complesso cubico formato da tutte le rette delle ∞^2 quadriche di Σ, e resterà un complesso quadratico Γ, costituito da tutte le generatrici dello stesso sistema di g.

D'altra parte in questo caso le quadriche di Σ passanti per un punto generico P hanno a comune, oltre alla retta g, una cubica passante per P e avente g come corda; e le generatrici di queste quadriche del sistema di g e passanti per P hanno per luogo il cono quadrico che da P stesso proietta quella cubica.

Poichè in questo caso le generatrici dei due sistemi delle quadriche di Σ formano due complessi distinti, noi possiamo affermare sin d'ora che, prendendo entro Σ un qualsiasi sistema ∞^1 di quadriche d'indice 3 e ellittico, e considerando sopra queste quadriche le generatrici del sistema di g, otterremo una congruenza di 3° ordine soddisfacente alle condizioni imposte. Conviene però esaminare più da vicino la natura del complesso Γ, per potere poi costruire quelle congruenze nel modo più semplice.

---

[1] Cfr. ad es. Clebsch-Lindemann: *Vorlesungen über Geometrie*, I, p. 853. La determinazione di questi sistemi di cubiche 6-tangenti alla quartica risale però a Hesse e Steiner, "Journ. de Crelle", 49. Osserviamo anche che da un noto teorema di Hesse (l. c.) — il quale soltanto più tardi fu dimostrato rigorosamente —, che cioè l'equazione di ogni quartica piana può mettersi sotto forma di un determinante simmetrico di 4° ordine ad elementi lineari nelle coordinate eguagliato a zero segue che la quartica costituita dai coni di una rete generica di quadriche è una quartica affatto generale.

Una retta generica passante per uno dei punti A_i appartiene certo a una quadrica della rete Σ; e essendo sghemba con g, sarà generatrice dello stesso sistema di questa, e apparterrà perciò al complesso quadratico Γ. Questo complesso contiene dunque per intero le quattro stelle di rette A_i, e sarà perciò un complesso tetraedrale, avente $A_1A_2A_3A_4$ come tetraedro fondamentale; sarà anzi quel complesso, completamente determinato, che ha questo tetraedro fondamentale, e contiene il raggio g.

Ora un complesso tetraedrale può rappresentarsi sullo spazio di piani in guisa tale che ogni raggio del complesso appartenga al piano omologo, e sia precisamente intersezione di questo col piano che ad esso corrisponde in una determinata collineazione (1). In questa rappresentazione a ogni congruenza di ordine m contenuta nel complesso tetraedrale corrisponde un inviluppo ∞^2 di piani di classe m; e quella congruenza potrà quindi ottenersi come luogo delle intersezioni delle coppie di piani corrispondenti di due inviluppi di piani di classe m, fra loro collineari. Viceversa, due inviluppi di piani siffatti generano anche sempre una congruenza di ordine m, contenuta in un complesso tetraedrale; e la classe di questa congruenza è in generale $3m$. Ma se uno dei piani uniti della collineazione — che sono poi i piani fondamentali del complesso tetraedrale — appartiene a uno e quindi anche all'altro dei due inviluppi con una certa multiplicità k, il piano stesso (come piano rigato) si staccherà dalla congruenza con eguale multiplicità, e la classe di questa si ridurrà perciò a $3m-k$.

Più generalmente, se i quattro piani uniti appartengono ai due inviluppi collineari rispett. colle multiplicità k_1, k_2, k_3, k_4 (≥ 0), la congruenza generata da questi inviluppi sarà di ordine m, e di classe:

$$n=3m-(k_1+k_2+k_3+k_4)\,;$$

e sussisteranno altresì le proprietà seguenti:

I quattro piani del tetraedro fondamentale saranno piani singolari della congruenza, e conterranno inviluppi di rette di questa delle classi rispett. k_1, k_2, k_3, k_4 (supposti questi numeri >0);

I vertici dello stesso tetraedro rispett. opposti a quei piani saranno punti singolari della congruenza, vertici di coni degli ordini rispett. $2m-(k_2+k_3+k_4)$, $2m-(k_1+k_3+k_4)$, ... semprechè, ben inteso, anche tali numeri siano >0;

Lo spigolo del tetraedro fondamentale intersezione dei due piani multipli di ordini k_1 e k_2 sarà raggio multiplo della congruenza di ordine $m-(k_1+k_2)$ (supposto >0); e analogamente per gli altri cinque spigoli.

Da queste proprietà generali si dedurranno facilmente quelle delle congruenze $(3,n)$ che andiamo cercando.

55. — Una congruenza di 3° ordine (come a noi occorre) contenuta in un complesso tetraedrale si potrà dunque generare con due inviluppi di piani di 3ª classe,

(1) Notissima rappresentazione del complesso tetraedrale, esposta in lavori di Weiler, “Zeitschr. f. Math. u. Ph.„, 22; Loria, “Atti della R. Acc. di Torino„, vol. XIX, dove si vedranno anche citati lavori anteriori di Klein e Lie; nella 2ª e 3ª ediz. della *Geometrie der Lage* del Reye. e nell'opera più volte cit. di Sturm (I, pp. 342, 369-71).

fra loro collineari. Solo che, per avere una congruenza non razionale, ma riferibile invece a una rigata ellittica, si dovranno prendere due inviluppi costituiti dai piani tangenti di due curve piane generali di 3ª classe γ e γ'. Viceversa, due inviluppi siffatti, tra loro collineari, genereranno sempre una congruenza di 3° ordine, rappresentabile sopra una rigata ellittica, e le coppie di tangenti omologhe delle due curve γ e γ' saranno assi di fasci di piani contenuti rispett. nei due inviluppi e fra loro proiettivi, i quali genereranno le ∞^1 rigate quadriche che già sappiamo (§ 6) dover essere contenute nella congruenza. Queste rigate avranno anche tutte *una* generatrice a comune: l'intersezione dei piani delle curve γ e γ'.

La congruenza così ottenuta sarà in generale di classe 9; avrà gli spigoli del tetraedro fondamentale della collineazione come raggi tripli (di prima specie); e da ciascun vertice di questo tetraedro escirà un cono di 6° ordine e genere uno di raggi della congruenza, coi tre spigoli del tetraedro come raggi tripli. La classe della congruenza può scendere tuttavia fino a cinque, prendendo i due inviluppi generatori in modo che contengano uno o più dei quattro piani uniti della collineazione; ma nessuno di questi piani può essere piano multiplo dei due inviluppi. In ogni caso dai vertici del tetraedro fondamentale escono altrettanti coni ellittici della congruenza. E questa è sempre di genere sezionale 4 (n° 49). Non ci fermiamo a esaminare separatamente i varî casi, anche perchè incontreremo più avanti (§ 12) le congruenze analoghe razionali, generate da inviluppi di 3ª classe non degeneri.

Poichè i piani delle due curve γ e γ' sono tripli per i due inviluppi generatori della congruenza, così si conclude facilmente che il raggio u loro intersezione è un *raggio triplo* della congruenza. E questo è precisamente un raggio triplo di 2ª specie. Per ogni punto di u i tre raggi della congruenza che ne escono si possono pensare disposti secondo tre generatrici consecutive del cono del complesso tetraedrale Γ uscente da questo punto; e ogni piano per u godrà della proprietà duale. La proiettività determinata dal complesso Γ fra la punteggiata u e il fascio di piani u (nella quale a ogni punto di u corrisponde il piano tangente lungo u al cono del complesso uscente da quel punto) è precisamente quella da noi considerata in generale al n° 14.

Le coppie di tangenti omologhe delle due curve γ e γ' determinano sopra u una corrispondenza (3, 3), la quale avrà *sei* punti uniti. Nel caso più generale di una congruenza (3, 9), *ciascuno di questi sei punti sarà vertice di un cono quadrico di rette della congruenza*, il quale conterrà il raggio u e apparterrà al sistema ∞^1 $|R|$ di rigate quadriche. E questi saranno anche i soli coni contenuti nel sistema $|R|$ di quadriche. Questi sei coni formeranno insieme la rigata $R^{n+3} \equiv R^{12}$ delle rette della congruenza che si appoggiano ad u.

Se però uno o più piani uniti della collineazione sono comuni ai due inviluppi generatori della congruenza, nelle intersezioni di questi piani con u cadranno altrettanti punti uniti della corrispondenza (3, 3) dianzi considerata, e quindi altrettanti dei sei punti singolari della congruenza posti sopra u. Da ciascuno di questi punti escirà allora soltanto un fascio di rette della congruenza (contenente il raggio u).

La retta u è *sestupla* per la superficie focale (di 12° ordine); ciò segue da quanto si è detto al n° 15, e si può anche riconoscere direttamente.

Essa può considerarsi altresì come facente parte della curva cuspidale della superficie focale. All'infuori di essa vi è una curva cuspidale di 27° ordine, composta delle 9 cubiche che, insieme ad u, formano le curve basi dei 9 fasci di quadriche tangenti d'inflessione al sistema $|\,R\,|$.

III.

56. — Consideriamo infine una rete Σ di quadriche aventi a comune due generatrici u, u' dello stesso sistema (e non altri punti). Le quadriche di questa rete che passano per un punto generico P formano un fascio, la cui curva base si compone di quattro rette; le generatrici u e u', la retta v condotta per P a incontrare le due precedenti, e un'altra secante comune delle u, u', e sia v', completamente determinata dalla v, e variabile con essa. Le generatrici di queste quadriche che passano per P e appartengono al sistema di u, u', stanno dunque tutte nel piano Pv', e formano perciò un fascio; dal che si trae che il complesso di tutte le generatrici del detto sistema sopra le ∞^2 quadriche di Σ è un complesso lineare (non speciale).

D'altronde, dal complesso cubico formato da tutte le rette appartenenti a una di queste quadriche si staccano nel caso attuale i due complessi lineari speciali di assi u e u' (solo che la quadrica di Σ contenente una retta generica appoggiata ad u o u' è una coppia di piani): e rimarrà perciò un complesso lineare, contenente tutte quelle rette che sono sghembe con u e u'.

Anche in questo caso (come al n° 54), prendendo nella rete Σ un qualsiasi sistema ∞^1 di quadriche d'indice tre e ellittico, le generatrici di queste quadriche dello stesso sistema di u, u' formeranno una congruenza di 3° ordine rappresentabile sopra una rigata ellittica. Ma questa congruenza sarà contenuta in un complesso lineare non speciale; e sarà perciò una congruenza (3, 3), caso particolare di quella incontrata al n° 20.

La superficie F^6 (di S_4) immagine di questa congruenza conterrà un sistema ∞^1 ellittico di coniche, aventi a comune due punti; gli ∞^1 piani di queste coniche formeranno perciò un cono cubico ellittico (di 2ª specie). Diremo dunque:

La congruenza (3, 3) *contenuta in un complesso lineare non speciale diventa riferibile a una rigata ellittica quando la superficie* F^6 *di* S_4 *che ne è immagine può segarsi dalla* M_3^2 *immagine del complesso lineare con un cono cubico ellittico di 2ª specie.*

Le rette u e u', a cui corrispondono sulla F^6 le due intersezioni della M_3^2 colla retta asse del cono cubico, sono raggi tripli di 2ª specie della congruenza, come il raggio u nel caso precedente.

La superficie focale di questa congruenza (di 12° ordine e 12ª classe) è una rigata, avente u e u' come direttrici (sestuple): essa è infatti l'inviluppo di ∞^1 quadriche della rete Σ, e sappiamo che due qualunque di queste (in particolare due consecutive) hanno come intersezione variabile una coppia di rette appoggiate a u e u'. La stessa rigata ha 18 generatrici cuspidali, che costituiscono, a coppie e insieme con u e u', le curve basi dei 9 fasci tangenti d'inflessione al solito sistema ∞^1 di quadriche.

La formola dell'ordine della curva cuspidale (n° 48) non è applicabile in questo caso, essendo stata stabilita in base alla considerazione del carattere t, che non ha senso per congruenze contenute in un complesso lineare: essa dà però egualmente $R = 18$.

Nella rete Σ ogni cono è spezzato in una coppia di piani; e le ∞^1 coppie di piani formano un sistema d'indice due. Il nostro sistema ∞^1 di quadriche conterrà dunque 6 coppie di piani, e perciò *la congruenza* (3, 3) *conterrà 12 fasci di rette.* Di questi fasci, sei conterranno il raggio u, e gli altri sei conterranno il raggio u': quelli e questi avranno, a coppie, un raggio a comune. Le rigate $R^{n+3} \equiv R^6$ formate dalle rette della congruenza che si appoggiano a u o u' si comporranno rispett. di quelle due sestuple di fasci.

§ 8.

Congruenze razionali. Congruenze di genere sezionale zero.

57. — Per le congruenze razionali, essendo $p_n = 0$, le formole dei n[i] 34-35 diventano:

$$t = \frac{(n-p-1)(n-p+2)}{2} - \tau \qquad d = \frac{(n-p-1)(n+p-4)}{2} + 3\tau$$

$$R = 3\left\{\binom{p+1}{2} + 1 - 3\tau - \tau'\right\}.$$

Osserviamo in particolare che d non può essere nullo se non quando sia, oltre che $\tau = 0$, anche $p = n - 1$, oppure $n + p - 4 = 0$. E quest'ultima relazione, se $n > p$ (n° 21), è soddisfatta soltanto per $n = 3$, $p = 1$ (¹). Possiamo dunque concludere (tenuto conto anche dei risultati precedenti):

Le sole congruenze di 3° ordine prive di raggi multipli di prima specie sono:
la congruenza (3, 3) *contenuta in un complesso lineare;*
le congruenze $(3, n)$ *di genere sezionale* $p = n - 1$ $(n \leq 7)$;
la congruenza (3, 3) *di genere sezionale uno.*

Per quest'ultima, che è una congruenza nota, si sa che è $\tau = 0$ e perciò anche $d = 0$.

D'altronde, poichè un punto triplo non apparente della superficie F^{n+3} produce un abbassamento di tre unità nel genere delle sezioni iperpiane che lo contengono, così per $p < 3$ sarà certo $\tau = 0$. E lo stesso avverrà per $p = 3$, perchè dei sistemi lineari ∞^5 semplici di curve piane di genere 3 (di cui sono noti tutti i tipi) nessuno contiene un sistema lineare ∞^4 irriducibile di curve razionali. Per tutti questi casi (e sempre quando sia $\tau = 0$) sarà precisamente:

$$t = \frac{(n-p-1)(n-p+2)}{2} \qquad d = \frac{(n-p-1)(n+p-4)}{2}.$$

E se è pure $\tau' = 0$, sarà:

$$R = 3\left\{\binom{p+1}{1} + 1\right\}$$

vale a dire l'ordine della curva cuspidale della superficie focale dipenderà (al pari

(¹) Poichè per $n = 4$, $p = 0$ non si troverebbero che congruenze composte di ∞^1 fasci di rette, e aventi perciò infiniti punti singolari.

dell'ordine di questa superficie) soltanto dal genere sezionale della congruenza, e non dalla sua classe.

58. — *Congruenze di genere sezionale zero.* — Le sole congruenze di rette di genere sezionale zero e non composte di un sistema ∞^1 di fasci di rette sono (1):

1° La congruenza (1, 3) delle corde di una cubica sghemba;

2° La congruenza (3, 1) duale della precedente;

3° Una congruenza (2, 2) con un fascio di rette doppie, che è una particolare intersezione di un complesso lineare speciale con un complesso quadratico.

Di queste, soltanto la seconda è di 3° ordine, ed è priva altresì di linea singolare (anzi non ha alcun punto singolare). *Vi è dunque una sola congruenza del 3° ordine priva di linea singolare e di genere sezionale zero;* e questa è la congruenza duale di quella delle corde di una cubica sghemba, ossia *la congruenza cremoniana* (3, 1) *generata da due piani collineari in posizione generale.* Questa congruenza ha ∞^1 piani singolari, contenenti ciascuno un inviluppo quadrico di rette (n° 1). Due qualunque di questi piani sono incontrati dalle rette della congruenza in coppie di punti corrispondenti di una determinata collineazione; e tutti sono osculatori a una medesima cubica sghemba γ.

La superficie focale di questa congruenza sarebbe, secondo le formole generali, di ordine quattro e classe zero, con una cubica cuspidale. Essa è infatti la *sviluppabile* circoscritta alla cubica γ; ed ha per piani tangenti gli stessi ∞^1 piani singolari.

§ 9.

Congruenze di genere sezionale uno.

59. — Le congruenze (3, n) di genere sezionale $p = 1$ saranno rappresentate nello spazio S_5 da superficie razionali F^{n+3} a sezioni ellittiche. Ora è noto che le superficie razionali a sezioni ellittiche sono tutte di ordine non superiore a *nove* (2); sarà perciò $n + 3 \leq 9$, ossia $n \leq 6$.

Le congruenze (3, n) *prive di linea singolare e di genere sezionale uno sono tutte di classe* ≤ 6.

È noto (3) che queste congruenze esistono anche effettivamente, per ciascuna delle classi $n = 2, 3, 4, 5, 6$; e che per $n = 5$ ve ne sono due tipi affatto distinti, corrispondenti alle due diverse specie di superficie razionali F^8 a sezioni ellittiche (4).

Queste congruenze avranno, secondo le nostre formole generali, una superficie focale di 6° ordine e di classe $2n$, con curva cuspidale pure di 6° ordine.

Esse non potranno contenere coni ellittici, e nemmeno coni razionali dai cui vertici non escano raggi isolati della congruenza, perchè se no la rigata (riducibile)

---

(1) Cfr. ad es. la mia Mem. cit. degli Annali di Matem., n° 3.

(2) Del Pezzo, *Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni,* " Rend. di Palermo ", t. I.

(3) Cfr. i lavori dei sig.ri Segre e Castelnuovo citati nell'Introduzione, nonchè la mia Memoria degli " Annali di Matem. ".

(4) Del Pezzo, l. c.

formata dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta generica passante pel vertice di un tal cono sarebbe di genere ≥ 2 (cfr. n° 8).

I coni singolari di queste congruenze saranno dunque tutti razionali; i loro vertici saranno punti doppi della superficie focale, e per questi passerà sempre anche un raggio isolato della congruenza.

Le due formole generali dei n[i] 40 e 41, essendo nulle in questo caso le somme Σ_3, diventano:

$$\Sigma \binom{h}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2} \qquad \Sigma h = 2(n+3)$$

essendo in entrambe estesa la somma Σ a tutti i coni singolari della congruenza.

La congruenza avrà inoltre $d = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ raggi doppi di prima specie, ciascuno dei quali dovrà appartenere ad almeno un cono singolare (n° 17).

60. — Nel caso estremo $n = 6$ vi sono dunque *sei* raggi doppi, quindi almeno altrettanti coni singolari di ordine ≥ 3. Ora le due somme $\Sigma \binom{h}{2}$ e Σh, per $n = 6$, valgono entrambe 18, e risultano perciò già esaurite da sei coni cubici; concludiamo dunque che i sei coni a cui appartengono rispett. i raggi doppi sono precisamente di 3° ordine, e sono anche i soli coni della congruenza.

D'altronde è anche noto che sopra una F^9 razionale a sezioni ellittiche l'ordine di ogni curva è multiplo di tre; e la nostra congruenza, di classe 6, non può certo contenere coni di ordine ≥ 6.

Ogni congruenza (3, 6) *di genere sezionale uno contiene dunque sei coni cubici razionali, le cui generatrici doppie sono altresì raggi doppi della congruenza.* Ciascuno di questi coni contiene i vertici degli altri cinque; e all'infuori di questi non vi sono altri coni singolari.

61. — Esclusa la congruenza (3, 6), per tutte le altre la superficie immagine F^{n+3} conterrà almeno un fascio di coniche; e i piani di queste coniche formeranno (per ciascun fascio) una M_3^{n+1}, normale (al pari della F^{n+3}) per uno spazio S_{n+3}. Da questa M_3^{n+1} (che non è certo contenuta nella M_4^2 fondamentale, poichè se no la congruenza si comporrebbe di ∞^1 coni o inviluppi quadrici di rette) la F^{n+3} potrà segarsi con una quadrica non degenere (la M_4^2 fondamentale); e l'intersezione residua di queste due varietà si comporrà di $2(n+1) - (n+3) = n-1$ piani. Di questi $n-1$ piani, sulla M_4^2 fondamentale, $n-2$ dovranno appartenere a un medesimo sistema (*punti*) e il rimanente al sistema opposto (*piani*); perchè così degli $n+1$ punti che un piano generico del primo o secondo sistema della M_4^2 ha comuni colla M_3^{n+1} ne resteranno appunto rispett. 3 e n sulla F^{n+3}.

Di qui si conclude: *All'infuori della* (3, 6), *tutte le altre congruenze* (3, n) *di genere sezionale uno contengono almeno una serie razionale* ∞^1 *di rigate quadriche* (inviluppanti la superficie focale), *tale che ogni retta della congruenza appartiene a una ed una sola di queste rigate. Ciascuna di queste serie* ∞^1 *contiene in particolare* $n-2$ *coni quadrici e un inviluppo piano di 2ª classe; nonchè* $5-n$ *rigate spezzate in coppie di fasci di raggi* (corrispondentemente a un egual numero di coniche spezzate in coppie di rette).

62. — La superficie F^8 di seconda specie contiene in generale [1] *due* fasci di coniche. La corrispondente congruenza (3, 5) — che potremo anche chiamare " di seconda specie „ — conterrà perciò *6 coni quadrici, due inviluppi piani di 2ª classe, e nessun fascio di rette.* Per esaurire le due somme $\Sigma \binom{h}{2}$ e Σh (eguali rispett. a 12 e 16), si vede immediatamente che non resta possibile altra ipotesi che quella di un cono quartico, al quale dovranno appartenere i *tre* raggi doppi di prima specie che spettano appunto alla congruenza.

La congruenza (3, 5) *di seconda specie ha dunque 7 punti singolari, vertici rispett. di un cono quartico razionale e di sei coni quadrici; e due piani singolari, contenenti inviluppi quadrici di rette della congruenza.*

63. — Tutte le altre F^{n+3} razionali a sezioni ellittiche contengono in generale, per $n \geq 3$, $6-n$ fasci di coniche; la F^5 ne contiene invece *cinque.* In ogni caso dunque (anche per $n=2$) la congruenza corrispondente $(3, n)$ conterrà $(n-2)(6-n)$ coni quadrici; e il numero complessivo dei fasci di rette sarà quello delle rette contenute nella F^{n+3}, ossia $\binom{7-n}{2}$.

Quanto ai raggi doppi di prima specie, per $n=2$ e $n=3$ non ve ne sono affatto; e per $n=4$ ve n'è uno solo, il quale apparterrà perciò a un cono cubico razionale. Infine per $n=5$ vi saranno *tre* raggi doppi; e si vede anche facilmente che questi apparterranno rispett. a tre diversi coni cubici.

Vi sono dunque in ogni caso $\binom{n-2}{2}$ coni cubici razionali. Ed essendo verificate le due identità:

$$\Sigma \binom{h}{2} \equiv (n-2)(6-n) + 3\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$$

$$\Sigma h \equiv \binom{7-n}{2} + 2(n-2)(6-n) + 3\binom{n-2}{2} = 2(n+3)$$

corrispondenti alle relazioni dei n[i] 40 e 41, si conclude che non vi saranno altri punti (o coni) singolari.

Dunque: *Le congruenze* $(3, n)$ *di genere sezionale uno* — esclusa soltanto la (3, 5) di seconda specie — *contengono in generale* $\binom{7-n}{2}$ *fasci di rette,* $(n-2)(6-n)$ *coni quadrici, e* $\binom{n-2}{3}$ *coni cubici razionali.* I raggi doppi di questi ultimi sono tali anche per la congruenza. I vertici di questi coni sono tutti punti doppi per la superficie focale; il loro numero complessivo è:

$$\binom{7-n}{2} + (n-2)(6-n) + \binom{n-2}{2} = 12-n.$$

Questo stesso numero di punti singolari ha anche la congruenza (3, 5) di seconda specie (poichè ne ha 7, ed è $n=5$).

---

[1] Del Pezzo, l. c. Diciamo " in generale „ perchè i due fasci potrebbero anche coincidere. E analoghe avvertenze si tengano per fatte in seguito.

64. — Congruenze $(3, n)$ del tipo delle precedenti furono ottenute dai Signori SEGRE [1] e CASTELNUOVO [2] come proiezioni di sistemi di rette contenuti in varietà cubiche dello spazio S_4 con un numero finito e ≥ 6 di punti doppi (generabili con tre reti proiettive di spazi S_3). Si può domandare ora se le congruenze $(3, n)$ così ottenute siano le più generali fra quelle di genere sezionale uno. — A questa domanda potremo rispondere affermativamente quando ci saremo assicurati che la superficie focale (di 6° ordine) di una congruenza $(3, n)$ generale di genere sezionale uno può ottenersi come contorno apparente di una di quelle M_3^3 di S_4; e per questo è sufficiente [3] far vedere che la sestica cuspidale della stessa superficie focale è intersezione di una quadrica e di una superficie cubica, ha cioè il genere 4, ovvero (il che fa lo stesso) ha 6 punti doppi apparenti.

Ora la superficie focale di una qualunque delle congruenze $(3, n)$ da noi incontrate in questo § è di 6° ordine, e non ha in generale altre singolarità all'infuori delle seguenti:

Una curva cuspidale di 6° ordine, completamente priva di punti singolari, e i cui punti doppi apparenti supporremo in numero di h;

i $12 - n$ punti singolari della congruenza, che sono punti doppi conici di essa, e non appartengono alla curva cuspidale.

Ciascuno di questi ultimi punti produrrà nella classe della superficie un abbassamento di *due* unità. — Quanto alla curva cuspidale, è noto [4] che, per una superficie di ordine μ, la presenza di una curva cuspidale di ordine R con h punti doppi apparenti (e senza punti singolari) fa discendere la classe di:

$$12\mu R - 9R^2 - 15R + 18h$$

unità. Nel nostro caso sarà dunque:

$$6.5^2 - \{12.\,6.\,6 - 9.\,6^2 - 15.\,6 + 18h\} - 2\,(12 - n) = 2n$$

da cui:

$$18h = 108 \qquad \text{ossia} \qquad h = 6.$$

Le congruenze di SEGRE-CASTELNUOVO sono dunque le più generali congruenze $(3, n)$ di genere sezionale *uno*.

Rimandiamo alle Memorie cit. di questi egregi geometri per uno studio più particolareggiato delle varie congruenze; delle configurazioni formate dai loro punti e piani singolari; del numero delle congruenze che hanno la stessa superficie focale, e quindi gli stessi punti e piani singolari; ecc.

---

(1) " Mem. della R. Acc. di Torino ", s. 2ª, t. 39, 1888.
(2) " Atti del R. Ist. Veneto ", s. 6ª, t. 5 e 6.
(3) SEGRE, l. c., n° 1, 3.
(4) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes* (3te Aufl.), II, p. 658.

§ 10.

Congruenze (3, n) *di genere sezionale due.*

65. — Una congruenza (3, n) di genere sezionale *due* avrà per immagine in S_5 una superficie razionale F^{n+3} a sezioni di genere due. Ora è noto [1] che una tal superficie è sempre di ordine ≤ 12; sarà dunque $n \leq 9$, vale a dire:

Le congruenze (3, n) *prive di linea singolare e di genere sezionale due sono tutte di classe* ≤ 9.

Queste congruenze avranno una superficie focale di 8° ordine e di classe $2(n+1)$, con curva cuspidale (in generale) di 12° ordine. Al pari delle congruenze di genere sezionale uno, esse non potranno contenere coni ellittici; ma potranno contenere dei coni razionali dai cui vertici non escano raggi isolati della congruenza.

Le due relazioni dei n^i 40 e 41 diventano in questo caso:

$$(1) \qquad \Sigma_1 \binom{h}{2} = n - 3 \qquad \Sigma_1 h = 12\,;$$

estese entrambe le somme a quei coni singolari, dai cui vertici esce anche un raggio isolato della congruenza.

La superficie F^{n+3} immagine della congruenza deve contenere un (unico) fascio di coniche; e i piani di queste coniche formeranno una M_3^n, normale, al pari della F^{n+3}, per uno spazio S_{n+2}. Da questa M_3^n la F^{n+3} potrà segarsi con una quadrica (la M_4^2 fondamentale); e l'intersezione residua di queste due varietà sarà costituita da $2n - (n+3) = n - 3$ piani, che dovranno appartenere sulla M_4^2 tutti a uno stesso sistema (il sistema dei *punti*). Siccome poi nel fascio di coniche sulla F^{n+3} sono contenute (in generale) $9 - n$ coppie di rette [2], così concludiamo:

Ogni congruenza (3, n) *di genere sezionale due contiene un* (*unico*) *sistema razionale* ∞^1 *di rigate quadriche* (inviluppanti la superficie focale), *tale che ogni retta della congruenza appartiene a una e una sola di quelle rigate.* In questo sistema ∞^1 sono contenuti $n - 3$ coni quadrici, e altre $9 - n$ rigate si spezzano in due fasci di rette. *La congruenza contiene perciò* $n - 3$ *coni quadrici e* $18 - 2n$ *fasci di rette.*

Dai vertici di questi coni e dai centri di questi fasci esce sempre anche un raggio isolato della congruenza. Infatti la rigata R^{n+3} delle rette della congruenza che si appoggiano a una retta generica uscente dal vertice di uno di quei coni quadrici ha a comune due generatrici con ogni rigata quadrica del sistema ∞^1 considerato; avrà dunque a comune anche con quel cono due (e non tre) generatrici. Un ragionamento analogo può farsi pei fasci di raggi.

Questi $n - 3$ coni quadrici e i $18 - 2n$ fasci di rette rendono già le due somme contenute nelle relazioni (1) eguali ai corrispondenti secondi membri; e non vi saranno perciò altri punti singolari i quali siano doppi per la superficie focale.

---

(1) Segre, *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*, " Rend. di Palermo ", t. I; Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (ibid., t. IV).

(2) Castelnuovo, l. c., n° 5.

Si può anzi affermare che *in generale, una congruenza* $(3, n)$ *di genere sezionale due non contiene altri punti singolari all'infuori dei* $(18 - 2n) + (n - 3) = 15 - n$ *già incontrati.* Così avviene infatti, per $n = 3$, della *congruenza di Roccella* (¹), generata da tre fasci proiettivi di complessi lineari in posizione generale, la quale contiene soltanto 12 fasci di rette; e anche per $n > 3$ avremo agio di persuadercene fra poco (n° 67). È vero che, per $n > 3$, la congruenza deve contenere $\binom{n-2}{2}$ raggi doppi di 1ª specie (n° 57); però questi possono non appartenere ad alcun punto singolare, ed essere ad es. tangenti alla superficie focale in 4 punti diversi.

66. — Di congruenze $(3, n)$ di genere sezionale *due* si possono avere per ciascuna classe $n \geq 3$ e ≤ 9 diversi tipi, corrispondentemente alle diverse superficie a sezioni di genere 2 di ogni singolo ordine ≤ 12. — È noto che queste superficie possono distinguersi a seconda delle loro *direttrici minime* (²); e che come direttrice minima esse hanno una conica, ovvero una retta, o anche un punto (o un numero finito > 1 di tali enti), tranne che nel caso estremo $n = 9$, nel qual caso la superficie F^{n+3}, che è di 12° ordine, può anche avere come direttrici minime un fascio di cubiche.

Se le ∞^1 coniche della superficie F^{n+3} hanno uno o due punti a comune (di più non possono averne), questi punti saranno tripli per la superficie, e ad essi corrisponderanno perciò raggi tripli (di 2ª specie) della congruenza. Quei punti saranno però punti tripli propri *apparenti*; proiettando la superficie F^{n+3} in S_3 essi si proietteranno in punti (della curva doppia) che non impongono condizioni ulterioni alle superficie aggiunte. Nelle formole del n° 57 sarà dunque da porsi $\tau' = 1$ o 2 (e $\tau = 0$).

Se vi è una direttrice rettilinea, a questa corrisponderà nella congruenza un ulteriore fascio di rette, il cui centro sarà punto comune a tutte le quadriche sostegni delle ∞^1 rigate, e apparterrà perciò, non solo alla superficie focale da esse inviluppata, ma anche alla curva cuspidale di questa.

67. — Mostriamo ora come si possano ottenere congruenze $(3, n)$ di genere sezionale due e delle varie classi, le quali non abbiano altri punti singolari oltre quelli considerati al n° 65.

In un sistema lineare ∞^3 di quadriche affatto generale — quindi privo di punti basi — si prenda un sistema ∞^1 razionale d'indice 3 non contenuto in una rete. Esso potrà rappresentarsi con un'equazione del tipo:

$$a_0 t^3 + 3a_1 t^2 + 3a_2 t + a_3 = 0 \tag{1}$$

nella quale t è un parametro, e le a_i sono forme quadratiche nelle coordinate proiettive di punto. Queste ∞^1 quadriche inviluppano la superficie di 8° ordine:

$$4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 = 0 \tag{2}$$

(¹) *Sugli enti geometrici dello spazio di rette...* (Piazza Armerina, 1882).

(²) Castelnuovo, l. c., nⁱ 6-8. Queste *direttrici* sono curve incontranti in un solo punto variabile le coniche del fascio contenuto nella superficie.

colla curva cuspidale di 12° ordine:

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

E le generatrici di ambo i sistemi di quelle ∞^1 quadriche formeranno in generale un'unica congruenza (irriducibile) del 6° ordine.

Ora il sistema (1) è contenuto nel sistema lineare ∞^3:

$$(3) \qquad \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0;$$

e l'insieme delle singole *rigate quadriche* contenute nelle superficie di questo sistema lineare può considerarsi come uno *spazio doppio*, la cui superficie di diramazione Φ (del 4° ordine, con dieci punti doppi, e sarebbe precisamente un così detto *simmetroide* (¹)) è costituita dalla varietà ∞^2 dei coni contenuti in (3). In questo spazio doppio il sistema (1) è rappresentato da una cubica sghemba γ in posizione generale, incontrante la Φ in 12 punti; dal che si trae che il sistema delle rigate quadriche contenute in (1) è iperellittico di genere 5 (poichè la relativa g_2^1 contiene 12 elementi doppi). Ma se la cubica γ diventa tangente alla superficie Φ in ogni sua intersezione con essa, dunque in 6 punti (e ve ne saranno ancora ∞^6 soddisfacenti a questa condizione), quel sistema ∞^1 di rigate quadriche verrà ad acquistare, corrispondentemente ai 6 punti di contatto, altrettanti elementi doppi, e si spezzerà perciò in due sistemi ∞^1 razionali. Allora le generatrici dei due sistemi delle quadriche (1) costituiranno due distinte congruenze, ciascuna del 3° ordine, aventi la (2) per comune superficie focale, e (in generale) di genere sezionale due.

Se la curva γ è tangente alla Φ in 6 punti generici, immagini di coni non spezzati in coppie di piani, si avranno congruenze contenenti 6 coni quadrici e nessun fascio di rette, e perciò di classe 9.

Se invece la curva γ contiene un certo numero k (> 0 e ≤ 6) dei 10 punti doppi della superficie Φ, i quali sono immagini delle coppie di piani contenute in (3), si avranno congruenze nelle quali la serie ∞^1 delle rigate quadriche conterrà $6 - k$ coni e k rigate spezzate in due fasci; dunque congruenze di classe $9 - k$ (come si dedurrebbe anche immediatamente dalla considerazione del numero delle rigate tangenti a un piano generico).

In ogni caso, se vi fosse qualche altro cono singolare (oltre i coni quadrici e i fasci anzidetti), questo dovrebbe contenere una generatrice (almeno) di ogni quadrica del sistema (1); e perciò quest'ultimo, e quindi anche il sistema lineare (3), dovrebbero avere il vertice di quel cono come punto base (contro l'ipotesi fatta).

Se invece il sistema lineare (3) si componesse di quadriche aventi a comune una generatrice u, per *ogni* sistema (1) le ∞^2 generatrici dello stesso sistema di u formerebbero una congruenza di 3° ordine, avente u come raggio triplo di 2ª specie (n° 66). E la classe di questa congruenza sarebbe ancora $9 - k$, se delle 6 intersezioni del sistema (1) col sistema quadratico ∞^2 dei coni contenuti in (3) k (≤ 6) si spezzano in coppie di piani.

(¹) Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes* (3ᵗᵉ Aufl.), II, p. 468.

Similmente, se le quadriche del sistema lineare (3) hanno a comune due generatrici u, u' di una stessa schiera (nel qual caso ogni cono contenuto in (3) si spezzerà in due piani), per ogni sistema (1) contenuto in (3) le ∞^2 generatrici della stessa schiera di u, u' formeranno una congruenza (3, 3) avente u e u' per raggi doppi di 2ª specie, e contenente 12 fasci di rette, dei quali 6 conterranno a lor volta il raggio u, e 6 il raggio u'.

68. — Alcune particolari congruenze (3, 3), (3, 4), (3, 5) di genere sezionale due sono state oggetto di studio speciale nella mia Memoria degli " Annali di Matem. „ (ser. 2ª, t. 21). Fra altro, mi sono ivi occupato delle congruenze contenute in un complesso tetraedrale, e che sono precisamente le duali delle congruenze cremoniane di Hirst (¹), generate da due piani in corrispondenza birazionale cubica. Queste particolari congruenze $(3, n)$ $(n = 3, 4, 5)$, oltre ai coni quadrici e ai fasci di rette del caso generale, contengono ancora due inviluppi piani di 2ª classe, e due coni razionali di ordine $n - 1$ aventi a comune una generatrice $(n-2)^{\text{pla}}$, cioè rispett. semplice, doppia, o tripla.

Qui voglio ancora accennare come, per $n \geq 6$ (e ≤ 9), si possano avere particolari congruenze $(3, n)$ di genere sezionale due contenenti un cono razionale di ordine $n - 1$; le $\binom{n-2}{2}$ generatrici doppie di questo cono (eventualmente sostituibili a terne da generatrici triple) saranno allora appunto i raggi doppi di prima specie della congruenza. — E siccome le congruenze $(n, 3)$ duali di queste rientrano in un tipo generale stato considerato dal Caporali (²), così prenderemo le mosse da queste ultime.

Si abbia in un piano π un sistema lineare ∞^3 di cubiche aventi a comune un punto doppio A e k (≥ 0 e ≤ 3) punti semplici B_i. Questo sistema rappresenta una superficie (rigata) razionale dello spazio S_3, di ordine $5 - k$. Sia Φ una tal superficie, riferita dunque birazionalmente al piano π in modo che alle sue sezioni piane corrispondano in π le ∞^3 curve del sistema lineare proposto. Allora le ∞^2 rette che congiungono i singoli punti del piano π ai punti rispett. omologhi sopra Φ formeranno una certa congruenza, della quale si possono stabilire molto facilmente tutte le proprietà.

Ad es.: la congruenza è di 3ª classe. Il piano π contiene un inviluppo razionale di ordine $8 - k$ di rette della congruenza (κ), generato dalla corrispondenza biunivoca fra la curva di ordine $5 - k$ sezione di Φ e la cubica corrispondente ad essa nel sistema lineare proposto. La congruenza è perciò di ordine $n = (8 - k) + 1 = 9 - k$. Il punto A è vertice di un cono quadrico di rette della congruenza, e per esso passano inoltre $n - 3$ raggi isolati di questa (contenuti in κ). Questi $n - 3$ raggi del fascio A (π) incontrano le generatrici rispett. omologhe della rigata Φ, alle quali sono riferiti (punto per punto) proiettivamente; e determinano perciò con queste altrettanti inviluppi quadrici di rette contenuti nella congruenza. Quest'ultima con-

(¹) " Proc. of the Lond. Math. Soc. „, vol. 16: " Rend. di Palermo „, I, p. 64.

(²) *Sopra alcuni sistemi di rette*, " Rend. Acc. di Napoli „, 1879 (o anche: *Memorie di Geometria*, p. 126 e seg.). La costruzione indicata in seguito è appunto quella di Caporali, applicabile ad ogni sistema lineare ∞^3 di curve piane algebriche.

tiene anche $2k = 2(9 - n)$ fasci di rette, dei quali metà hanno i centri nei punti B_i, e l'altra metà hanno i piani passanti per le rette AB_i; ecc.

Che poi questa congruenza $(n, 3)$ sia di genere sezionale due, è confermato dalla rappresentazione che se ne ha immediatamente sul piano π, facendo corrispondere a ogni raggio la sua traccia su questo piano: alle rigate intersezioni della congruenza coi complessi lineari corrispondono infatti in π quartiche passanti doppiamente per A e semplicemente per i punti B_i.

Resta così assodata l'esistenza di congruenze $(3, n)$ di genere sezionale due (duali delle precedenti) le quali contengono $(6 \leq n \leq 9)$:

Un cono razionale Γ di ordine $n - 1$, le cui $\binom{n-2}{2}$ generatrici doppie sono precisamente i raggi doppi della congruenza;

un inviluppo quadrico, il cui piano (α) passa pel vertice del cono Γ;

$n - 3$ coni quadrici, aventi rispett. a comune col cono Γ le $n - 3$ sue generatrici che appartengono al piano α, ma non al relativo inviluppo quadrico;

$2(9 - n)$ fasci di rette, dei quali metà hanno un raggio a comune col cono Γ, e l'altra metà coll'inviluppo α.

La superficie φ (n° 23-24), luogo dei punti da cui escono terne di raggi della congruenza contenute in un fascio, è in questo caso di ordine $n - 3$, e deve avere un punto $(n - 3)^{\text{plo}}$ nel vertice del cono Γ; sarà dunque anch'essa un cono, e precisamente un cono *aggiunto* a Γ (dovendone contenere le generatrici doppie). E sarà precisamente quel cono (completamente determinato) aggiunto a Γ e di ordine $n - 3$, che incontra ulteriormente Γ stesso secondo le $n - 3$ generatrici comuni ad esso e ai singoli coni quadrici.

69. — Le superficie razionali a sezioni di genere due sono un caso particolare di quelle a sezione iperellittiche. È bene pertanto osservare subito che: *Una superficie razionale a sezioni iperellittiche di genere $p > 2$ non può mai essere immagine di una congruenza di rette del 3° ordine.*

Ovvero anche: *La superficie immagine di una congruenza $(3, n)$ di genere sezionale $p > 2$ non può avere le sezioni iperellittiche.* Infatti la rigata R_p^{n+3} formata dalle rette di una congruenza $(3, n)$ che si appoggiano a una retta generica contiene una serie lineare g_3^1, senza elementi fissi. E se fosse iperellittica, essa dovrebbe contenere anche una g_2^1. Ora un ente algebrico ∞^1 il quale contenga in pari tempo una g_2^1 e una g_3^1 senza elementi fissi è (come si vede immediatamente) di genere ≤ 2.

Occupandoci pertanto, nei prossimi §§, delle congruenze $(3, n)$ di genere sezionale $p > 2$, potremo sempre supporre che le superficie loro immagini in S_5 abbiano le sezioni non iperellittiche.

§ 11.

Congruenze $(3, n)$ *di genere sezionale tre.*

70. — Le congruenze $(3, n)$ di genere sezionale tre hanno la superficie focale di 10° ordine e di classe $2(n + 2)$, con curva cuspidale di 21° ordine. Possono contenere, e vedremo anzi che contengono sempre, un cono ellittico; ma non possono contenerne più di uno, perchè la rigata residua formata dai raggi della congruenza che si appoggiano a una retta passante pel vertice di un cono ellittico deve essere razionale (n° 8), e non può dunque contenere una componente ellittica.

Tenuto conto di questo, e indicando con k l'ordine dell'unico cono ellittico, supposto esistente (e ritenendo invece $k=0$ in caso contrario), le solite relazioni dei n[i] 40 e 41 diventeranno:

$$\binom{k}{2}=\binom{n-1}{2}+\Sigma_1\binom{h}{2} \qquad 2k-\Sigma_1 h=3n-15$$

estese le due somme Σ_1 a quei soli coni, dai cui vertici esce anche un raggio isolato della congruenza.

Ora, nella prima di queste relazioni, il primo membro (essendo $k \leq n-1$) non può essere superiore a $\binom{n-1}{2}$; e d'altra parte il secondo membro è $\geq \binom{n-1}{2}$. Saranno perciò entrambi i membri eguali precisamente a $\binom{n-1}{2}$; e di qui si trae $k=n-1$: vi sarà cioè effettivamente un cono ellittico, di ordine $n-1$; e $\Sigma_1\binom{h}{2}=0$, ossia dei coni razionali dai cui vertici esce anche un raggio isolato della congruenza, nessuno potrà avere l'ordine $h \geq 2$. Questi coni saranno dunque tutti fasci di rette; e il loro numero x si può ricavare dalla seconda delle relazioni scritte di sopra, la quale diventa ora $2(n-1)-x=3n-15$, e dà perciò $x=13-n$. Questo mostra implicitamente che sarà sempre $n \leq 13$ (¹); e possiamo perciò concludere:

Le congruenze (3, n) *prive di linea singolare e di genere sezionale 3 sono tutte di classe* ≤ 13; *esse contengono un cono ellittico di ordine* $n-1$, *e* $13-n$ *fasci di rette aventi ciascuno* (come si riconosce facilmente) *un raggio a comune con quel cono* (²).

Le $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ generatrici doppie del cono ellittico esauriscono appunto i raggi doppi (di 1ª specie) della congruenza.

La superficie φ (n° 23), di ordine $n-4$, è costituita dall'unico cono di questo ordine aggiunto al cono ellittico contenuto nella congruenza.

71. — Ogni congruenza (3, n) di genere sezionale tre si può dunque rappresentare birazionalmente sulla stella di piani avente per centro il vertice del suo cono ellittico, poichè in ciascuno di questi piani sta un solo raggio di essa non appartenente in generale a quel cono.

Più intuitiva riesce la rappresentazione della congruenza (n, 3) duale della precedente. Questa contiene un inviluppo piano ellittico di classe $n-1$, e $13-n$ fasci

---

(¹) D'altronde è anche noto (Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XXV) che una superficie razionale a sezioni di genere tre è di ordine ≤ 16. Sarà dunque per noi $n+3 \leq 16$, ossia appunto $n \leq 13$.

(²) Infatti, se così non fosse, la superficie F^{n+3} immagine della congruenza verrebbe incontrata da un S_4 generico passante per la retta corrispondente a uno di quei fasci secondo una C_2^{n+2} appartenente a tale S_4, e con $n-1$ punti in linea retta: il che è assurdo, poichè gli S_3 per questa retta segherebbero sulla C_2^{n+2} una serie lineare g_3^2.

di rette coi centri nel piano π di questo inviluppo; e si vede subito ch'essa si rappresenta birazionalmente sul piano π, in modo che alle rigate sue intersezioni coi complessi lineari corrispondono ∞^5 quartiche piane, passanti semplicemente per i centri dei $13 - n$ fasci.

Queste congruenze esistono anche tutte, per ogni classe (o ordine) n tale che sia $3 < n \leq 13$. Infatti per $n = 4$ e $n = 5$ queste congruenze furono già ottenute e studiate nella mia Memoria degli "Annali di Matem.". Per $7 \leq n \leq 13$ si possono ottenere congruenze $(n, 3)$ del tipo indicato (e non aventi in generale altri elementi singolari), applicando la generazione di CAPORALI (cfr. n° 68) a un sistema lineare ∞^3 di cubiche con $13 - n$ punti basi semplici. Infine, per $n = 6$, si può ancora applicare la stessa costruzione valendosi di una rete di cubiche con 7 punti basi, e assumendo come superficie rappresentativa di questa rete un piano doppio. Si ha però così una congruenza (3, 6) che, oltre all'inviluppo ellittico di classe 5, contiene (nel piano doppio) un inviluppo razionale di classe 4. Questa congruenza può anche concepirsi come generata da due piani riferiti in un'opportuna corrispondenza razionale (2, 1).

§ 12.

Congruenze $(3, n)$ *razionali di genere sezionale quattro.*

72. — Una congruenza razionale $(3, n)$ di genere sezionale 4 ha per immagine in S_5 una superficie F^{n+3} a sezioni di genere $p = 4$. Il sistema lineare Σ aggiunto al sistema delle sezioni iperpiane di F, dovendo segare sopra queste ultime la serie canonica g_6^3, si comporrà di curve del 6° ordine; e la sua curva generica sarà irriducibile, perchè se no le sezioni di F^{n+3} dovrebbero essere iperellittiche (1), e questo si può escludere (n° 69). — *Dico ora che il genere p di questa curva, ossia del sistema* Σ, *è* < 2. Infatti, se fosse ≥ 2, la curva generica di Σ starebbe in un S_4; e perciò il sistema Σ sarebbe contenuto (parzialmente) nel sistema delle sezioni iperpiane di F, e nel sistema normale ∞^n cui questo appartiene. Rispetto a questo sistema normale esso ammetterebbe allora un sistema lineare residuo di dimensione virtuale (2):

$$n - 2p + p_1 + 1 = n + p_1 - 7$$

e di dimensione effettiva non inferiore alla precedente. Questo sistema residuo segherebbe dunque sopra una sezione iperpiana generica di F (almeno) una $g_{n-3}^{n+p_1-7}$.

Essendo $n \geq 5$ e (per ipotesi) $p_1 \geq 2$, la dimensione di questa serie si annullerà soltanto per $n = 5$, $p_1 = 2$. In questo caso la superficie $F^{n+3} \equiv F^8$ sarebbe essa stessa normale, e perciò le curve del sistema Σ dovrebbero stare o in spazi S_3, o in spazi S_4 per una retta; dal che si trae che la F^8 dovrebbe contenere o infinite coniche, o una retta doppia; cose entrambe da escludersi.

Se invece la serie lineare $g_{n-3}^{n+p_1-7}$ ha la dimensione > 0, essa, giacendo sopra una curva di genere 4, sarà certo speciale ogni qual volta $p_1 \geq 2$ (e basterebbe anzi

(1) CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* "Mem. della R. Acc. di Torino", s. II, t. 42, n° 28, *a*.

(2) Mem. cit., n° 29, p. 37.

$p_1 \geq 1$). Ora sopra una curva di genere 4 non iperellittica le sole serie speciali complete sono la serie canonica g_6^3 e le serie g_5^2, g_4^1, g_3^1; perchè dunque la $g_{n-3}^{n+p_1-7}$ si identifichi con una di queste, o con un'altra serie contenuta in una di esse (essendo $p_1 \geq 2$), non è possibile altra ipotesi, se non $p_1 = 2, n = 6$; nel qual caso si ha una g_3^1. Ma in questo caso il sistema residuo di Σ si comporrebbe di ∞^1 curve di 3° ordine, e piane, perchè sulla $F^{n+3} \equiv F^9$ normale (di S_6) le curve di Σ dovrebbero segarsi cogli S_5 di un sistema lineare ∞^3, dunque passanti per un piano (1); si troverebbe così una congruenza di rette con infiniti punti o piani singolari (di ordine tre), e perciò questo caso non fa per noi.

Resta pertanto escluso che il sistema Σ sia di genere $p_1 \geq 2$; e la sua curva generica non potrà dunque essere che ellittica o razionale. — D'altra parte, poichè la nostra congruenza (3, n) contiene certo qualche cono ellittico (2), così la superficie F^{n+3} immagine di essa avrà certo delle sezioni iperpiane spezzate in due curve ellittiche (n° 8); e una almeno di queste due sarà sempre contenuta (parzialmente) in Σ. Infatti le curve di Σ incontrano quelle due curve ellittiche complessivamente in 6 punti variabili; dunque una almeno di esse in non più di tre punti; e su quest'una non potranno segare allora che una g_3^2, cioè una serie lineare di dimensione inferiore a quella di Σ. Il sistema Σ non potrà dunque essere nemmeno di genere < 1 (poichè contiene delle curve ellittiche): e sarà perciò precisamente di genere uno.

73. — Il sistema Σ, completo, di dimensione 3 e di genere 1 (perciò di grado 3), potrà rappresentarsi mediante una superficie cubica di S_3; ossia la nostra F^{n+3} potrà riferirsi a una superficie cubica (razionale) di S_3 in modo che al sistema Σ aggiunto a quello delle sue sezioni iperpiane corrisponda il sistema delle sezioni piane della nuova superficie. Alle sezioni iperpiane di F^{n+3}, e anzi della F^{n+3} normale di S_n, corrisponderanno allora sulla superficie cubica curve di 6° ordine e di genere 4: dunque intersezioni di essa con quadriche. Ma un sistema lineare di curve siffatte è al più ∞^9; sarà dunque $n < 9$, ossia:

Le congruenze (3, n) *razionali di genere sezionale 4 sono* (come anche quelle non razionali) *di classe* ≤ 9.

E dalla rappresentazione della F^{n+3} sulla superficie cubica si passa subito alla sua rappresentazione piana:

Le congruenze razionali (3, n) *di genere sezionale 4 possono rappresentarsi su piano in modo che alle rigate loro intersezioni coi complessi lineari corrispondano curve di 6° ordine aventi a comune 6 punti doppi e* $9 - n$ *punti semplici.*

Queste congruenze conterranno perciò, in generale, $9 - n$ fasci di raggi non aventi a due a due alcun raggio a comune, e 27 rigate quadriche, corrispondenti rispett. ai 6 punti doppi della rappresentazione piana, alle 15 rette che congiungono

(1) Sarebbe questo il caso della F^9 di S_6 rappresentata da un sistema di curve piane di 9° ordine con 8 punti basi tripli.

(2) Infatti la relazione generale del n° 40 diventa in questo caso $\Sigma_3 \binom{h}{2} - \Sigma_1 \binom{h}{2} = (n+1)(n-3)$; sicchè sarà certo $\Sigma_3 \binom{h}{2} > 0$ (anzi ≥ 12).

questi a due a due, e alle 6 coniche che li congiungono a 5 a 5. — Noi potremo supporre $n \geq 5$ (n° 21) [1]; e a questo proposito osserveremo ancora:

che per $n = 5$ i dieci punti basi (6 doppi e 4 semplici) del sistema di sestiche non potranno stare sopra una cubica; se no a questa corrisponderebbe una retta doppia della superficie $F^{n+3} \equiv F^8$;

e che per $n = 6$ i nove punti basi non potranno appartenere a un fascio di cubiche; se no a queste corrisponderebbero sulla F^{n+3} anche cubiche piane, e nella congruenza coni o inviluppi piani di rette.

74. — *Ai coni ellittici della congruenza* (3, *n*) *corrisponderanno, nella rappresentazione piana di questa, altrettante curve di 3° ordine passanti pei 6 punti fondamentali doppi e eventualmente anche per qualcuno dei punti fondamentali semplici.* Non esistono infatti altre curve ellittiche, le cui residue rispetto al sistema di sestiche siano pure ellittiche.

Due qualunque di queste cubiche (rappresentanti coni ellittici) potranno avere a comune o due, o uno, oppure nessun punto fondamentale semplice; e, corrispondentemente, esse dovranno incontrarsi in altri 1, 2, o 3 punti. Le stesse due cubiche costituiranno insieme una particolare curva del sistema ∞^5 di sestiche; e anzi una curva totale di questo, se vi si aggiungono i punti fondamentali semplici comuni ad esse.

Di qui deduciamo: *Due coni ellittici della congruenza hanno sempre una generatrice a comune, che può essere semplice, doppia, o anche tripla* (per essi e per la congruenza). In quest'ultimo caso i due coni esauriscono la rigata R^{n+3} delle rette della congruenza che si appoggiano alla congiungente dei due vertici; mentre invece nel secondo caso la stessa R^{n+3} contiene ancora un fascio di rette, e nel primo caso due fasci di rette.

In ogni caso poi questa R^{n+3} (composta di due coni ellittici, e eventualmente, anche di uno o due fasci), essendo l'intersezione della nostra congruenza con un complesso lineare, dovrà contenere un raggio (almeno) di ogni fascio di rette appartenente alla congruenza. E siccome due diversi fasci di questa non hanno alcun raggio a comune, così questo raggio di ogni ulteriore fascio dovrà appartenere a uno dei due coni ellittici contenuti nella R^{n+3}. Di qui si trae:

Ogni fascio di raggi contenuto nella congruenza deve avere un raggio a comune con tutti i coni ellittici, meno uno (al più); *e il suo piano deve perciò contenere i vertici di tutti questi coni, meno uno.*

D'altra parte si vede anche facilmente che nel piano di un fascio di rette della congruenza non possono stare che i vertici di al più *tre* coni ellittici. Infatti, sup-

---

[1] Facendo $n = 3$, e prendendo i 12 punti basi del sistema di sestiche (6 doppi e 6 semplici) tutti sopra una cubica, si ha un sistema lineare (sovrabbondante) rappresentativo di una F^6 di S_4 con un punto triplo, la quale è una particolare intersezione di una M_3^2 e di una M_3^3. Se la M_3^2 non è degenere (ossia se i 6 punti basi semplici non possono ripartirsi in due terne formanti coi 6 punti doppi i gruppi basi di due fasci di cubiche), questa superficie è immagine di una congruenza (3, 3) razionale contenuta in un complesso lineare non speciale, e con un raggio triplo di 2ª specie: un caso intermedio fra la congruenza (3, 3) generale del n° 20 e quella (riferibile a una rigata ellittica) del n° 56.

posto che ve ne fossero quattro, segue già da quanto precede che questi sarebbero vertici di un quadrangolo, e che due qualunque di essi non sarebbero allineati sul centro del fascio; dunque le sei rette che congiungono quei quattro vertici a due a due sarebbero raggi della congruenza, e isolati (in questo piano singolare). Il numero di tali raggi essendo $= n - 2$ (n° 36), la cosa sarebbe possibile soltanto per $n = 8$, e quando i sei raggi fossero semplici. Ma per $n = 8$ vi è nella congruenza un solo fascio di rette, e quindi il raggio comune a due coni ellittici è sempre doppio o triplo; dunque è escluso che nel piano considerato stiano i vertici di quattro coni ellittici.

Se vi è pertanto un fascio di raggi (vale a dire se $n \leq 8$), *vi saranno al più quattro coni ellittici:* dei quali tre aventi i vertici nel piano di quel fascio, e il quarto fuori di questo piano. Ma anche se $n = 9$ non vi potranno essere più di quattro coni ellittici; infatti in questo caso, non essendovi fasci di raggi, due qualunque di quei coni dovranno avere a comune una generatrice tripla, e i loro ordini avranno per somma $3 + 9 = 12$. Saranno dunque tutti coni di 6° ordine, con tre generatrici triple; dal che si trae subito che di questi coni ve ne saranno precisamente *quattro.*

Concludiamo perciò: *Le congruenze* $(3, n)$ *di genere sezionale 4 contengono al più quattro coni ellittici.*

Faremo ora vedere che (in generale) ne contengono precisamente quattro.

75. — Dalla rappresentazione piana della superficie F^{n+3} si vede facilmente che questa, al pari della F^{n+3} normale di cui è proiezione, non ha in generale punti tripli propri (1); la congruenza $(3, n)$ non avrà dunque raggi tripli di 2^a specie, e nelle formole del n° 57 dovrà perciò porsi $\tau = \tau' = 0$. La superficie focale avrà dunque una linea cuspidale di ordine $R = 33$; e dalla formola (1') del n° 41 si ricaverà:

$$2 \Sigma_3 h = 7n - 15 + \Sigma_1 h.$$

Ora nella somma $\Sigma_1 h$ vanno certo computati i $9 - n$ fasci di rette (poichè ciascuno di essi ha una R^{n+2} residua di genere 3); sarà dunque $\Sigma_1 h \geq 9 - n$, e perciò:

$$\Sigma_3 h \geq 3(n-1).$$

Ossia: *La somma degli ordini dei coni ellittici della congruenza è* $\geq 3(n-1)$. E siccome questi coni sono tutti di ordine $< n - 1$ (poichè, se ve ne fosse uno di ordine $n - 1$, la congruenza potrebbe rappresentarsi sul piano con un sistema di quartiche, come al n° 71, e avrebbe perciò il genere sezionale ≤ 3), così concludiamo che gli stessi coni saranno in numero di quattro almeno, c. s. v. d.

Le congruenze razionali $(3, n)$ *di genere sezionale 4 contengono quattro coni ellittici; e, se* $n < 9$, *i loro* $9 - n$ *fasci di rette sono contenuti in altrettante facce del tetraedro determinato dai quattro coni.*

Consideriamo ora uno qualunque degli ∞^1 complessi tetraedri aventi il tetraedro anzidetto per fondamentale. Esso avrà a comune colla data congruenza $(3, n)$ i quattro

(1) Se i punti fondamentali doppi della rappresentazione piana stessero sopra una conica, si avrebbe però un punto doppio conico.

coni ellittici (i cui ordini hanno somma $\geq 3(n-1)$) e i $9-n$ fasci di rette; dunque complessivamente una rigata di ordine non inferiore a $3(n-1)+9-n=2(n+3)$. Se dunque fra questi ∞^1 complessi consideriamo quello che contiene un'altra retta arbitraria della data congruenza, questo stesso dovrà pure contenere tutta la congruenza. Vale a dire:

Le congruenze razionali (3, n) *di genere sezionale 4 sono tutte contenute in un complesso tetraedrale.*

Esse potranno dunque generarsi (cfr. n^{i}. 54-55) mediante due inviluppi ∞^2 di piani di 3ª classe fra loro collineari, e risulteranno precisamente dalle intersezioni delle coppie di piani omologhi dei due inviluppi. — Viceversa, dalla nota rappresentazione di un complesso tetraedrale sullo spazio (di punti o di piani) si deduce facilmente quella delle congruenze di 3° ordine e di classe ≤ 9 generate nel modo anzidetto; e si vede che queste, nell'ipotesi che i due inviluppi generatori non abbiano come piano doppio comune nessuno dei piani uniti della collineazione [1], hanno tutte il genere sezionale 4.

76. — Ricordando ora le proprietà generali delle congruenze contenute in un complesso tetraedrale (cfr. n° 54), se ne possono dedurre facilmente quelle relative alle congruenze (3, n) di genere sezionale 4 ($5 \leq n \leq 9$).

La congruenza (3, 9) è generata da due inviluppi ∞^2 di piani di 3ª classe, fra loro collineari, e in posizione generale. I sei spigoli del tetraedro fondamentale della collineazione sono per essa raggi tripli; da ciascun vertice di questo tetraedro esce un cono di 6° ordine e genere uno contenuto nella congruenza, coi tre spigoli appartenenti a questo vertice come generatrici triple.

Quando invece i due inviluppi generatori hanno *un* piano unito (ossia hanno a comune un piano che corrisponde a sè stesso nella collineazione), si ottiene una congruenza (3, 8). Dei quattro vertici A, B, C, D del tetraedro fondamentale, uno, ad es., A, è ancora vertice di un cono singolare di 6° ordine, coi 3 spigoli uscenti da A come generatrici triple. Dagli altri vertici B, C, D escono come ellittici di 5° ordine; il cono uscente da B, ad es., ha BA per generatrice tripla, BC e BD per generatrici doppie. Nel piano BCD (che è il piano unito comune ai due inviluppi) è contenuto l'unico fascio di rette di questa congruenza.

Due inviluppi di 3ª classe fra loro collineari e con *due* piani uniti generano una congruenza (3, 7). Dei quattro punti A, B, C, D, due, ad es., A e B, sono vertici di coni di 5° ordine, aventi AB come generatrice tripla comune, e rispett. AC e AD, BC e BD come generatrici doppie. Invece C e D sono vertici di coni quartici con due generatrici doppie (passanti per A e B). La retta CD è raggio semplice della congruenza; i due piani ACD e BCD contengono ciascuno un fascio di rette di questa.

Due inviluppi di 3ª classe con *tre* piani uniti generano una congruenza (3, 6). Il punto comune ai tre piani uniti, e sia D, è vertice di un cono singolare cubico;

[1] Se invece qualcuno dei piani uniti della collineazione è piano doppio per l'uno e quindi anche per l'altro dei due inviluppi, la congruenza risultante è di genere sezionale < 4. In un prossimo lavoro mi propongo di esaminare più particolarmente le diverse congruenze che così si ottengono.

dagli altri vertici A, B, C del tetraedro fondamentale escono coni quartici, coi due lati adiacenti del triangolo ABC come generatrici doppie. I tre fasci di raggi stanno nei tre piani uniti comuni ai due inviluppi, ossia nei piani ABD, ACD, BCD (1).

Infine, se tutti quattro i piani uniti delle collineazioni sono comuni ai due inviluppi generatori, si ha una congruenza (3, 5) contenente quattro coni cubici e quattro fasci di rette (nei piani determinati dai vertici di quei coni a tre a tre). Di questa congruenza mi sono già occupato nella mia Memoria degli " Annali di Matematica ", n° 26.

La superficie φ, luogo dei punti da cui escono terne di raggi della congruenza contenute in un fascio, sarà in ciascuno di questi casi una parte della (o tutta la) superficie singolare del complesso tetraedrale, in cui è contenuta la congruenza. Ora quest'ultima superficie è composta delle quattro facce del tetraedro fondamentale. E *la superficie* φ, *che è di ordine* $n-5$, *si compone delle* $4-(9-n)=n-5$ *facce del tetraedro fondamentale, che non sono piani singolari della congruenza* (ossia non contengono fasci di rette di questa).

§ 13.

La congruenza (3, 6) *di genere sezionale* 5.

77. — Della congruenza (3, 6) di genere sezionale 5 (n° 42), supposta esistente, sappiamo che deve essere razionale (n° 44) e deve contenere 10 coni cubici di genere uno.

Nello spazio S_5 essa avrebbe per immagine una superficie normale F^9 a sezioni di genere 5. Il sistema lineare ∞^4 aggiunto a quello delle sezioni iperpiane di F si comporrà di curve di 8° ordine, irriducibili (essendo le sezioni di F non iperellittiche; cfr. n° 69), e appartenenti allo spazio S_5 (poichè se stessero in spazi S_4, questi spazi incontrerebbero ulteriormente F secondo rette, e non potrebbero nemmeno passare tutti per una stessa retta, sicchè F dovrebbe essere rigata). Queste curve C^8 di S_5 saranno dunque di genere ≤ 3; si vede anche facilmente che saranno appunto di genere *tre*.

Infatti ai coni cubici della congruenza corrispondono sopra F^9 curve piane di 3° ordine. Proiettiamo F^9 in S_3 da una retta r contenuta nel piano di una di queste curve (γ). Avremo una superficie Φ^6 con un punto triplo isolato A, proiezione della curva γ, e una curva doppia δ di 5° ordine. Il secondo piano della M_4^2 fondamentale passante per r avrà per traccia un punto B, triplo per Φ^6 e per la curva δ. — Il sistema aggiunto a quello delle sezioni piane di F^9 (o di Φ^6) verrà segato su Φ^6 dalle sue Φ^3 (superficie cubiche) aggiunte, ossia dalle Φ^3 passanti per la curva doppia δ e per il punto triplo isolato A. Fra queste Φ^3 vi sono quelle composte del cono qua-

(1) Questa congruenza (3, 6) è stata incontrata dal sig. Montesano (cfr. la Mem. cit.: *Su di un complesso di rette di 3° grado*, n° 9, p. 16) come una particolare congruenza contenuta nel complesso cubico delle generatrici di una rete di quadriche.

drico che proietta la curva δ dal suo punto triplo B, e di un piano passante per A. Il cono quadrico incontra ulteriormente Φ^6 in una conica; il piano per A l'incontra in una curva di 6° ordine e genere 2; e queste due curve hanno 2 punti a comune. Esse formano dunque insieme una curva riducibile di genere 3; e non può quindi essere < 3 il genere di un sistema lineare contenente tale curva.

Il sistema ∞^4 completo delle C_3^8 aggiunte alle sezioni iperpiane di F sarà di grado $4 + 3 - 1 = 6$. Esso è anche semplice (non appartiene cioè ad alcuna involuzione di grado > 1); infatti il sistema parziale segato su Φ^6 dai piani per A potrebbe appartenere tutt'al più all'involuzione cubica segata dalle rette per A stesso; e a questa non appartengono certo le rimanenti curve del sistema ∞^4.

Il sistema delle C_3^8 si potrà dunque rappresentare con una superficie f^6 di S_4, a sezioni di genere 3, che risulterà riferita birazionalmente alla F^9 primitiva. E alle 10 cubiche piane contenute in F^9 corrisponderanno sopra f^6 anche cubiche piane. Infatti le C^8 aggiunte al sistema delle sezioni iperpiane di F^9 si proiettano su Φ^6 in curve aventi in A un punto triplo; e devono perciò incontrare la cubica γ in tre punti (variabili).

Ora la f^6 non può avere nemmeno essa le sezioni iperellittiche. Infatti, se le avesse tali, essa dovrebbe contenere un fascio razionale di coniche; e ciascuna di queste coniche dovrebbe incontrare le singole cubiche in due punti (se no il fascio di coniche non sarebbe razionale): dunque i piani delle ∞^1 coniche dovrebbero incontrare in rette i piani delle 10 cubiche, e dovrebbero perciò passare tutti per le intersezioni di questi piani a due a due. E ciò è impossibile.

Escluso questo caso, la f^6 di S_4 dovrà rappresentarsi sul piano con uno dei due sistemi lineari seguenti [1]:

1° Sistema delle quartiche con 10 punti basi semplici;

2° Sistema delle curve di 6° ordine aventi a comune 7 punti doppi e 2 punti semplici.

Nel 2° caso la f^6 conterrebbe bensì 2 fasci di cubiche piane; ma fra queste non si potrebbero trovare le 10 che a noi occorrono, aventi cioè a due a due un punto comune, variabile da una coppia all'altra [2]. Va dunque esclusa anche quest'ipotesi; e perciò la f^6 dovrà in ogni caso rappresentarsi con un sistema di quartiche aventi 10 punti a comune. Alle cubiche che congiungono questi 10 punti a 9 per volta corrisponderanno anche cubiche piane sopra f^6, e precisamente come a noi occorrono.

Alle sezioni iperpiane della superficie F^9 corrisponderanno sopra f^6 curve di 8° ordine e genere 5, appartenenti a S_4; e perciò *curve canoniche* C_5^8. Ciascuna di queste curve, essendo base di una rete di quadriche, si potrà certo staccare da f^6 con una quadrica (anzi con infinite quadriche). Se ne conclude che il sistema lineare ∞^5 di quelle C_5^8 su f^6 sarà contenuto (parzialmente) nel sistema lineare doppio di quello delle sezioni iperpiane di f^6. E sul piano rappresentativo di f^6 esso non

---

(1) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve di genere tre*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XXI.

(2) Si vede infatti immediatamente che, dei vertici dei 10 coni cubici della congruenza (3, 6), supposta esistente, tre qualunque non possono stare in linea retta. Inoltre, la congiungente di due qualunque di questi vertici deve essere raggio della congruenza; poichè se no il piano di essa e di un terzo vertice qualunque sarebbe singolare, e questo può escludersi facilmente.

potrà rappresentarsi che col sistema delle curve di 7° ordine passanti doppiamente per i 10 punti fondamentali (del quale sistema quello che rappresenta f^6 è precisamente l'aggiunto). Concludiamo perciò:

Se esiste una congruenza (3, 6) *di genere sezionale 5, la superficie F^9 immagine di essa in S_5 dovrà rappresentarsi sul piano col sistema delle curve di 7° ordine aventi 10 punti doppi a comune.*

78. — Viceversa, il sistema lineare delle curve piane algebriche di 7° ordine con 10 punti basi doppi (non appartenenti a una cubica) rappresenta appunto una superficie F^9 di S_5, contenente 10 cubiche piane, le quali corrispondono alle cubiche che congiungono a 9 a 9 i punti fondamentali, e hanno perciò ancora a due a due un punto comune.

Questa superficie F^9 sta certo sopra una quadrica (M_4^2). Infatti il sistema lineare ∞^{20} di tutte le quadriche di S_5 sega su di essa un sistema lineare di curve di grado $4 \, . \, 9 = 36$ e di genere $5 + 5 + 9 - 1 = 18$ (come si vede subito considerando una curva spezzata in due sezioni iperpiane); dunque la dimensione di questo sistema (certo non sovrabbondante) sarà $\leq 36 - 18 + 1$, ossia ≤ 19, e perciò < 20 (mentre sono invece ∞^{20} le quadriche di S_5). — E si riconosce anche facilmente che questa quadrica (unica) passante per F^9, dovendo contenere i piani delle 10 cubiche, le quali hanno a due a due un punto (variabile) a comune, non può nemmeno essere degenere. La superficie F^9 rappresenterà dunque una certa congruenza di rette; e questa è precisamente di 6ª classe, e quindi di 3° ordine (o viceversa), perchè, ad es., il piano determinato dalle mutue intersezioni di tre cubiche a due a due (piano che appartiene alla M_4^2 fondamentale, incontrando in rette i piani di queste tre cubiche) incontra F^9 in *sei* punti (le tre intersezioni delle cubiche a due a due, e un altro punto su ciascuna di esse).

Esiste dunque veramente una congruenza (3, 6) *di genere sezionale 5, contenente 10 coni cubici* (e, in generale, non altri punti nè piani singolari).

Essa può rappresentarsi sul piano, in modo che ai suoi 10 coni cubici corrispondano le curve di 3° ordine che congiungono a 9 a 9 certi 10 punti. La sua superficie focale è di ordine 14 e classe 20, e ha una curva cuspidale di ordine $3 \left\{ \binom{6}{2} = 1 \right\} = 48$.

§ 14.

La congruenza (3, 7) *di genere sezionale* 6.

79. — Occupiamoci infine della congruenza (3, 7) di genere sezionale 6, già riconosciuta come possibile (n° 42), e della quale dimostreremo ora l'effettiva esistenza. Essa sfugge al teorema generale del § 6, avendo per immagine in S_5 una superficie il cui ordine, indicato con p il genere ($= 6$) delle curve sezioni, sarebbe precisamente $= 2p - 2$. E vedremo infatti ch'essa non è razionale, nè riferibile a una rigata.

Sappiamo che questa congruenza, supposta esistente, deve contenere 20 coni cubici di genere uno. Diremo per brevità che due punti singolari vertici di tali coni sono *congiunti*, ovvero *non congiunti*, secondo che la retta da essi determinata è, o non è raggio della congruenza (e quindi anche generatrice dei due coni). Ciò premesso, si riconosce facilmente:

a) Se due punti singolari A e B non sono congiunti fra loro, ciascuno di essi è congiunto ad ogni altro C. Infatti il piano ABC non è certo piano singolare, perchè se no (tanto se contenesse un inviluppo quadrico di rette della congruenza, quanto se ne contenesse un fascio) si troverebbe in esso qualche punto non singolare, pel quale dovrebbero passare tre raggi della congruenza contenuti in quello stesso piano; il che non può avvenire. Non potranno dunque stare nel piano ABC più di sette raggi della congruenza. Ora 6 di questi, tutti distinti, sono dati da altrettante generatrici dei due coni A e B; dunque fra questi 6 dovranno già esser comprese due delle tre generatrici del cono C; vale a dire le rette AC e BC dovranno appartenere alla congruenza.

b) Se due punti singolari A e B sono congiunti, ve n'è certo un terzo non congiunto a uno almeno dei primi due:

Supponiamo infatti che i punti A e B siano congiunti, oltre che fra loro, anche (entrambi) a ciascuno degli altri 18; e sia C uno qualunque di questi. I tre coni A, B, C avranno a comune:

i tre vertici A, B, C; ciascuno dei quali, essendo triplo per uno dei tre coni, conta come 3 intersezioni almeno;

altri 3 punti nel piano ABC (le ulteriori intersezioni delle rette BC, CA, AB rispett. coi coni A, B, C):

almeno 16 dei rimanenti 17 punti singolari; poichè questi 17 sono tutti congiunti a A e B, e al più uno di essi può non essere congiunto a C.

Si avrebbero dunque complessivamente almeno 28 intersezioni, tutte distinte. Concludiamo perciò che i tre coni ABC dovrebbero avere infiniti punti a comune, costituenti una loro comune direttrice; e questa dovrebbe anche variare se, tenendo fermi A e B, si fa variare il cono C, perchè se no ogni punto di essa apparterrebbe a più di 3 raggi della congruenza, e sarebbe perciò singolare. Ora è impossibile che la curva di 9° ordine intersezione dei due coni A e B (anzi di 8° ordine, quando se ne tolga la generatrice comune ad essi) si scinda in 18 parti, appartenenti rispett. agli altri coni. Vi sarà dunque certo, fra questi 18 coni, uno il quale non sia congiunto o ad A o a B.

Dalla proprietà *a)* segue che quelli fra i 20 punti singolari, che non sono congiunti a ogni altro, si distribuiranno a coppie; in modo che i due punti di ciascuna coppia non siano congiunti fra loro, ma lo siano entrambi ad ogni altro. E queste coppie dovranno anche esaurire i 20 punti — vi saranno cioè 10 coppie consimili —, perchè se no resterebbero sempre due punti congiunti fra loro e ad ogni altro, caso escluso in *b)*.

Dunque: *I venti punti singolari si distribuiscono in dieci coppie, tali che due punti di una stessa coppia non sono mai congiunti, ma due punti di coppie diverse lo sono sempre.*

Nel piano di tre punti, dei quali due non siano congiunti, abbiamo già veduto come sono distribuiti i sette raggi della congruenza. Nel piano di tre punti singolari A, B, C, a due a due congiunti, apparterranno alla congruenza le tre rette BC, CA, AB;

un'altra generatrice ancora di ciascuno dei tre coni A, B, C, e un 7° raggio non contenuto in alcuno di questi tre coni.

80. — Consideriamo ora la superficie F^{10} di S_5 immagine della nostra congruenza, e domandiamoci in quante varietà cubiche (M_4^3) essa sia contenuta.

Il sistema lineare di tutte le M_4^3 di S_5 è di dimensione $\binom{8}{3}-1=55$. Sulla F^{10} queste varietà segheranno un sistema lineare di curve $|\Gamma|$ di grado $9.10=90$, e il cui genere si può dedurre facilmente dalla considerazione delle curve spezzate in tre sezioni iperpiane: esso varrà precisamente $3.6+3.10-2=46$. Ora, se indichiamo con $|C|$ il sistema delle sezioni iperpiane di F^{10}, il sistema triplo $|3C|$ sarà appunto $|\Gamma|$, ovvero il sistema normale in cui quest' ultimo è contenuto. Di più, $|C|$ è il sistema residuo che si ha staccando da $|3C|$ una curva generica del sistema $|2C|$; e quest'ultima curva è di genere $2.6+10-1=21$, sicchè la serie lineare segata su di essa da $|3C|$, la quale è di ordine 60, è certo non speciale. Di qui si trae che la *sovrabbondanza* del sistema lineare $|C|$ non può essere inferiore a quella di $|3C|$ (1). — Ora la superficie F^{10} ha le sezioni non speciali (n° 21); dunque il suo genere geometrico è nullo, e perciò ogni sistema lineare su di essa va considerato come non speciale. Se p_n è il suo genere numerico (che vedremo in seguito essere anche nullo), la sovrabbondanza di $|C|$ sarà $-p_n$; e quella di $|3C|$, supposto di dimensione r, sarà $r-90+46-1-p_n=r-45-p_n$. Avremo perciò:

$$-p_n \geq r-45-p_n$$

ossia $r\leq 45$ (2). — Concludiamo pertanto che per F^{10} passerà un sistema lineare di M_3^4 di dimensione ≥ 9. Fra queste vi sono però le ∞^5 costituite dalla quadrica fondamentale in cui F^{10} deve supporsi contenuta, e da un S_4 variabile. Esisterà quindi un sistema lineare almeno ∞^3 di M_4^3 passanti per F^{10} e nessuna delle quali conterrà come parte la quadrica fondamentale. Vale a dire:

La nostra congruenza (3, 7), *supposta esistente, appartiene a un sistema lineare almeno* ∞^3 *di complessi cubici* (tutti irriducibili, non potendo la congruenza stare in un complesso di grado <3).

81. — Riferiamoci ora, per maggior chiarezza, alla congruenza (7, 3) duale di quella considerata precedentemente. Questa conterrà 20 inviluppi piani di 3ª classe e genere 1, e apparterrà anche a almeno ∞^3 complessi cubici.

Siano α_1, α_2 i piani di due dei 20 inviluppi, tali che la retta $\alpha_1\alpha_2$ non appartenga alla congruenza (n. 79); e siano β_1, β_2 e γ_1, γ_2 altre due delle 10 coppie di

(1) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, "Annali di Matem.", s. II, t. 25, n° 39, I, p. 75. Per la definizione di *sovrabbondanza*, v. n° 35.

(2) Indicato con p_1 il genere ($=46$) del sistema lineare $|3C|$, la sua serie caratteristica sarebbe di ordine $2p_1-2$, e avrebbe perciò potuto essere la serie canonica. Ed è stato per escludere questo, e concluderne $r\leq 45$ (anzichè soltanto $r\leq 46$) che abbiamo dovuto fare un ragionamento un po' più lungo.

piani consimili. Esisterà certo un complesso cubico Γ contenente la data congruenza (7, 3) e le tre rette $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$. Esso conterrà per intero i sei piani rigati α_i, β_i, γ_i: e perciò, se consideriamo, ad es., il punto $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, i tre fasci di raggi aventi i centri in questo punto e contenuti rispett. nei tre piani α_1, β_1, γ_1 apparterranno anche a quel complesso. Ma, fra i 7 raggi della congruenza uscenti dal punto $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, sappiamo che ve n'è uno non contenuto in alcuno dei tre piani α_1, β_1, γ_1; e da ciò si trae che il complesso Γ conterrà altresì l'intera stella di rette $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, come pure le analoghe $\alpha_i \beta_i \gamma_i$: in numero complessivo di *otto*.

D'altra parte le tre coppie di piani $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ individuano una rete di quadriche (avente per punti basi gli otto punti $\alpha_i \beta_i \gamma_i$); e le generatrici (di ambo i sistemi) di tutte le quadriche di questa rete formeranno anche un complesso cubico Γ_1. *Dico che i due complessi* Γ *e* Γ_1 *coincidono.* Infatti essi hanno a comune anzitutto i *sei* piani rigati α_i, β_i, γ_i e le *otto* stelle di rette $\alpha_i \beta_i \gamma_i$. Di più, nella rete considerata vi è un fascio di quadriche passanti per la congiungente s dei due punti basi $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ e $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$; e la curva base di questo fascio si compone della stessa retta s e di una cubica passante per gli altri sei punti $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ e avente s per corda. La congruenza (1, 3) delle corde di questa cubica appartiene certo a Γ_1; e appartiene pure a Γ, avendo a comune con quest'ultimo complesso i sei coni quadrici che proiettano la cubica dai suoi sei punti $\alpha_i \beta_i \gamma_i$, e inoltre il raggio s. Ora, di congruenze (1, 3) di questo tipo, e perciò comuni a Γ e Γ_1, ve ne sono quattro; dunque più che a sufficienza per concludere che i due complessi coincidono [1].

La congruenza (7, 3) sarà dunque contenuta nel complesso cubico formato da tutte le generatrici della rete di quadriche determinata dalle tre coppie di piani $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$. Sia ora $\delta_1\delta_2$ una quarta coppia di piani analoga alle precedenti, e consideriamo l'altra rete determinata dalle coppie di piani $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\delta_1\delta_2$ [2]. Le due reti avranno a comune il fascio determinato dalle due coppie di piani $\alpha_1\alpha_2$ e $\beta_1\beta_2$; e i corrispondenti complessi cubici avranno a comune i quattro piani rigati α_1, α_2, β_1, β_2 e le due congruenze lineari di direttrici rispett. $\alpha_1\beta_1$ e $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_1\beta_2$ e $\alpha_2\beta_1$. L'intersezione residua di questi complessi sarà allora la (sola) congruenza (7, 3) considerata.

Dunque: *La congruenza* (7, 3) *di genere sezionale 6, supposta esistente, deve potersi ottenere come intersezione parziale dei complessi cubici formati dalle generatrici di due reti di quadriche aventi un fascio a comune.*

Possiamo anche osservare che nel sistema lineare ∞^3 determinato dalle quattro coppie di piani $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ e $\delta_1\delta_2$ dovranno essere contenute (in generale) altre *sei* coppie di piani. Su ciascun piano di una tal coppia il sistema ∞^3 di quadriche segherà soltanto una rete di coniche; e ogni retta contenuta (parzialmente) in

---

[1] Questo ragionamento coincide sostanzialmente con quello di cui si vale il sig. MONTESANO (Mem. cit., n° 1) per mostrare che un complesso cubico contenente otto stelle di raggi, delle quali quattro qualunque abbiano i centri non in un piano, si compone delle generatrici delle quadriche di una rete.

[2] Le due reti considerate saranno certo distinte, o almeno si possono supporre tali, perchè una rete di quadriche la quale non contenga (come non contiene nel nostro caso) infinite coppie di piani, contiene al più 6 di tali coppie. Questo numero massimo è raggiunto quando essa contenga quattro fasci di coni; e ciò avviene ogni qual volta vi sia un tetraedro autopolare comune a tutte le quadriche della rete.

questa rete apparterrà a tutto un fascio di quadriche del sistema ∞^3, dunque a una quadrica sì dell'una che dell'altra delle due reti considerate di sopra (e che sono contenute nel sistema ∞^3): essa sarà perciò una retta della nostra congruenza (7, 3). Vale a dire:

I piani delle coppie di inviluppi di 3ª classe non congiunti della congruenza (7, 3), *supposta esistente, sono le 10 coppie di piani di un sistema lineare* ∞^3 *di quadriche; e gli inviluppi stessi sono le Cayleriane delle reti di coniche segate da questo sistema* ∞^3 *sopra quei piani.*

82. — Viceversa, sia dato un sistema lineare ∞^3 di quadriche (Σ), privo di punti basi; e si considerino entro di esso due reti arbitrarie. Le generatrici delle quadriche di queste due reti costituiranno rispett. due complessi cubici, aventi a comune la congruenza (2, 6) delle corde di quella quartica, che è curva base del fascio comune alle due reti (Nel caso considerato al nº prec. questa congruenza si spezzava in due congruenze lineari e quattro piani rigati). L'intersezione residua dei due complessi sarà perciò una congruenza (7, 3). Questa conterrà precisamente 20 inviluppi piani di 3ª classe, nei piani che a coppie formano quadriche del sistema Σ; e questi inviluppi saranno le Cayleriane delle reti di coniche segate da Σ sopra tali piani. — Si vede anche facilmente che la congruenza avrà il genere sezionale 6; perchè, se $\alpha_1\alpha_2$ è una coppia di piani contenuta in Σ, la rigata R^{10} delle rette della congruenza che si appoggiano all'intersezione $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ si comporrà dei due inviluppi di 3ª classe e genere uno contenuti nei piani stessi α_1 e α_2 (i quali non hanno rette a comune), e di una rigata razionale di 4º ordine, avente $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ per direttrice semplice, e avente ancora tre generatrici a comune con ciascuno di quei due inviluppi: sicchè questa rigata (riducibile) sarà appunto di genere 6.

Esistono dunque effettivamente congruenze (7, 3) o (3, 7) di genere sezionale 6. Per definirle nel modo più opportuno, possiamo ancora osservare che ogni retta della congruenza (7, 3) testè ottenuta è generatrice comune di due quadriche distinte appartenenti rispett. alle due reti considerate in Σ, e quindi anche di tutto un fascio di quadriche contenute pure in Σ. — D'altra parte, considerato entro Σ un qualsiasi fascio di quadriche aventi una retta a comune (ossia un fascio la cui curva base si spezzi in una retta e una cubica), si vede subito che quella retta apparterrà al complesso cubico delle generatrici di ogni rete di quadriche contenuta in Σ (poichè questa rete ha certo una quadrica a comune con quel fascio), e perciò anche alla congruenza (7, 3) intersezione (parziale) di due qualunque di quei complessi cubici. — La congruenza (7, 3) non è dunque legata a nessuna particolare coppia di reti contenute in Σ, ma soltanto a quest'ultimo sistema; essa è l'insieme di quelle rette che appartengono a tutto un fascio di quadriche di Σ, anzichè a una sola di queste quadriche (come avviene per una retta generica). Essa appartiene altresì al complesso cubico delle generatrici di ogni rete di quadriche contenuta in Σ; e così si hanno precisamente gli ∞^3 complessi cubici passanti per essa (nº 80).

Esistono dunque congruenze (3, 7) *di genere sezionale 6;* e precisamente *la congruenza duale* (7, 3) *è sempre congiunta a un determinato sistema lineare* ∞^3 *di quadriche privo di punti basi e affatto generale. Essa può definirsi come l'insieme di quelle rette che appartengono a due diverse e perciò a tutto un fascio di quadriche del* *sistema* ∞^3. Sotto altra forma si può anche dire che, fra gli ∞^4 fasci contenuti nel sistema ∞^3, ve ne sono ∞^2 la cui curva base si spezza in una cubica e una retta corda di questa cubica; e sono precisamente le ∞^2 rette così ottenute quelle che costituiscono la congruenza. *La congruenza* (7, 3) *è priva di punti singolari, ma contiene 20 inviluppi piani di 3ª classe e genere uno, in quei piani che a coppie formano quadriche degeneri del sistema* ∞^3.

Questa congruenza è dunque quella delle " *rette principali* " (" *Hauptstrahlen* ") di un sistema lineare ∞^3 di quadriche, già stata considerata dal sig. REYE (1), il quale ne ha pure determinato l'ordine e la classe. — Ogni punto dello spazio appartiene (senza eccezioni) a una rete di quadriche del sistema ∞^3, la quale ha altri 7 punti basi, in generale distinti fra loro e dal primo; le rette della congruenza uscenti da quel primo punto sono quelle che lo congiungono a questi suoi *associati.* Un piano generico sega le quadriche del sistema ∞^3 secondo un sistema lineare ∞^3 di coniche, nel quale sono contenute quattro rette doppie (2); le rette della congruenza che stanno in questo piano sono le diagonali del quadrilatero formato da quelle quattro rette (3).

La congruenza (3, 7) si troverà in una relazione duale con un sistema lineare ∞^3 di quadriche-inviluppi.

83. — Consideriamo ora di nuovo la superficie F^{10} dello spazio S_5, a sezioni di genere 6, immagine della nostra congruenza (3, 7). Essa dovrà contenere 20 cubiche piane, ciascuna delle quali avrà un punto a comune con tutte le rimanenti, meno una. E gli spazi S_4 passanti per una di queste cubiche incontreranno ulteriormente la F^{10} secondo curve di 7° ordine e genere 3, aventi con quella cubica tre punti a comune.

Proiettiamo la superficie F^{10} su di uno spazio S_3 da una retta generica r del piano di una sua cubica γ. Avremo una superficie Φ^7 di S_3 con un punto triplo A immagine della curva γ, e con una curva doppia di 9° ordine (non passante per A). Il secondo piano della quadrica fondamentale passante per r darà come traccia un punto B, quadruplo per la superficie Φ^7 e sestuplo per la sua curva doppia (C^9). Da questo punto la C^9 verrà proiettata secondo un cono cubico, privo di generatrici doppie (per ragioni analoghe a quelle vedute al n. 33) e perciò ellittico; e questo cono incontrerà ancora la Φ^7 secondo una cubica piana δ (proiezione di quella cubica di F^{10} che non ha punti comuni con γ).

Per la superficie F^{10}, e quindi anche per la Φ^7 che ne è proiezione, è nullo, oltre che il genere geometrico, anche il genere numerico; ciò risulta infatti dall'espressione di p_n trovata al n. 33, nella quale deve porsi $t = 0$ (n° 30) e $\tau = 0$

(1) *Geometrie der Lage*, 3te Aufl. III, p. 140 e seg.

(2) Cfr. ad es. SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano...*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XX.

(3) Un caso particolare notevole sarà quello in cui il sistema lineare Σ si componga delle prime polari dei punti dello spazio rispetto a una data superficie cubica. I tre raggi della congruenza contenuti in un piano del pentaedro di questa saranno le diagonali del quadrilatero segato su tale piano dagli altri 4 piani del pentaedro.

(essendo la congruenza risultata completamente priva di raggi multipli). D'altronde si può anche far vedere direttamente che per una superficie di 3° ordine (la quale dipende da 19 parametri) il passaggio per la curva C^9 e per il punto A (condizioni richieste, perchè essa sia aggiunta a Φ^7) equivalgono precisamente a 20 condizioni semplici.

La F^{10} (o la Φ^7) è dunque una superficie regolare di genere zero. — Le superficie Φ^4 aggiunte a Φ^7 segheranno sopra quest'ultima curve di 10° ordine, costituenti il sistema lineare $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F^{10}. Fra queste superficie vi sono quelle composte del cono cubico che da B proietta la curva C^9 e di un piano per A; le corrispondenti curve C' si spezzeranno nella cubica δ (di genere uno) e in una sezione piana di Φ^7 passante per A (perciò di genere 3). Queste due curve avendo 3 punti a comune, se ne conclude che il genere del sistema $|C'|$ è $1+3+3-1=6$, come per $|C|$. E il suo grado (trattandosi di sistema ∞^5 normale) sarà $6+5-1=10$. *I due sistemi* $|C|$ e $|C'|$ *hanno dunque gli stessi caratteri.* Di più, $|C|$ dovrà segare sulla curva generica di $|C'|$ una serie lineare g^5_{10}, la quale non potrà essere che la serie canonica di questa curva. E di qui si trae che $|C|$ è a sua volta l'aggiunto di $|C'|$, ossia coincide col proprio secondo aggiunto. Dunque la superficie di cui si tratta, non è razionale, ma ha invece il bigenere $P=1$ (¹).

La congruenza (3, 7) *di genere sezionale* 6 *non è razionale, ma è invece un ente algebrico* ∞^2 *regolare di genere zero e bigenere uno.*

La superficie Φ^7 dianzi considerata ammetterà pertanto *una* superficie biaggiunta di 6° ordine; vi sarà cioè una e una sola superficie di 6° ordine passante doppiamente per la C^9 e avente anche in A un punto doppio. L'intersezione residua di questa superficie colla Φ^7, esclusa la C^9 che è doppia per entrambe, si comporrà di una curva di 6° ordine avente in A un punto sestuplo, e che dovrà perciò spezzarsi in rette passanti per A. Siccome Φ^7 contiene soltanto tre rette passanti per A (immagini dei tre punti in cui l'asse di proiezione r sopra F^{10} incontra la cubica γ), così, per ragioni di simmetria, quell'intersezione si comporrà di queste tre rette, contate ciascuna due volte. La superficie di 6° ordine biaggiunta di Φ^7 avrà le sezioni ellittiche, e si rappresenterà sul piano con un sistema lineare ∞^3 di cubiche aventi a comune 3 punti in linea retta.

84. — I risultati principali di tutta la nostra ricerca si possono riassumere negli enunciati seguenti:

Le congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare sono tutte di classe $n \leq 13$ e di genere sezionale $p \leq 6$.

Di genere sezionale $p=0$ è soltanto la congruenza cremoniana (3, 1) generata da due piani collineari in posizione generale.

(¹) ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, " Mem. della Soc. It. delle Scienze ,, s. III, t. X, n° 39. Si osservi che se $|C|$ e $|C'|$ sono mutuamente aggiunti, il sistema somma $|C|+|C'|$ avrà per aggiunto tanto $|2C|$ quanto $|2C'|$, e sarà perciò $|2C| \equiv |2C'|$ (a meno di curve eccezionali).

Le congruenze di genere sezionale $p = 1$ ($n \leq 6$) si possono ottenere tutte come proiezioni di sistemi di rette contenuti in varietà cubiche di S_4 con un numero finito e ≤ 6 di punti doppi.

Quelle di genere sezionale $p = 2$ ($n \leq 9$) contengono tutte un unico sistema ∞^1 razionale d'indice 3 di rigate quadriche inviluppanti la superficie focale (che è di 8° ordine).

Quelle di genere sezionale $p = 3$ ($n \leq 13$) sono caratterizzate dal contenere un cono ellittico di ordine $n - 1$. In questo senso esse costituiscono la naturale estensione delle congruenze di 2° ordine di prima specie (contenenti un cono razionale di ordine $n - 1$) (1).

Quelle di genere sezionale $p = 4$ ($n \leq 9$) sono tutte contenute in un complesso tetraedrale; fatta eccezione per:

1) la congruenza (3, 3) intersezione di un complesso lineare non speciale con un complesso cubico;

2) la congruenza (3, 9) formata da un sistema ∞^1 ellittico d'indice 3 di rigate quadriche non aventi alcuna generatrice a comune (§ 7, I).

Le congruenze di genere sezionale 4 contenute in un complesso tetraedrale si possono considerare come le analoghe delle congruenze di 2° ordine di seconda specie (2).

Le congruenze di genere sezionale $p = 5$ sono tutte di classe 6, e contengono 10 coni cubici ellittici; quelle di genere sezionale $p = 6$ sono di classe 7, e contengono 20 coni cubici ellittici.

Queste congruenze sono tutte rappresentabili sul piano, fatta eccezione soltanto:

A) per alcune di quelle di genere sezionale 4, e precisamente:

1) la congruenza (3, 3) contenuta in un complesso lineare, la quale è in generale di genere (geom.co = num.co) *uno*, ma in casi particolari può diventare razionale, o anche riferibile a un cono ellittico;

2) la congruenza (3, 9) di cui sopra, che è pure riferibile a un cono ellittico;

3) le congruenze contenute in un complesso tetraedrale e che, nella consueta rappresentazione di questo complesso sullo spazio di piani, corrispondono a inviluppi di piani tangenti a una curva piana generale di 3ª classe: queste sono anche riferibili a un cono ellittico;

B) per la congruenza (3, 7) di genere sezionale 6, la quale è di genere (geom.co = num.co) *zero* e di bigenere *uno*.

Messina, dicembre 1900.

---

(1) STURM, Op. cit., II, p. 50, n° 318.
(2) STURM, Op. cit., p. 50, n° 318, p. 294, n° 466.