Gino Fano

Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sé

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie V, Vol. **81** (1899), p. 562–565

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1899_6>

Matematica. — *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè.* **Nota del prof. Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.**

È noto che ogni curva algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni proiettive in sè, è razionale. E così pure è razionale ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo *transitivo* (e perciò almeno ∞^2) di trasformazioni proiettive (1).

In questa Nota io mi propongo di dimostrare che anche per le varietà algebriche a tre dimensioni sussiste la proposizione analoga alle precedenti; vale a dire che *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo* (e quindi almeno ∞^3) *di trasformazioni proiettive* (2).

Ci varremo a tal uopo della proposizione seguente: *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni la quale contenga una congruenza razionale e del 1° ordine di curve razionali, dotata di superficie unisecante* (questa superficie potendo anche ridursi a una linea, ovvero a un solo punto). Una tal varietà può infatti rappresentarsi birazionalmente sullo spazio S_3, riferendo la congruenza considerata a una stella di rette di questo spazio, e rappresentando ogni curva di quella congruenza sul raggio corrispondente di questa stella, in modo che alla superficie unisecante della congruenza corrisponda il centro della stella (3).

Sia dunque V una varietà algebrica a tre dimensioni, G un gruppo proiettivo dello spazio a cui questa varietà appartiene; e supponiamo che il gruppo G trasformi in sè questa varietà, e sia transitivo rispetto ad essa.

(1) Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse* (Atti del R. Ist. Veneto, ser. 7ª, t. IV e V, 1893); Fano, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem., 1895).

(2) La determinazione, già effettuata, di tutti i *tipi* di gruppi cremoniani continui dello spazio S_3 (Enriques-Fano, *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.* Annali di Matem., ser. 2ª, t. XXVI; Fano, *I gruppi di Jonquières generalizzati.* Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVIII, 1897-98) permetterà perciò di assegnare anche per le varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè, un numero finito (e precisamente $=16$) di tipi determinati, tali che quelle varietà possano tutte riferirsi birazionalmente a una di queste ultime, in modo che si conservi il carattere proiettivo delle loro trasformazioni.

(3) Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(x\,y\,z)=0$ *con funzioni razionali di due parametri* (Math. Ann., t. XLIX, pag. 20).

Sia anzitutto G un gruppo *integrabile* (1). Esso contiene allora almeno un sottogruppo invariante ∞^1, il quale in questo caso può supporsi (al pari di G) algebrico (2), e avrà perciò traiettorie algebriche e anzi razionali γ. Queste traiettorie formeranno sopra V una congruenza (algebrica) del 1° ordine, invariante rispetto a G, e dotata altresì di superficie unisecante; perchè i punti uniti che il gruppo ∞^1 considerato ha sopra una qualunque delle γ devono descrivere al variare di questa curva, se distinti, due luoghi (superficie, curve,..) anche distinti, ciascuno unisecante le γ medesime (3). E se quei due punti uniti coincidessero sopra ogni γ, si avrebbe un luogo unico, anche unisecante le γ. Rimane perciò soltanto a vedere se la congruenza delle γ sia razionale.

Ora, dall' esistenza di questa varietà unisecante le γ, si deduce immediatamente che sopra V esistono anche infinite superficie e sistemi lineari di superficie unisecanti le stesse γ. Costruendo pertanto un sistema lineare di tali superficie, il quale sia altresì semplice (4) e invariante rispetto a G (e ve ne saranno certo infiniti), noi potremo rappresentare birazionalmente V sopra un' altra varietà V′, sulla quale *alle γ corrisponderanno rette* c, *e al gruppo* G *corrisponderà un gruppo anche proiettivo*. Questo nuovo gruppo opererà dunque *proiettivamente* e *transitivamente* sulla conguenza delle c; e quest' ultima potrà perciò concepirsi come una superficie algebrica con un gruppo proiettivo transitivo di trasformazioni proiettive in sè. Essa sarà dunque razionale, e razionale sarà pure la congruenza delle γ su V (5).

Supponiamo ora che il gruppo G sia *non integrabile*. Esso contiene allora almeno un sottogruppo ∞^3 semplice (6); ed è noto che entro un tal gruppo ogni sottogruppo ∞^1 è algebrico (7). Il gruppo G conterrà perciò ancora dei sottogruppi ∞^1 algebrici; e le traiettorie di questi gruppi saranno ancora curve razionali, formanti congruenze del 1° ordine dotate di superficie unisecanti. Queste congruenze potrebbero tutte coincidere; e per quest' unica congruenza, che sarebbe invariante rispetto a G, si potrebbe allora ripetere il

(1) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 265; vol. III, p. 679-81.

(2) Enriques-Fano, Mem. cit., § 9.

(3) Enriques-Fano, Mem. cit., § 7.

(4) Tale cioè che le superficie di esso passanti per un punto generico di V non passino di conseguenza per altri punti variabili col primo.

(5) Questo ragionamento può estendersi, per induzione completa, al caso di una varietà algebrica a un numero qualunque di dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo, transitivo, integrabile di trasformazioni proiettive in sè.

(6) Lie, op. cit., vol, III, p. 757. Cfr. anche Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie*, II (Leipz. Ber., 1887).

(7) Ciò risulta immediatamente dalle equazioni generali di un gruppo proiettivo semplice ∞^3, che si trovano nel § 3 della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVI, 1895-96).

ragionamento di poc' anzi. In caso contrario, si considerino due diverse Γ e Γ' fra queste congruenze, e si indichino con γ e γ' due loro curve generiche. Le γ che si appoggiano a una stessa γ' (o viceversa) formeranno una serie ∞^1 *razionale;* esse incontrano infatti questa γ' (o γ) secondo gruppi di punti tali, che un punto di quest' ultima curva individua completamente la γ (o γ') che lo contiene, e quindi anche il gruppo della serie considerata su γ' (o γ) cui esso appartiene; sicchè questa serie di gruppi di punti (che è evidentemente algebrica) sarà un' involuzione, e perciò razionale.

Noi possiamo così costruire infinite superficie F, ciascuna delle quali conterrà una serie razionale ∞^1 di curve γ (tutte quelle che si appoggiano a una data γ'); e di queste F ne avremo una doppia infinità, ovvero soltanto una semplice infinità, secondo che le γ appoggiantisi a una γ' generica non incontrano oppure incontrano in conseguenza anche infinite altre di queste curve.

Nel primo caso per ogni γ passeranno ∞^1 superficie F; e queste formeranno anche una serie razionale σ, perchè conterranno rispettivamente le singole γ' appoggiantisi a quella γ, ovvero i gruppi di un' involuzione in questa serie di γ' (che è razionale). Considerando pertanto la congruenza Γ come una superficie, e le serie ∞^1 di γ contenute rispettivamente nelle F di una serie σ come curve di questa superficie, la Γ ci apparirà come *una superficie contenente una serie razionale ∞^1 di curve razionali.* E una tale superficie è sempre razionale (¹).

Per giungere alla stessa conclusione nel secondo caso, quando cioè vi è soltanto una semplice infinità di superficie F, basterà dimostrare che è razionale questa serie ∞^1. Ora, anzitutto le ∞^1 superficie F formano un fascio, ossia per un punto generico di V ne passa una sola: quest' una deve infatti contenere la (unica) γ passante per questo punto, e quindi tutte le γ' che si appoggiano a questa γ; è dunque completamente individuata. Di più, se esiste su V una congruenza Γ'' analoga a Γ e Γ', le cui linee γ'' non stiano sulle F, il fascio delle F dovrà segare ciascuna di queste γ'' (che sono curve razionali) in gruppi di un' involuzione, e sarà perciò anche razionale. Se invece lo stesso fascio appartiene a tutte le altre congruenze analoghe a Γ e Γ', esso (come unico del suo tipo) sarà necessariamente invariante rispetto al gruppo proiettivo G; e questo gruppo, transitivo rispetto alla varietà V, dovrà operare su di esso in modo almeno ∞^1: di qui segue appunto la razionalità del detto fascio.

Osserviamo a tal uopo che una serie continua qualsiasi σ di varietà algebriche F di uno spazio S_r può sempre considerarsi come una varietà μ di uno spazio opportuno, tale che alle eventuali collineazioni di S_r le quali mutino la serie σ in sè stessa corrispondano sopra μ trasformazioni anche pro-

(¹) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1894).

iettive. Ciascuna delle F può infatti considerarsi come intersezione completa di un certo numero di varietà algebriche M_{r-1} di S_r; quindi anche come intersezione di un certo numero (eventualmente anche superiore) di M_{r-1} *di uno stesso ordine* n (abbastanza grande), e perciò ancora come varietà base del sistema lineare di $M_{r-1}{}^n$, così individuato. Alle F noi sostituiamo così dei *sistemi lineari di varietà* $M_{r-1}{}^n$, i quali possono concepirsi come spazi minori S_k (per un certo valore di k) entro lo spazio di dimensione

$$R = \binom{n+r}{r} - 1$$

formato da tutte le $M^n{}_{r-1}$ di S_r, e quindi anche come *punti* dello spazio di dimensione $\binom{R+1}{k+1} - 1$ a cui appartiene l' insieme di tutti quegli S_k. E in queste rappresentazioni verrà sempre conservato il carattere proiettivo delle collineazioni considerate in S_r (1).

Il fascio di superficie F dianzi considerato si può dunque concepire come una curva algebrica con (almeno) ∞^1 trasformazioni proiettive in sè; esso è quindi razionale, come appunto si voleva dimostrare.

(1) Quest' osservazione permetterebbe anche di abbreviare leggermente l' ultima parte del ragionamento relativo al caso di un gruppo G integrabile.