Gino Fano

Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine e del 6° ordine, le cui curve integrali sono contenute in una quadrica

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **34** (1899), p. 415–445

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1899_3>

LETTURE

Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine, le cui curve integrali sono contenute in una quadrica;

Nota di GINO FANO.

1. — Lo studio dei diversi casi che può presentare una equazione differenziale lineare omogenea di dato ordine n, nella quale n soluzioni indipendenti sono legate da una o più equazioni algebriche omogenee a coefficienti costanti, fu iniziato dal Sig. FUCHS in una breve Nota inserta nei " Berliner Berichte „ (8 giugno 1892), e da lui stesso completamente esaurito per le equazioni differenziali lineari del 3° ordine nella Memoria: *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen...* (" Acta Math. „, vol. I). Alle ricerche di FUCHS seguirono quelle di GOURSAT (" Compt. Rend. „, 97, 100, 101; " Bull. de la Soc. Math. de France „, t. XI), HALPHEN (" Acta Math. „, vol. III), LUDWIG SCHLESINGER (Diss. Berlin, 1887) e altri sopra equazioni differenziali lineari del 4° ordine, e quelle di WALLENBERG (" Journal de Crelle „, t. 113) per equazioni di ordine qualunque, la cui curva *attachée* o *curva integrale* sia algebrica [1]. Io stesso ho mostrato quattro anni or sono (in alcune Note pubblicate nei Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1° sem. dell'anno 1895) qual vantaggio si possa trarre per queste ricerche dalla determinazione delle varietà algebriche di uno spazio qualunque che ammettono infinite trasformazioni proiettive in sè, e ho applicate queste considerazioni allo studio di tutti i casi in cui la curva integrale dell'equazione differenziale proposta è algebrica o contenuta in una superficie algebrica.

Un altro caso particolarmente notevole è quello di un'equa-

(1) Tutte queste ricerche furono nuovamente esposte da LUDWIG SCHLESINGER nel 2° vol. della sua opera: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Berlin, 1897); cfr. in part. i n. 185-193.

zione differenziale lineare di ordine qualunque n, nella quale n soluzioni indipendenti sono legate da una (sola) equazione *quadratica* omogenea a coefficienti costanti. E si può anche limitarsi al caso in cui quest'ultima equazione abbia il discriminante diverso da zero [1], perchè, se no, essa potrebbe ridursi a contenere soltanto un numero $m < n$ di soluzioni (eguale precisamente alla caratteristica del suo discriminante); e queste m soluzioni determinerebbero allora un sistema lineare invariante rispetto al gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, e soddisfarebbero perciò a un'equazione differenziale lineare di ordine m coi coefficienti appartenenti allo stesso campo di razionalità primitivo. L'equazione differenziale proposta sarebbe quindi *riducibile* (nel detto campo di razionalità), e la sua integrazione sarebbe ricondotta a quella di due altre equazioni differenziali lineari di ordini rispett. m e $n - m$ (oltre ad un certo numero di quadrature), la prima di queste due equazioni avendo altresì (come la proposta) m soluzioni distinte legate da una relazione quadratica omogenea, e di discriminante non nullo quando la si consideri come equazione fra sole m variabili.

In questo caso di una (sola) relazione quadratica omogenea è già noto, e d'altronde evidente, che per $n = 3$ la curva integrale dell' equazione differenziale proposta è una conica; e il Sig. Fuchs ha anzi dimostrato (l. c.) che quest'equazione differenziale deve allora essere soddisfatta dai quadrati di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine, che può formarsi razionalmente. — Per $n = 4$ la curva integrale è contenuta in una quadrica di S_3; e, se questa quadrica non è degenere, l'equazione differenziale proposta è soddisfatta dai prodotti di due (distinte) equazioni differenziali lineari di 2° ordine, i cui coefficienti risultano anche razionalmente noti, dopo

---

[1] L'equazione differenziale proposta può allora trasformarsi nella propria aggiunta con una sostituzione $z = a_0 y + a_1 y' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)}$, dove le a sono funzioni appartenenti al campo di razionalità definito dai coefficienti della stessa equazione proposta. Si cfr. a questo proposito la mia Nota: *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte*, pubblicata nello scorso fascicolo di questi Atti. E per il caso di una relazione quadratica con discriminante nullo si veggano altresì le mie *Osservazioni*, nel fasc. 6° dei " Rend. dell'Accad. dei Lincei ", dell'anno corrente.

che al campo di razionalità primitivo si sia aggiunta la radice quadrata di una certa funzione razionale [1]. — Per $n > 4$ la questione non è ancora stata studiata completamente; soltanto HALPHEN nella breve Nota: *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires* [2] ha affermato (senza dimostrarlo) che nei due casi successivi $n = 5$ e $n = 6$ l'integrazione dell'equazione differenziale proposta può ricondursi rispett. a quella di un'equazione differenziale lineare del 4° ordine e a quella di due equazioni differenziali lineari, una del 2° e una del 4° ordine. Ma le sue ricerche in proposito, ch'egli si riservava di esporre in lavori successivi, non furono mai pubblicate [3]. — In questa Nota io mi propongo appunto di studiare questi due casi, valendomi, in parte almeno, di quegli stessi concetti geometrici che sembra avessero guidato l'HALPHEN nelle sue ricerche [4]. Il risultato da lui enunciato si troverà qui maggiormente precisato, e in parte anche semplificato. Comin-

---

(1) GOURSAT, " Compt. Rend. „, t. 97, p. 31; HALPHEN, Mem. cit., p. 344 e seg.; SCHLESINGER, Op. e vol. cit., p. 234 e seg.

(2) " Compt. Rend. „, t. 101, p. 664-66 (1885). In questa Nota è anche mostrato come il caso in cui sia soltanto razionalmente nota una forma quadratica a coefficienti costanti fra n soluzioni distinte possa facilmente ricondursi al caso in cui questa stessa forma è identicamente nulla, e si ha perciò una relazione quadratica omogenea fra quelle n soluzioni.

(3) Dall'elenco dei lavori di HALPHEN pubblicato dal sig. GUCCIA nel 3° volume dei " Rend. del Circolo Mat. di Palermo „ (1889) risulta che la Nota cit. è il penultimo dei lavori di HALPHEN relativi ad equazioni differenziali lineari; e l'ultimo di questi lavori è una Nota pubblicata nello stesso volume dei " Compt. Rend. „, sopra una classe particolare di equazioni differenziali lineari, che si possono integrare con funzioni razionali ed esponenziali.

(4) " *C'est une idée géométrique qui m'a servi de guide; car le problème qui* " *consiste à chercher l'abaissement de l'ordre pour ces équations différentielles* " *coïncide avec celui de la recherche d'une ligne asymptotique sur une surface* " *gauche* „ (Nota cit., p. 665). Queste parole mettono fuori dubbio che HALPHEN intendesse rappresentare la curva *attachée* o curva integrale dell'equazione differenziale proposta — la quale deve stare in una quadrica, che possiamo supporre non degenere, dello spazio S_4 o S_5 — mediante una *rigata* di S_3 (contenuta, nel primo caso, in un complesso lineare). Tuttavia, per $n = 6$, a me è sembrato opportuno sostituire alla considerazione delle asintotiche di questa rigata, quella della curva luogo dei contatti delle tangenti quadripunte.

ceremo anzi collo studio del caso $n = 6$, nel quale sarà poi facile far rientrare anche il caso $n = 5$.

2. — Si abbia un'equazione differenziale lineare del 6° ordine:

$$z^{\mathrm{VI}} + p_1 z^{\mathrm{V}} + p_2 z^{\mathrm{IV}} + \ldots + p_6 z = 0 \tag{1}$$

dove le p_i sono funzioni della variabile indipendente x, le quali determineranno un certo campo di razionalità. Si supponga inoltre che 6 soluzioni indipendenti $z_1, z_2, \ldots z_6$ di quest'equazione differenziale siano legate da una relazione quadratica omogenea di discriminante non nullo; relazione che, scegliendo opportunamente quelle soluzioni, potrà sempre assumere la forma:

$$f(z) \equiv z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0. \tag{2}$$

Interpretando queste funzioni $z_i(x)$ come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio S_5, il punto (z) che ne risulta individuato descriverà, al variare della x, una curva γ, che possiamo chiamare *curva integrale* dell'equazione differenziale (1); e questa curva sarà contenuta nella quadrica non degenere rappresentata dall'equazione (2). — Noi supporremo ancora che le funzioni $z_i(x)$ non soddisfacciano, all'infuori della (2), ad altre relazioni quadratiche omogenee a coefficienti costanti (e che perciò la curva γ non sia contenuta in altre quadriche dello spazio S_5 (¹)). Allora tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1) dovranno trasformare in sè stessa l'equazione (2): quest'equazione deve infatti continuare a sussistere quando alle z_i si applichi una qualunque sostituzione di quel gruppo (²); e, per l'ipotesi testè introdotta, l'equazione (certo quadratica) risultante da questa sostituzione non può essere di-

(¹) Se invece la curva γ fosse contenuta in due diverse quadriche di S_5, e quindi nella varietà a tre dimensioni di loro intersezione, l'equazione differenziale proposta darebbe luogo ad alcuni casi diversi da quello che noi studieremo, ma la cui determinazione non offrirebbe alcuna difficoltà. E i casi in cui γ fosse addirittura una curva algebrica o contenuta in una superficie algebrica si possono ritenere tutti noti, in seguito ai miei lavori cit.

(²) Cfr. ad es. Schlesinger, Op. e vol. cit., p. 77, 94.

stinta dalla (2) [1]. Quel gruppo di razionalità sarà perciò contenuto nel gruppo G delle ∞^{16} sostituzioni lineari delle z_i che mutano in sè stessa l'equazione (2); e si può anzi dire che in generale (ove cioè non siano razionalmente note altre funzioni differenziali razionali delle z_i, oltre quelle che già lo sono in conseguenza della (2)) esso coinciderà con quest'ultimo gruppo.

Ora, le variabili z_i legate dall'equazione (2) possono anche interpretarsi come *coordinate Plückeriane di retta* in uno spazio S_3 (assumendo come quadrica di S_5 rappresentata dall'equazione (2) l'insieme di tutte le rette di questo S_3). Allora, invece di una curva γ, avremo una *rigata integrale* R dell'equazione differenziale (1); e le operazioni del gruppo di razionalità di questa equazione — anzi quelle dell'intero gruppo G — si rappresenteranno geometricamente mediante trasformazioni *proiettive* dello spazio S_3 in cui R è contenuta. È noto altresì che le operazioni di G si distribuiscono in due diverse schiere continue, alle quali corrispondono rispett. le schiere totali ∞^{15} delle trasformazioni collineari e reciproche di questo spazio S_3 (in modo precisamente che ad ogni sistema di ∞^1 operazioni di G, le quali producano sui mutui rapporti delle z_i una medesima sostituzione, corrisponde sempre la medesima proiettività in S_3). Al gruppo monodromico dell' equazione (1) corrisponderà in S_3 un gruppo discontinuo di proiettività (omografie e correlazioni) trasformanti la rigata R in sè stessa.

Non potendo le z_i esser legate da alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti (appunto perchè le abbiamo supposte soluzioni *indipendenti* della (1)), la rigata R non sarà contenuta in alcun complesso lineare di rette.

Essa sarà poi una sviluppabile (quando due qualunque sue generatrici consecutive si incontrino, ossia) quando la curva γ che la rappresenta in S_5 abbia anche le sue tangenti contenute nella quadrica (2). Perciò è necessario e sufficiente che, oltre alla relazione (2), sia soddisfatta identicamente anche quest'altra:

$$f(z') \equiv z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' = 0$$

[1] Questa invariantività dell'equazione (2) è anzi la sola condizione che a noi veramente occorre. Se le z_i soddisfacessero anche ad altre equazioni quadratiche omogenee, restando pur sempre invariante la (2) rispetto al gruppo di razionalità dell'equazione (1), le considerazioni che esporremo sarebbero egualmente valide, e anzi suscettibili di qualche semplificazione.

dove gli apici indicano derivazione rispetto alla variabile indipendente x. Servendoci di una denominazione già usata da HALPHEN (Nota cit., p. 665) potremo dire che le *rigate gobbe* corrispondono ad equazioni differenziali di *rango uno* rispetto alla forma quadratica (2), mentre le *sviluppabili* corrispondono ad equazioni differenziali di rango (massimo) *due*. Il caso in cui sia ancora:

$$f(z'') \equiv z_1'' z_2'' + z_3'' z_4'' + z_5'' z_6'' = 0$$

risulta qui escluso, perchè la rigata R sarebbe un cono o un inviluppo piano [1], e perciò certo contenuta in infiniti complessi lineari.

3. — Ci occuperemo anzitutto del caso in cui R sia una rigata gobba, e si abbia perciò $z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' \neq 0$ [2].

Sopra ogni generatrice di R vi sono allora due punti, in generale distinti (ma che potrebbero anche coincidere, e potrebbero altresì coincidere per ogni generatrice), nei quali le tangenti principali del secondo sistema sono tangenti non soltanto tripunte, ma quadripunte — incontrano cioè quattro generatrici consecutive —. Questi due punti diventano indeterminati sol-

---

(1) Cfr. ad es. KOENIGS, *La géométrie réglée et ses applications* (Paris, 1895), p. 62-64.

(2) La determinazione delle asintotiche sopra questa rigata — ossia delle sviluppabili contenute nella congruenza delle tangenti principali — deve dipendere in generale da un' *Equazione di Riccati*. Quest' equazione, partendo appunto da un sistema di coordinate di retta, trovasi calcolata nella Memoria del sig. VOSS: *Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen* („ Math. Ann. „, vol. 12, 1877, cfr. in part. p. 491). I relativi coefficienti sarebbero nel nostro caso funzioni moltiplicative di x, e quindi funzioni esponenziali di integrali di funzioni razionali. È anche noto come a una tale equazione si possa facilmente sostituire un'equazione differenziale lineare di 2° ordine; e a quest' ultima equazione avrà probabilmente alluso HALPHEN nelle sue parole da noi riportate — e più sopra anche, dove parla appunto dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine —, siccome quella che gli permetteva di sostituire alla rigata gobba R la sviluppabile circoscritta a una delle sue asintotiche, trasformando così l'equazione differenziale proposta in un'altra di rango massimo (ossia $= 2$) rispetto alla forma quadratica (2).

tanto quando queste quattro generatrici appartengono a una medesima quadrica, il che non può certo avvenire per ogni generatrice di R, perchè se no R stessa sarebbe una quadrica, e perciò contenuta (contro l'ipotesi) in infiniti complessi lineari.

Supponiamo pertanto di aver introdotto in uno spazio S_3 un sistema qualunque di coordinate proiettive omogenee di punti (y_h) e di piani (u_h), tali che sia $\sum\limits_h u_h y_h = 0$ la condizione di incidenza di due elementi di nome diverso; e le sei coordinate Plückeriane r_i di una retta qualunque, legate dalla relazione $r_1 r_2 + r_3 r_4 + r_5 r_6 = 0$, si esprimano (a meno eventualmente di uno stesso fattore*) per mezzo delle coordinate di due punti (y) e $(\bar{y})$ ovvero di due piani (u) e $(\bar{u})$ ad essa appartenenti, mediante le relazioni:

$$r_1 = (y_1\bar{y}_2) = (u_3\bar{u}_4) \quad r_3 = (y_1\bar{y}_3) = (u_4\bar{u}_2) \quad r_5 = (y_1\bar{y}_4) = (u_2\bar{u}_3)$$

$$r_2 = (y_3\bar{y}_4) = (u_1\bar{u}_2) \quad r_4 = (y_4\bar{y}_2) = (u_1\bar{u}_3) \quad r_6 = (y_2\bar{y}_3(= (u_1\bar{u}\ )$$

Interpretando in tal guisa, come coordinate r_i, le sei soluzioni distinte z_i dell' equazione differenziale (1) legate dalla relazione (2), noi verremo a costruire, al variare della x, la corrispondente rigata integrale R.

I mutui rapporti delle coordinate ς_i di una tangente quadripunta di R saranno determinati (in funzione delle z_i e loro derivate, e quindi della variabile indipendente x) dalle cinque equazioni:

$$(3)\qquad \begin{gathered} f\binom{z}{\varsigma} = 0 \quad f\binom{z'}{\varsigma} = 0 \quad f\binom{z''}{\varsigma} = 0 \quad f\binom{z'''}{\varsigma} = 0 \\ f(\varsigma) \equiv \varsigma_1\varsigma_2 + \varsigma_3\varsigma_4 + \varsigma_5\varsigma_6 = 0 \end{gathered}$$

dove $f\binom{z}{\varsigma}$ e le espressioni analoghe indicano forme bilineari polari di $f(z)$.

Per risolvere questo sistema di equazioni conviene introdurre l'incognita ausiliaria:

$$\rho = -f\binom{z^{\mathrm{IV}}}{\varsigma} : f\binom{z^{\mathrm{V}}}{\varsigma}.$$

Allora dalle prime quattro equazioni (3), congiunte a quest'ultima, potremo subito ricavare i mutui rapporti delle ς_i, in funzione di ρ; e se con Z_i indichiamo il subdeterminante complementare dell' elemento $\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^{\mathrm{v}}$ nel determinante $D(z_1, z_2, \dots z_6)$, potremo assumere:

$$\varsigma_i = Z_i + \rho Z'_i$$

essendo ρ radice dell'equazione di 2° grado:

$$\rho^2 f(Z') + 2\rho f\left(\frac{Z'}{Z}\right) + f(Z) = 0. \tag{4}$$

Determinate così le ς_i, si trovano facilmente le coordinate y_h e u_h del punto e del piano comune alle rette (z) e (ς); e indicando con λ, μ due fattori qualunque, funzioni di x, potremo porre:

$$y_1 = \lambda(\varsigma_1 z_2 + \varsigma_3 z_4 + \varsigma_5 z_6) \quad y_2 = \lambda(z_4 \varsigma_6) \quad y_3 = \lambda(z_6 \varsigma_2) \quad y_4 = \lambda(z_2 \varsigma_4)$$

$$u_1 = \mu(z_1 \varsigma_2 + z_3 \varsigma_4 + z_5 \varsigma_6) \quad u_2 = \mu(z_3 \varsigma_5) \quad u_3 = \mu(z_5 \varsigma_1) \quad u_4 = \mu(z_1 \varsigma_3)$$

purchè almeno non sia $\frac{z_2}{\varsigma_2} = \frac{z_4}{\varsigma_4} = \frac{z_6}{\varsigma_6}$ $\left(\text{oppure rispettivamente } \frac{z_1}{\varsigma_1} = \frac{z_3}{\varsigma_3} = \frac{z_5}{\varsigma_5}\right)$, nel qual caso, ad evitare l'annullarsi di tutte quattro le y_h (o delle u_h), basterebbe permutare i sei indici in modo opportuno.

Ai fattori tuttora arbitrari λ e μ converrà attribuire i valori seguenti:

$$\lambda = [z_2 Z_4 Z_6']^{-\frac{1}{2}} \qquad \mu = [z_1 Z_3 Z_5']^{-\frac{1}{2}}.$$

Allora, se con ρ_1 e ρ_2 si indicano le due radici, supposte distinte, dell'equazione (4), e per ogni coppia di punti (y) appartenenti a una stessa generatrice (z) — e chiamiamoli $(y^{(1)})$ e $(y^{(2)})$ — si formano i determinanti $(y_h^{(1)}\, y_k^{(2)})$, i quali dovranno risultare proporzionali (in un certo ordine) alle z_i, si trova che questi stessi determinanti risultano precisamente eguali alle z_i moltiplicate per il fattore $\rho_2 - \rho_1$. La stessa proprietà sussiste pure relativamente ai due piani $(u^{(1)})$ e $(u^{(2)})$.

Ora, le variabili Z_i, prese in ordine opportuno, non sono altro che i coefficienti dell'equazione del complesso lineare determinato da cinque generatrici consecutive della rigata R; e di qui si trae che esse (e quindi anche le Z_i') sono cogredienti alle z_i (a meno di uno stesso fattore costante) rispetto a tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1). I mutui rapporti dei coefficienti dell'equazione (4) sono dunque funzioni differenziali razionali delle z_i, le quali rimangono invariate (anche formalmente) per tutte le sostituzioni del detto gruppo: essi apparterranno perciò, come funzioni di x, al dato campo di razionalità, e si esprimeranno, tenuto conto della (2), mediante funzioni razionali (che potranno effettivamente calcolarsi) delle p_i e loro derivate. Ne segue che ρ, a sua volta, si esprimerà razionalmente mediante le p_i e loro derivate e la radice quadrata di una funzione razionale delle stesse p_i e loro derivate. Intendendo pertanto *aggiunto* questo radicale quadratico al campo primitivo (1), potremo considerare anche ρ come razionalmente noto, e le ς_i come funzioni differenziali razionali delle z_i.

4. — Domandiamoci ora come si comportino le y_h e le u_h, considerate come funzioni della variabile indipendente x, rispetto alle operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1).

Al variare della x, il punto (y) e il piano (u) descrivono rispett. (un ramo del)la linea γ, luogo dei punti di contatto della rigata R colle sue tangenti quadripunte, e la sviluppabile Γ circoscritta ad R lungo questa stessa linea (o ramo di linea). L'aggiunzione del radicale quadratico considerato, al quale intendiamo dato nelle espressioni delle y_h e u_h un medesimo segno iniziale, corrisponde appunto alla separazione dei due punti in cui la linea γ incontra quella qualunque generatrice (z) che si considera come iniziale.

Ora, ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione (1) è rappresentata da una sostituzione lineare:

$$\bar{z}_i = \Sigma\, \alpha_{ik} z_k \tag{5}$$

(1) Il che però non implica ancora una riduzione del gruppo di razionalità dell' equazione proposta, non risultando con ciò aggiunta nessuna ulteriore funzione differenziale razionale delle z_i.

la quale ha per effetto di sostituire alla considerazione della rigata R quella di una sua trasformata *proiettiva* (collineare o reciproca) $\overline{R}$, tale che le coordinate di due generatrici corrispondenti (z) e $(\overline{z})$ sono appunto legate da queste relazioni. Questa proiettività muterà in ogni caso le tangenti quadripunte di R nelle tangenti quadripunte di $\overline{R}$; e perciò, se indichiamo con $\overline{\gamma}$ e $\overline{\Gamma}$ gli enti analoghi a γ e Γ sopra $\overline{R}$, è chiaro che alla curva γ e alla sviluppabile Γ corrisponderanno rispettivamente la curva $\overline{\gamma}$ di $\overline{R}$ e la sviluppabile $\overline{\Gamma}$ se si tratta di una collineazione, e questi stessi enti scambiati se si tratta di una reciprocità. — E perciò ancora, se indichiamo con $\overline{y}_h$ le coordinate di un punto variabile di $\overline{\gamma}$ e con $\overline{u}_h$ quelle del piano ivi tangente a $\overline{R}$ (e contenuto perciò in $\overline{\Gamma}$), intendendo precisamente che queste coordinate siano composte mediante le $\overline{z}_i$ (e la x) nello stesso modo in cui le y_h e le u_h lo sono mediante le z_i (e la x), è chiaro che, in ogni operazione di quel gruppo di razionalità, gli infiniti punti $\overline{y}(x)$ nasceranno o dagli infiniti punti $y(x)$, o dagli infiniti piani $u(x)$, mediante una trasformazione proiettiva — rispett. collineare o reciproca —; e perciò le $\overline{y}_h$ saranno, a meno forse di uno stesso fattore σ, funzioni lineari a coefficienti costanti rispett. delle y_h o delle u_h; si avrà cioè:

$$\sigma \overline{y}_h = \sum_k a_{hk} y_k \qquad \text{ovvero} \qquad \sigma \overline{y}_h = \sum_k a_{hk} u_k ;$$

e per conseguenza:

$$\tau \overline{u}_h = \sum_k A_{hk} u_k \qquad \text{ovvero} \qquad \tau \overline{u}_h = \sum_k A_{hk} y_k$$

essendo A_{hk} il subdeterminante complementare di a_{hk} nel determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$.

È facile anzi vedere che, in seguito al modo in cui si è disposto dei fattori arbitrarii contenute nelle coordinate y_h e u_h, $\overline{y}_h$ e $\overline{u}_h$, i fattori σ e τ devono risultare costanti. Infatti, supposto per il momento che l'equazione (4) abbia radici distinte ρ_1 e ρ_2, si considerino sopra $\overline{R}$ i due punti $(\overline{y}^{(1)})$ e $(\overline{y}^{(2)})$ appartenenti a una stessa generatrice $(\overline{z})$, coi loro corrispondenti $(y^{(1)})$ e $(y^{(2)})$ sopra R, o coi piani corrispondenti $(u^{(1)})$ e $(u^{(2)})$. I binomi $(\overline{y}_h^{(1)}\ \overline{y}_k^{(2)})$, essendo eguali, in un certo ordine e a meno del fattore comune $\rho_2 - \rho_1$, alle $\bar{z}_i$, dovranno esprimersi (in forza delle (5)) mediante funzioni lineari a coefficienti costanti dei binomi $(y_h^{(1)}\, y_k^{(2)})$ ovvero $(u_h^{(1)}\, u_k^{(2)})$ che, a meno dello stesso fattore (razionale) $\rho_2 - \rho_1$, sono eguali in un certo ordine alle z_i; e di qui si trae appunto che σ^2, e quindi anche σ (e analogamente τ) sono costanti. Possiamo dire anzi che la sostituzione quaternaria considerata avrà la sostituzione (5) per " associata " — a meno di un fattore costante comune a tutti i coefficienti [1] — il che implica appunto la costanza di σ e τ; e questa proposizione continuerà evidentemente a sussistere se $\rho_1 = \rho_2$.

Ora, i determinanti di 4° ordine estratti dalle due matrici:

$$\left|\begin{matrix} y_1^{\mathrm{IV}} & y_1''' & y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2^{\mathrm{IV}} & y_2''' & y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_3^{\mathrm{IV}} & y_3''' & y_3'' & y_3' & y_3 \\ y_4^{\mathrm{IV}} & y_4''' & y_4'' & y_4' & y_4 \end{matrix}\right| \quad \text{e} \quad \left|\begin{matrix} u_1^{\mathrm{IV}} & u_1''' & u_1'' & u_1' & u_1 \\ u_2^{\mathrm{IV}} & u_2''' & u_2'' & u_2' & u_2 \\ u_3^{\mathrm{IV}} & u_3''' & u_3'' & u_3' & u_3 \\ u_4^{\mathrm{IV}} & u_4''' & u_4'' & u_4' & u_4 \end{matrix}\right|$$

sono evidentemente funzioni differenziali razionali delle z_i, perchè nei loro elementi non entrano altre espressioni irrazionali all'infuori rispett. degli irrazionali quadratici λ e μ, i quali compaiono soltanto come fattori nei singoli elementi (essendo sempre razionale tutta la parte residua), e compariranno perciò nei vari determinanti solo ad esponenti pari. Pertanto, se indichiamo con $\mathrm{Y}^{(i)}$ e $\mathrm{U}^{(i)}$ i determinanti ottenuti rispett. dalle due matrici sopprimendone le $(i+1)^{\mathrm{sime}}$ verticali, i rapporti $\frac{\mathrm{Y}^{(i)}}{\mathrm{Y}^{(0)}}$ e $\frac{\mathrm{U}^{(i)}}{\mathrm{U}^{(0)}}$ saranno anch'essi funzioni differenziali razionali delle z (nel campo di razionalità esteso come si è detto al n° prec.) le quali, *come funzioni di x*, si conserveranno inalterate rispetto a tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione proposta, a meno che non avvenga (e sarà questo il caso di un'operazione rappresentata da una correlazione di S_3) che tutte le funzioni $\frac{\mathrm{Y}^{(i)}}{\mathrm{Y}^{(0)}}$ si scambino colle analoghe $\frac{\mathrm{U}^{(i)}}{\mathrm{U}^{(0)}}$.

---

[1] Ossia le a_{ik} coincideranno, a meno di un tal fattore, coi determinanti di 2° ordine formati colle a_{hk}.

In ogni caso però le funzioni simmetriche di queste coppie di rapporti, in particolare le somme $\frac{Y^{(i)}}{Y^{(0)}}+\frac{U^{(i)}}{U^{(0)}}$ e i prodotti $\frac{Y^{(i)}}{Y^{(0)}}\cdot\frac{U^{(i)}}{U^{(0)}}$ saranno certo invarianti, e si esprimeranno perciò razionalmente mediante le p_i, le loro derivate, e il radicale quadratico considerato al n° prec. E di qui seguiranno tosto le espressioni dei mutui rapporti delle $Y^{(i)}$ e delle $U^{(i)}$ colla sola aggiunta al campo di razionalità di un ulteriore radicale quadratico *unico*, perchè quando siano razionalmente noti due rapporti $\frac{Y^{(i)}}{Y^{(0)}}$ e $\frac{U^{(i)}}{U^{(0)}}$, e ridotto perciò il gruppo di razionalità a un gruppo continuo (ossia di sole collineazioni in S_3), devono già risultare razionalmente noti anche tutti i rapporti analoghi, per ogni valore di i).

Ponendo pertanto $\frac{Y^{(i)}}{Y^{(0)}}=(-1)^i q_i$, potremo formare l'equazione differenziale lineare di 4° ordine:

$$v^{\mathrm{IV}}+q_1 v'''+q_2 v''+q_3 v'+q_4 v=0 \tag{6}$$

i cui coefficienti saranno funzioni razionali delle p_i e loro derivate e dei due radicali quadratici stati successivamente aggiunti al campo di razionalità primitivo; e a quest'equazione dovranno soddisfare tanto le y_h quanto le u_h. Più esattamente, ogni soluzione di quest'equazione differenziale ammetterà, entro una regione abbastanza piccola del campo di razionalità primitivo, *quattro* determinazioni diverse, corrispondenti (in modo ben determinato, finchè restiamo entro quella regione) ai doppi segni dei due radicali stati aggiunti al campo stesso (determinazioni che si ridurranno tuttavia a due sole se l'equazione (4) ha una radice doppia). Le quattro determinazioni che così si ottengono (in generale) per un dato sistema qualunque di soluzioni indipendenti, proseguite analiticamente, si potranno assumere rispett. come coordinate dei due punti (y) e dei due piani (u) appartenenti a una stessa generatrice (z) della rigata R. Se il campo di razionalità primitivo si suppone definito da una certa superficie di Riemann, ogni cammino chiuso sopra questa superficie corrisponderà a un'operazione, in generale non identica, del gruppo monodromico dell' equazione differenziale proposta; e secondo che questo cammino non produce oppure produce un cambiamento di segno nel secondo dei radicali quadratici considerati, l'operazione stessa si tradurrà geometricamente in una trasformazione collineare o reciproca della rigata R in sè medesima.

5. — Se l'equazione (4) ammette due radici distinte ρ_1, ρ_2, una volta integrata l'equazione differenziale (6), saranno razionalmente note anche le soluzioni della (1), bastando formare perciò i determinanti $(y_h^{(1)}\, y_k^{(2)})$ relativi a due sistemi, opportunamente scelti, di soluzioni distinte della (6), e dividerli per la funzione razionale $\rho_2 - \rho_1$: si avranno così sei soluzioni distinte della (1), soddisfacenti all'equazione (2).

Ma questo procedimento non è applicabile al caso in cui sia $\rho_1 = \rho_2$, conoscendosi allora, per ogni generatrice (z) della rigata R, soltanto un fascio a cui essa appartiene.

Consideriamo pertanto in tal caso le due diverse determinazioni $y_1 \dots y_4$ e $u_1 \dots u_4$ di uno stesso sistema di soluzioni indipendenti dell' equazione (6), corrispondenti al doppio segno dell'unico radicale quadratico che compare ora nelle q_i; queste funzioni potranno assumersi come coordinate rispett. del punto e del piano comune alla generatrice variabile (z) e all' unica tangente quadripunta che ad essa si appoggia. I determinanti $\xi_i = (yy')$ e $\eta_i = (uu')$ ci daranno allora le coordinate rispett. della tangente alla curva γ già considerata nel punto (y), e di quella generatrice della sviluppabile Γ che passa anche per (y). Queste due rette saranno entrambe tangenti a R nel punto (y), e saranno anzi tangenti fra loro *coniugate*, ossia armoniche rispetto alla generatrice (z) e all'altra tangente principale (quadripunta) (ς). Si avranno perciò, fra le coordinate di queste quattro rette, relazioni del tipo:

$$z_i = \varphi(\xi_i + \chi\eta_i) \qquad \varsigma_i = \psi(\xi_i - \chi\eta_i)$$

dove φ, ψ, χ sono certe funzioni della variabile indipendente x.

La determinazione di χ si effettua facilmente in base alla duplice condizione che le z_i e le ς_i devono soddisfare alle equazioni (3), e le z_i devono anche annullare il discriminante della (4). Siccome le (3) sono omogenee rispetto alle ς_i, e continuano pure a sussistere se le z_i si moltiplicano tutte per uno stesso fattore, eventualmente anche funzione della x, così si può prescindere in questo calcolo dai fattori φ e ψ.

Ora, delle equazioni (3), le prime tre e l'ultima sono verificate identicamente qualunque sia χ. Per l'ultima, ciò è evidente; per le prime tre, ciò segue anche dall'osservazione geometrica, che la rigata descritta dalla retta $(\xi \pm \chi\,\eta)$ al variare della χ ha sempre le rette (ξ) e (η) per tangenti coniugate, e quindi le infinite posizioni assunte in corrispondenza dalla retta $(\xi \mp \chi\,\eta)$ per tangenti principali (benchè in generale non quadripunte).

Rimane la quarta di quelle equazioni:

$$\varsigma_1 z_2''' + \ldots = 0$$

la quale dà:

$$(\xi_1 - \chi\eta_1)(\xi_2''' + \chi\eta_2''' + 3\chi'\eta_2'' + 3\chi''\eta_2' + \chi''') + \ldots = 0.$$

D'altra parte si ha identicamente $f\binom{\xi^{(p)}}{\xi^{(q)}} = 0$, finchè gli indici di derivazione p, q hanno somma $p + q \leq 3$. Analoghe relazioni si hanno pure fra le η_i; e si ha altresì:

$$f\binom{\xi}{\eta} = 0 \qquad\qquad f\binom{\xi}{\eta'} = 0$$

perchè le rette (ξ) e (η) si incontrano, e inoltre il fascio di rette $(\eta + k\eta')$, essendo contenuto nel piano (u) tangente in (y) alla rigata R (senza avere tuttavia (y) per centro), ha anch'esso tutte le sue rette incidenti alla (ξ).

Rimane perciò soltanto:

$$\chi\left[f\binom{\xi}{\eta'''} - f\binom{\xi'''}{\eta}\right] - 3\chi' f\binom{\xi}{\eta''} = 0$$

e di qui si ricava subito il rapporto $\frac{\chi'}{\chi}$, che si trova eguale ad una funzione razionalmente nota, perchè rapporto di forme bilineari risultanti dalla polarizzazione della f, e contenenti variabili le quali sono cogredienti alle z_i (a meno di fattori costanti) rispetto alle operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1).

D'altra parte al discriminante dell'equazione (4) — ossia del sistema (3) — si può dare la forma di determinante di 4° ordine:

$$\left| f\begin{pmatrix} z^{(p)} \\ z^{(q)} \end{pmatrix} \right| \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3).$$

Sostituendo pertanto alle z_i i binomi $\xi_i + \chi\eta_i$, eliminando le derivate di χ per mezzo dell'espressione razionale trovata di $\frac{\chi'}{\chi}$ e delle altre che se ne deducono per derivazione, ed eguagliando a zero, si ha per χ un'equazione algebrica di 4° grado, la quale si riduce al 2° sopprimendo il fattore χ^2 che risulta comune a tutti i termini. Quest'equazione determina perciò la funzione χ, colla sola aggiunta al campo di razionalità della radice quadrata di una funzione razionale.

Infine, i sei binomi $\xi_i + \chi\eta_i$ così determinati non potranno differire che per uno stesso fattore φ da altrettante soluzioni z_i dell'equazione differenziale (1). Formando pertanto l'equazione differenziale lineare di 6° ordine alla quale soddisfanno quelle sei funzioni $\xi_i + \chi\eta_i$:

$$\bar{z}^{\text{VI}} + \bar{p}_1 \bar{z}^{\text{V}} + \dots = 0;$$

questa dovrà trasformarsi nella (1) colla sostituzione $\bar{z} = \frac{z}{\varphi}$. E perchè ciò avvenga, deve essere:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\bar{p}_1 - p_1}{6}.$$

Riprendiamo ora una qualunque delle equazioni, da noi date al n° 3, che esprimevano le y_h in funzione $\left(\text{omogenea, di grado } \frac{1}{2}\right)$ delle z_i e loro derivate. Introducendovi in luogo delle z_i i prodotti $\varphi(\xi_i + \chi\eta_i)$, ed eliminando tutte le derivate di φ per mezzo di quest'ultima relazione e delle altre che se ne possono dedurre, riusciremo a determinare φ stessa razionalmente.

Concludiamo pertanto:

L'integrazione dell' equazione differenziale (1) *avente un sistema di soluzioni indipendenti legate dalla relazione* (2) — e non da altre relazioni quadratiche — *si riconduce con due successive estrazioni di radici quadrate alla sola integrazione di un'equazione differenziale lineare del* 4^o *ordine, che può essere affatto generale.*

6. — Supponiamo ora invece che la rigata R sia una sviluppabile, e che perciò, oltre alla (2), sia soddisfatta identicamente anche la relazione:

$$f(z') \equiv z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' = 0.$$

I punti di R essendo ora tutti parabolici, le tangenti principali del 2^o sistema coincideranno colle generatrici (z). Però in questo caso le derivate $z_i'(x)$ potranno a loro volta assumersi come coordinate di una seconda retta variabile, la quale si appoggerà alla generatrice (z) e apparterrà al fascio determinato da questa e dalla generatrice consecutiva. Gli infiniti punti (zz'), centri di questi fasci, avranno per luogo lo spigolo di regresso della sviluppabile R, della qual linea le stesse generatrici (z) e i piani (zz') (tangenti ad R) saranno rispett. le tangenti e i piani osculatori.

Indicando pertanto con y_h e u_h le coordinate rispett. del punto e del piano (zz'), potremo porre, analogamente a quanto si è fatto al n° 3:

$$y_1 = \frac{z_1' z_2 + z_3' z_4 + z_5' z_6}{[z_2 z_4' z_6'']^{\frac{1}{2}}} \qquad y_2 = \frac{(z_4 z_6')}{[z_2 z_4' z_6'']^{\frac{1}{2}}} \qquad y_3 = \frac{(z_6 z_2')}{[z_2 z_4' z_6'']^{\frac{1}{2}}} \qquad y_4 = \frac{(z_2 z_4')}{[z_2 z_4' z_6'']^{\frac{1}{2}}}$$

$$u_1 = \frac{z_1 z_2' + z_3 z_4' + z_5 z_6'}{[z_1 z_3' z_5'']^{\frac{1}{2}}} \qquad u_2 = \frac{(z_3 z_5')}{[z_1 z_3' z_5'']^{\frac{1}{2}}} \qquad u_3 = \frac{(z_5 z_1')}{[z_1 z_3' z_5']^{\frac{1}{2}}} \qquad u_4 = \frac{(z_1 z_3')}{[z_1 z_3' z_5'']^{\frac{1}{2}}}$$

e allora sarà precisamente:

$$z_1 = (y_1 y_2') = (u_3 u'_4) \qquad \cdots\cdots$$

Ora, il sistema formato dagli infiniti punti (y) e dagli infiniti piani (u) è legato proiettivamente alla sviluppabile R (come, nel caso precedente, la linea γ e la sviluppabile Γ). Con un ragionamento analogo potremo perciò concludere che le y_h e le u_h saranno ancora soluzioni di un'equazione differenziale lineare del 4° ordine, i cui coefficienti saranno formati razionalmente mediante le p_i, le loro derivate, e la radice quadrata di una funzione razionale di queste stesse quantità. Supposta integrata quest'ultima equazione, se ne dedurranno immediatamente le soluzioni z_i della (1), mediante le relazioni:

$$z_1 = (y_1 y_2') = (u_3 u_4') \qquad \ldots\ldots$$

Queste relazioni mostrano altresì che l'equazione differenziale lineare di 4° ordine da costruirsi deve avere l'equazione proposta (1) per *seconda associata* [1]; e anzi le due diverse forme assunte da questa stessa equazione differenziale di 4° ordine, corrispondentemente al doppio segno dell'unico radicale quadratico che compare nei suoi coefficienti, saranno tali che una qualunque di esse coinciderà, a meno di un fattore comune a tutte le soluzioni, coll'aggiunta (e colla prima associata) dell'altra. Infatti le u_h, potendosi considerare come coordinate del piano osculatore (variabile) alla curva descritta dal punto (y), non potranno differire dai determinanti $[y_i\, y_k'\, y_l'']$, ovvero anche dai rapporti $\frac{[y_i\, y_k'\, y_l'']}{D\,(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)}$ (dove $h\ i\ k\ l$ è una permutazione di classe costante dei primi quattro numeri naturali), che per uno stesso fattore (funzione, in generale, della x).

Si presenta perciò naturale l'idea di calcolare direttamente, in questo caso, l'equazione differenziale di 4° ordine (6), valendosi della sua proprietà di dover avere la (1) come seconda associata. E per questo conviene applicare anzitutto alla (1) un'opportuna trasformazione $z = \rho \bar{z}$, in seguito alla quale le due forme assunte dalla corrispondente equazione (6) dovranno risultare ciascuna in pari tempo aggiunta e prima associata dell'altra, avendo altresì la trasformata della (1) per comune seconda associata. Il relativo calcolo resterà così anche facilitato, come ora appunto vedremo.

---

(1) Cfr. Schlesinger, Op. e vol. cit., p. 127. Il concetto delle equazioni differenziali lineari associate di una data è dovuto a Forsyth (“ Phil. Trans. „, vol. 179, 1888, p. 420 e seg.). V. anche Craig, *A Treatise on linear differential equations*, I (1889), p. 471 e seg.

7. — È noto che le soluzioni dell' equazione prima associata di una data equazione differenziale lineare di ordine qualsiasi:

$$v^{(n)} + q_1 v^{(n-1)} + \ldots = 0$$

si ottengono da quelle della corrispondente equazione aggiunta, moltiplicandole per il fattore $D(v_1 v_2 \ldots v_n) = e^{-\int q_1 dz}$ (1). Perchè dunque queste due equazioni (rispett. prima associata e aggiunta della proposta) coincidano, è necessario e sufficiente che quel fattore si riduca a una costante; e per questo deve essere $q_1 = 0$. Noi indicheremo perciò ancora con $y_h(x)$ le coordinate di un punto variabile dello spigolo di regresso della sviluppabile R — coordinate che saranno appunto certe funzioni della variabile x, a noi per ora sconosciute, ma determinate a meno di un fattore comune —; e converremo precisamente di disporre di questo fattore in modo che il determinante $D(y_1 y_2 y_3 y_4)$ risulti eguale a una data costante, sia p. e. $= 1$.

Con questa scelta delle y_h si avrà pur sempre:

$$z_i = \rho (y_h y_k')$$

dove ρ è una certa funzione dèlla variabile x, e gli indici i, h, k, sono scelti in modo opportuno, p. e. come al n° 3.

Di qui si trae:

$$z_i' = \rho (y_h y_k'') + \rho' (y_h y_k')$$

$$z_i'' = \rho [(y_h y_k''') + (y'_h y_k'')] + 2\rho' (y_h y_k'') + \rho'' (y_h y_k');$$

e quindi:

$$z_1'' z_2'' + z_3'' z_4'' + z_5'' z_6'' = \rho^2 . D(y_1 y_2 y_3 y_4) = \rho^2 .$$

Ora, il primo membro di quest'ultima relazione è una funzione differenziale razionale delle z_i, che si comporta moltiplicativamente rispetto alle operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1); la sua derivata logaritmica sarà perciò razio-

(1) Schlesinger, Op. e vol. cit., p. 135.

nalmente nota, ossia eguale a una funzione razionale σ delle p_i e loro derivate (la quale potrà effettivamente calcolarsi) [1]. Se noi dunque poniamo:

$$z = \rho\bar{z} = e^{\frac{1}{2}\int \sigma dx} . \bar{z}$$

trasformeremo la (1) in una nuova equazione differenziale lineare di 6° ordine:

$$(1') \qquad \bar{z}^{\mathrm{VI}} + \bar{p}_1 \bar{z}^{\mathrm{V}} + \bar{p}_2 \bar{z}^{\mathrm{IV}} + \dots + \bar{p}_6 \bar{z} = 0$$

i cui coefficienti apparterranno ancora allo stesso campo di razionalità primitivo $\left(\text{perchè è razionale la derivata logaritmica } \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{2}\sigma\right)$, e le cui soluzioni $\bar{z}_i = \frac{z_i}{\rho}$ saranno legate alle y_h dalle relazioni:

$$\bar{z}_i = (y_h y_k');$$

sicchè la (1′) sarà precisamente la seconda associata dell'equazione (6) da costruirsi (alla quale devono soddisfare le funzioni $y_h(x)$).

D'altra parte, essendosi supposto $\mathrm{D}(y_1 y_2 y_3 y_4) = 1$, quest'equazione (6) dovrà mancare del termine contenente la derivata y'''; e (scritta con coefficienti binomiali) avrà perciò la forma:

$$(6') \qquad y^{\mathrm{IV}} + 6q_2 y'' + 4q_3 y' + q_4 y = 0,$$

---

[1] Per calcolarla, basta derivare successivamente più volte le relazioni $f(z) = 0$ e $f(z') = 0$, eliminando sempre le derivate di 6° ordine, non appena compaiono, mediante la (1). Avremo così delle equazioni lineari omogenee nelle forme bilineari $f\binom{z^{(m)}}{z^{(n)}}$ per $m, n \leq 5$, i coefficienti di queste forme essendo funzioni razionali delle p_i e loro derivate. Dopo esserci procurato un numero sufficiente di equazioni distinte (e se ne troveranno certo abbastanza) potremo dedurne razionalmente l'espressione del rapporto di due qualunque di queste forme, e in particolare il rapporto $2f\binom{z''}{z'''} : f(z'') = \sigma$.

La sua aggiunta (e prima associata) sarà allora:

$$(6'') \quad u^{\mathrm{IV}} + 6q_2u'' + 4(3q_2' - q_3)u' + (q_4 + 6q_2'' - 4q_3')\,u = 0.$$

Halphen, nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (Acta Math., III, 1883, p. 328 e seg.) ha costruita appunto l'equazione differenziale lineare seconda associata della (6'), la quale è del 6° ordine quando l'invariante $2q_3 - 3q_2'$ è diverso da zero, ossia quando le tangenti alla curva integrale della (6') stessa non appartengono (e così è appunto nel nostro caso) a un complesso lineare. Quest'equazione differenziale fu da lui messa sotto la forma:

$$Z' - \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}\,Z - 2(2q_3 - 3q_2')(z''' + 6q_2z' + 4q_3z) = 0$$

dove:

$$Z = (z''' + 6q_2z' + 4q_3z)'' + 6q_2(z''' + 6q_2z' + 4q_3z) - 4q_4z' - 2q_4'z.$$

Scrivendola per disteso si ha:

$$\begin{aligned}
&z^{\mathrm{VI}} - \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}\,z^{\mathrm{V}} + 12q_2z^{\mathrm{IV}} + \left(30q_2' - 12q_2\frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}\right)z''' \\
&+ \left[18q_2'' + 12q_3' + 36q_2^2 - 4q_4 - \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}(12q_2' + 4q_3)\right]z'' \\
&+ \Big[6q_2''' + 12q_3'' + 72q_2q_2' + 24q_2q_3 - 6q_4' - \\
&- \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}(6q_2'' + 8q_3' + 36q_2^2 - 4q_4) - 12q_2(2q_3 - 3q_2')\Big]z' \\
&+ \Big[4q_3''' + 24(q_2q_3' + q_2'q_3) - 2q_4'' - \\
&- \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'}(4q_3'' + 24q_2q_3 - 2q_4') - 8q_3(2q_3 - 3q_2')\Big]z = 0.
\end{aligned}$$

Questa stessa equazione è anche (come si può facilmente verificare) seconda associata della (6''). Del resto, potendosi assumere come soluzioni indipendenti di quest'ultima equazione i subdeterminanti Y_{h3} delle y_h''' in $D(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$, le cui derivate Y'_{h3}

non sono altro che i subdeterminanti Y_{h2} delle y_h'' cambiati di segno, ne segue che i determinanti $Y_{h3}\,Y'_{k3} - Y'_{h3}\,Y_{k3} = Y_{h2}\,Y_{k3} - Y_{h3}\,Y_{k2}$ saranno minori contenuti nell'aggiunto di D; e perciò, essendo $D = 1$, saranno eguali rispett. ai determinanti $(y_l\, y_m')$, dove $h\,k\,l\,m$ si suppone una permutazione pari dei quattro indici 1, 2, 3, 4.

Eguagliando pertanto i coefficienti di $z^{\mathrm{V}}, z^{\mathrm{IV}}, \ldots$ in quest'ultima equazione alle funzioni $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots$ che compaiono nella (1′), avremo un sistema di equazioni (sovrabbondanti) nelle q_i e loro derivate, dalle quali si potranno ricavare i coefficienti dell'equazione (6′) da costruirsi. E si dovranno anzi trovare per le q_i due diversi sistemi di valori, corrispondenti alle equazioni (6′) e (6″) mutualmente aggiunte.

Anzitutto, eguagliando i coefficienti di z^{IV}, si ha:

$$q_2 = \frac{1}{12}\,\overline{p}_2.$$

E eguagliando i coefficienti di z^{V}:

$$\frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'} = -\,\overline{p}_1 \quad \text{da cui:} \quad 2q_3 - 3q_2' = e^{-\int \overline{p}_1 dx}.$$

Ora, il passaggio dall'equazione (1) alla (1′) — le cui soluzioni differiscono da quelle della (1) per uno stesso fattore moltiplicativo ρ — ha per effetto di restringere il gruppo di razionalità a quelle sole sostituzioni che lasciano inalterata la funzione $f(\overline{z}'')$ — che risulta $= 1$ — e quindi anche tutte le altre $f\left(\frac{\overline{z}^{(m)}}{\overline{z}^{(n)}}\right)$. Queste sostituzioni hanno tutte il determinante eguale a ± 1; e si ha anzi l'uno o l'altro di questi due casi, secondo che la sostituzione viene rappresentata geometricamente da una collineazione o da una reciprocità dello spazio S_3 [1]. Da ciò si trae

---

[1] Un esempio di questo secondo caso è dato dalla sostituzione che si limita a scambiare fra loro le due variabili $\overline{z}_1$ e $\overline{z}_2$ (conservando inalterate le rimanenti): essa è rappresentata geometricamente dalla polarità rispetto al complesso lineare $\overline{z}_1 - \overline{z}_2 = 0$. Per rendere il determinante della sostituzione eguale a $+1$, bisognerebbe introdurre come fattore in tutte le $\overline{z}$ una radice sesta dell'unità negativa, p. e. $i = \sqrt{-1}$: ma allora la forma f si riprodurrebbe cambiata di segno (o moltiplicata per altro fattore numerico).

che il determinante $D(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_6)$, che è appunto $= e^{-\int \bar{p}_1 dx}$, dovrà risultare invariante a meno del segno per tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1′); il suo quadrato sarà perciò una funzione razionale φ delle $\bar{p}_i$ e loro derivate (quindi anche delle p_i e loro derivate) (1), e la $\bar{p}_1$ sarà non soltanto una funzione razionale del campo primitivo, ma anche *la derivata logaritmica della radice quadrata di una funzione razionale* $\left(\frac{1}{\varphi}\right)$ di questo campo.

Avremo quindi:

$$\{ D(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_6) \}^2 = \varphi = e^{-2\int \bar{p}_1 dx}$$

e perciò:

$$2q_3 - 3q_2' = e^{-\int \bar{p}_1 dx} = \sqrt{\varphi}$$

dove la funzione razionale φ risulterà già determinata dalla $\bar{p}_1$ (che è nota) a meno di una costante moltiplicativa (e sarà poi completamente determinata in seguito). E di qui si trae ancora:

$$q_3 = \frac{1}{2}\left(3q_2' + \sqrt{\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_2'}{4} + \sqrt{\varphi}\right)$$

sicchè al doppio segno del radicale corrispondono appunto due diverse determinazioni di q_3.

Eguagliando i coefficienti di z''' si ha soltanto la condizione:

$$\bar{p}_3 = \frac{5}{2}\bar{p}_2' + \bar{p}_1 \bar{p}_2$$

alla quale dovranno soddisfare identicamente le $\bar{p}_i$, se la (1′) è seconda associata di un'equazione differenziale lineare di 4° ordine priva del 2° termine. Dal confronto dei coefficienti di z'' si ricava poi:

$$\bar{p}_4 = 18q_2'' + 12q_3' + 36q_2^2 - 4q_4 + \bar{p}_1(12q_2' + 4q_3)$$

(1) Ciò segue anche dal fatto che questo quadrato può ottenersi, a meno del segno, come prodotto dei due determinanti $D(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \bar{z}_4 \bar{z}_5 \bar{z}_6)$ e $D(\bar{z}_2 \bar{z}_1 \bar{z}_4 \bar{z}_3 \bar{z}_6 \bar{z}_5)$. Eseguendo questo prodotto per orizzontali, tutti gli elementi risultano funzioni del tipo $2f\left(\frac{\bar{z}^{(m)}}{\bar{z}^{(n)}}\right)$, e sono perciò razionali.

e quindi:

$$q_4 = \frac{3}{4}\,\overline{p}_2'' + \frac{1}{16}\,\overline{p}_2^2 + \overline{p}_1\left(\frac{3}{8}\,\overline{p}_2' - \sqrt{\varphi}\right) - \frac{1}{4}\,\overline{p}_4\,.$$

Sostituendo infine queste espressioni nei coefficienti di z' e di z ed eguagliando questi ultimi rispett. a $\overline{p}_5$ e $\overline{p}_6$, si hanno due nuove equazioni, dalla prima delle quali scompare la φ, restando soltanto la condizione ulteriore:

$$\overline{p}_5 = \overline{p}_1\overline{p}_4 - \frac{3}{2}\,\overline{p}_4' - \frac{5}{2}\,\overline{p}_2''' - \frac{9}{4}\,(\overline{p}_1\overline{p}_2')' - \frac{3}{2}\,(\overline{p}_2'' + \overline{p}_1\,\overline{p}_2')\,\overline{p}_1$$

mentre l'altra equazione può mettersi sotto la forma:

$$\varphi = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}\,\overline{p}'^2_2 - \overline{p}_2^{\text{IV}} - \frac{3}{4}\,(\overline{p}_1\overline{p}_2')'' + \frac{1}{2}\,\overline{p}_4'' \right.$$
$$\left. - \overline{p}_1\left[\overline{p}_2''' + \frac{3}{4}\,(\overline{p}_1\overline{p}_2')' - \frac{1}{2}\,\overline{p}_4'\right] - \overline{p}_6\right\}$$

e determina perciò completamente la funzione razionale φ, nella quale era ancora indeterminato un fattore costante.

Le due determinazioni di q_3 e q_4 corrispondenti al doppio segno del radicale $\sqrt{\varphi}$ conducono precisamente a due equazioni mutuamente aggiunte, come le $(6')$ e $(6'')$. Infatti, supponendo dato a quel radicale, nelle espressioni trovate per q_3 e q_4, un segno determinato, si ha:

$$3q_2' - q_3 = \frac{1}{2}\,(3q_2' - \sqrt{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}_2'}{4} - \sqrt{\varphi}\right)$$

$$q_4 + 6q_2'' - 4q_3' = q_4 + 2\overline{p}_1\,(2q_3 - 3q_2') = q_4 + 2\overline{p}_1\sqrt{\varphi} =$$
$$= \frac{3}{4}\,\overline{p}_2'' + \frac{1}{16}\,\overline{p}_2^2 + \overline{p}_1\left(\frac{3}{8}\,\overline{p}_2' + \sqrt{\varphi}\right) - \frac{1}{4}\,\overline{p}_4.$$

Calcolata dunque l'espressione della funzione $\frac{2\rho'}{\rho} = \frac{d}{dx}\log f(z'')$, ed eseguita la trasformazione $z = \rho\overline{z}$, le equazioni $(6')$ e $(6'')$ si potranno formare immediatamente.

8. — Si abbia ora un' equazione differenziale lineare del 5° ordine:

$$z^{\mathrm{V}} + p_1 z^{\mathrm{IV}} + \dots + p_5 z = 0 \tag{1}$$

dove le p_i sono sempre date funzioni della variabile indipendente x, le quali determineranno un certo campo di razionalità. Si supponga inoltre che cinque soluzioni indipendenti di questa equazione siano legate da una relazione quadratica omogenea a coefficienti costanti e di discriminante non nullo, e che fra le stesse soluzioni non passino altre relazioni di questo tipo. Quella relazione sarà allora invariante rispetto a tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta; e noi potremo scegliere in infiniti modi cinque soluzioni indipendenti $z_1, z_2, \dots z_5$ e una sesta soluzione z_6 legata alle precedenti dall'equazione lineare omogenea:

$$\sum_i a_i z_i = 0 \tag{2}$$

nella quale le a_i sono certe costanti, e in particolare $a_6 \neq 0$, in guisa tale che la detta relazione quadratica assuma la forma:

$$f \equiv z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0. \tag{3}$$

Interpretando pertanto le funzioni $z_i(x)$, come già si è fatto al n° 3, quali coordinate Plückeriane omogenee di una retta in S_3, verremo a costruire una rigata integrale R dell'equazione differenziale (1), la quale starà nel *complesso lineare non speciale* rappresentato dall'equazione (2) [1], e non in altri complessi lineari. Il gruppo di razionalità dell'equazione (1) sarà nel caso più generale un gruppo ∞^{11}, le cui operazioni potranno rappresentarsi analiticamente mediante le sostituzioni lineari delle sei variabili z_i che mutano in sè stessa ciascuna delle equazioni

---

[1] Questo complesso lineare sarebbe speciale quando fosse nullo il trinomio $a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$, il quale, a meno di un fattore numerico, non è altro che il discriminante (da noi supposto $\neq 0$) dell'equazione quadratica che si ottiene eliminando la z_6 (o anche un' altra delle z_i) fra le equazioni (1) e (2).

(2) e (3). Geometricamente, queste sostituzioni si tradurranno nelle ∞^{10} collineazioni di S_3 che trasformano in sè stesso il complesso lineare (2).

La rigata R sarà anche in questo caso una rigata gobba o una sviluppabile, secondo che la funzione $z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6'$ (certo razionalmente nota) non è, oppure è identicamente nulla. E si potranno anche qui ripetere, con lievi modificazioni, le varie considerazioni dei n^i 3-7, riducendosi essenzialmente all'integrazione di un'equazione differenziale lineare del 4° ordine, la quale non apparterrà però al tipo più generale, ma avrà invece anch'essa un gruppo di razionalità al più ∞^{11}, le cui operazioni si rappresenteranno geometricamente mediante omografie di S_3 trasformanti in sè un complesso lineare di rette [1], — Noi ci limiteremo qui a mostrare come il caso in cui R sia una rigata gobba contenuta in un complesso lineare possa facilmente ridursi a quello di una sviluppabile contenuta nello stesso complesso, e come a quest'ultimo caso possa applicarsi la stessa trattazione del n. 7, con talune semplificazioni.

9. — È noto [2] che sopra ogni rigata gobba contenuta in un complesso lineare vi è un'asintotica (la quale può anzi spezzarsi analiticamente in due linee siffatte), le cui tangenti appartengono a quel medesimo complesso. La sviluppabile formata da queste tangenti è l'intersezione del complesso lineare considerato colla congruenza delle tangenti principali (del 2° sistema) della rigata proposta; e il Lie ha appunto osservato per primo che la rigata intersezione di questi due enti è una sviluppabile, e il suo spigolo di regresso è perciò un'asintotica della rigata proposta.

Il caso in cui le sei soluzioni z_i dell'equazione differenziale (1) *non* soddisfanno alla relazione $z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' = 0$

---

(1) In una Memoria recente del sig. Marotte, *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes* (" Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse ", t. XII, 1898) è stata data una classificazione completa delle equazioni differenziali lineari del 4° ordine (o di ordine inferiore), in base alla considerazione del relativo gruppo di razionalità. Le equazioni che qui si presentano appartengono alla categoria ivi designata come VI (cap. VIII).

(2) Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe.....*, " Math. Ann. ", 5, p. 179.

potrà pertanto ricondursi a quello in cui questa relazione è invece verificata, mediante una trasformazione alla quale corrisponda geometricamente il passaggio dalla rigata gobba R contenuta nel complesso lineare (2) alla sviluppabile intersezione di questo stesso complesso colla congruenza delle tangenti principali di R [1].

Quelle tangenti principali (ς) di R nei punti di una generatrice (z), che appartengono in pari tempo al complesso lineare (2), sono determinate dalle cinque equazioni:

$$f\binom{z}{\varsigma}=0 \qquad f\binom{z'}{\varsigma}=0 \qquad f\binom{z''}{\varsigma}=0$$

$$\sum_i a_i \varsigma_i = 0 \qquad\qquad f(\varsigma)=0$$

le quali dànno per i mutui rapporti delle coordinate ς_i (come funzioni delle z_i e loro derivate) due determinazioni in generale distinte, e coincidenti solo quando la corrispondente generatrice (z) è singolare — si appoggia cioè alla successiva — (il che non può avvenire per *ogni* generatrice, ove R non sia una sviluppabile). E le ς_i, così determinate a meno di un fattore (funzione di x), dovranno soddisfare identicamente all'equazione:

$$(5) \qquad \varsigma_1'\varsigma_2' + \varsigma_3'\varsigma_4' + \varsigma_5'\varsigma_6' = 0 \text{ [2]}$$

come risulta da semplici considerazioni geometriche (dovendo le rette (ς) formare una sviluppabile), e come si può anche dimostrare analiticamente [3].

Volendo disporre in modo determinato di questo fattore tuttora arbitrario nelle ς_i, possiamo imporre fra le ς_i stesse una

---

[1] Dal punto di vista analitico, questa trasformazione ridurrà l'equazione differenziale proposta ad un'altra *di rango massimo rispetto alla forma f*.

[2] Essendo verificate anche le relazioni $f(\varsigma)=0$ e $f\binom{\varsigma}{\varsigma'}=0$, è chiaro che l'equazione $f(\varsigma')=0$ continuerà a sussistere quando le ς_i si moltiplichino tutte per uno stesso fattore, anche se questo fattore fosse una funzione della x.

[3] Cfr. ad es. Voss, *Zur Theorie der windschiefen Flächen* („Math. Ann." 8, 1875, p. 78-79).

relazione non omogenea (compatibile colle precedenti); ad es. possiamo assegnare ad arbitrio il valore della forma bilineare $f\binom{z'''}{\varsigma}$. In particolare, osservando che per ogni operazione del gruppo di razionalità dell' equazione (1) le variabili z_i e ς_i devono subire rispett. due sostituzioni lineari a coefficienti proporzionali, possiamo rendere queste sostituzioni identiche, e le due serie di variabili perciò cogredienti, imponendo ad es. la relazione:

$$f\binom{z'''}{\varsigma} = f(z').$$

E allora potremo ricavare le ς_i espresse *razionalmente* mediante le z_i e loro derivate e la radice quadrata di una funzione razionale dei coefficienti p_i e loro derivate (la quale non sarà altro che il discriminante del sistema (4)). L'aggiunta di questo radicale al campo di razionalità corrisponde alla separazione delle due sviluppabili di rette (ς).

Le sei variabili ς_i saranno pertanto legate dalle relazioni

$$\sum_i a_i \varsigma_i = 0 \qquad f(\varsigma) = 0 \qquad f(\varsigma') = 0;$$

e le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1) determineranno su di esse sostituzioni lineari a coefficienti costanti identiche a quelle delle z_i, e trasformanti perciò in sè ciascuna di queste equazioni. Eliminando ad es. la ς_6 per mezzo della prima equazione, possiamo ridurci a un gruppo di sostituzioni lineari delle sole $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_5$, rispetto alle quali saranno invarianti i mutui rapporti dei determinanti di 5° ordine estratti dalla matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \varsigma_1^{\mathrm{V}} & \varsigma_1^{\mathrm{IV}} & \varsigma_1''' & \varsigma_1'' & \varsigma_1' & \varsigma_1 \\ \varsigma_2^{\mathrm{V}} & \varsigma_2^{\mathrm{IV}} & \varsigma_2''' & \varsigma_2'' & \varsigma_2' & \varsigma_2 \\ \varsigma_3^{\mathrm{V}} & \varsigma_3^{\mathrm{IV}} & \varsigma_3''' & \varsigma_3'' & \varsigma_2' & \varsigma_3 \\ \varsigma_4^{\mathrm{V}} & \varsigma_4^{\mathrm{IV}} & \varsigma_4''' & \varsigma_4'' & \varsigma_4' & \varsigma_4 \\ \varsigma_5^{\mathrm{V}} & \varsigma_5^{\mathrm{IV}} & \varsigma_5''' & \varsigma_5'' & \varsigma_5' & \varsigma_5 \end{matrix} \right\|$$

Questi rapporti saranno pertanto funzioni differenziali razionali delle z_i, le quali si manterranno invariate come funzioni di x rispetto a tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1). Essi potranno perciò esprimersi razionalmente mediante le p_i e loro derivate e il radicale quadratico stato aggiunto al campo di razionalità primitivo. E di qui si trae che le ς_i (non esclusa la ς_6) saranno soluzioni di un'equazione differenziale lineare del 5° ordine, la quale potrà formarsi razionalmente, a meno di un'estrazione di radice quadrata, quando sia data la (1). La rigata integrale di questa nuova equazione differenziale sarà una sviluppabile, e risulta così effettuata la trasformazione che ci eravamo proposti di eseguire per l'equazione (1).

10. — Supponiamo ora che l'equazione differenziale (1) del n° 8 abbia per rigata integrale R una sviluppabile (abbia cioè il rango *due* rispetto alla relazione quadratica che si suppone esistere fra cinque sue soluzioni distinte). Anche in questo caso, come già al n° 6, l'equazione (1) potrà considerarsi come seconda associata di un'equazione differenziale lineare del 4° ordine, avente per curva integrale lo spigolo di regresso di R. Anzi, poichè le tangenti di questa curva (ossia le generatrici di R) appartengono ora a un complesso lineare, ogni punto della curva stessa avrà il relativo piano osculatore per piano polare rispetto a questo complesso (1); e quella curva sarà perciò proiettivamente identica alla varietà dei suoi piani osculatori. Analiticamente, questo si traduce nel fatto che l'equazione di 4° ordine da costruirsi *dovrà coincidere colla propria aggiunta* (a meno eventualmente di un fattore comune a tutte le soluzioni); proprietà che risulta anche per altra via, poichè, riducendosi la seconda associata dal 6° al 5° ordine, deve essere nullo l'invariante a_3 di Forsyth-Brioschi (2) — che per l'equa-

(1) Cfr. Lie, " Verhand. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania ", 1871; come pure il lav. cit. dei " Math. Ann. ", vol. 5, p. 154.

(2) Forsyth, " Phil. Trans. ", t. 179, 1888; Brioschi, " Acta Math. ", vol. 14, 1890-91, p. 237. Per questa proprietà si veda in part. la Mem. cit. di Halphen, nel vol. 3° degli " Acta Math. ". Per l'equazione (6') del n° 7 sarebbe $a_3 = q_3 - \frac{3}{2} q_2'$; e se questo invariante si annulla, la seconda associata della stessa (6') si riduce appunto al 5° ordine (e inversamente).

zione di 4° ordine è l'unico invariante di indice dispari — e l'equazione stessa deve perciò trasformarsi nella propria aggiunta con una sostituzione $y = \rho u$.

Noi possiamo anzi far sì che l'equazione differenziale lineare di 4° ordine che costruiremo coincida addirittura colla propria aggiunta (e prima associata).

Indichiamo perciò ancora con $y_h(x)$ le coordinate di un punto variabile dello spigolo di regresso della sviluppabile R, disponendo del fattore comune arbitrario in tali coordinate in modo che sia $D(y_1 y_2 y_3 y_4) = 1$. Le y_h saranno allora soluzioni distinte di un' equazione differenziale lineare del 4° ordine, priva di 2° termine:

$$y^{\text{IV}} + 6q_2 y'' + 4q_3 y' + q_4 y = 0 \tag{6}$$

i cui coefficienti dovranno altresì soddisfare alla condizione:

$$2q_3 - 3q_2' = 0 \tag{7}$$

la quale esprime che le tangenti della curva integrale appartengono a un complesso lineare (¹). Potremo perciò scrivere:

$$y^{\text{IV}} + 6q_2 y'' + 6q_2' y' + q_4 y = 0 \tag{6'}$$

dalla qual forma risulta evidente che l'equazione stessa coincide colla propria aggiunta.

L'equazione proposta (1) ammetterà pertanto sei soluzioni z_i — fra cui cinque indipendenti — legate alle y_h da relazioni del tipo:

$$z_i = \rho\,(y_h y_k')$$

e soddisfacenti perciò alle equazioni $f(z) = f(z') = 0$. Di più si avrà, come al n° 7:

$$\rho^2 = z_1'' z_2'' + z_3'' z_4'' + z_5'' z_6'' ;$$

(¹) Halphen, Mem. cit. degli " Acta Math. ", vol. III, p. 329, 332.

sicchè $\frac{\rho'}{\rho}$ sarà una funzione razionalmente nota. E colla trasformazione $z = \rho \bar{z}$ noi passeremo dall'equazione (1) ad un'altra:

$$(1') \qquad \bar{z}^{\text{v}} + \bar{p}_1 \bar{z}^{\text{IV}} + \dots + \bar{p}_5 \bar{z} = 0$$

i cui coefficienti apparterranno allo stesso campo di razionalità primitivo, e che dovrà essere la seconda associata dell'equazione (6) da costruirsi.

Questa seconda associata dell'equazione (6), nel caso che i coefficienti q_2, q_3 soddisfacciano alla (7), fu messa da Halphen (Mem. cit., p. 329) sotto la forma:

$$(z''' + 6q_2 z' + 4q_3 z)'' + 6q_2(z''' + 6q_2 z' + 4q_3 z) - 4q_4 z' - 2q_4' z = 0;$$

ossia, sviluppando:

$$z^{\text{v}} + 12q_2 z''' + (12q_2' + 4q_3)z'' + (6q_2'' + 8q_3' + 36q_2^2 - 4q_4)z' + (4q_3'' + 24q_2 q_3 - 2q_4')z = 0$$

e se teniamo conto anche della (7):

$$(1'') \qquad \begin{aligned} &z^{\text{v}} + 12q_2 z''' + 18q_2' z'' + (18q_2'' + 36q_2^2 - 4q_4) z' \\ &\quad + (6q_2''' + 36q_2 q_2' - 2q_4') = 0. \end{aligned}$$

Confrontando quest'equazione colla (1'), abbiamo subito:

$$q_2 = \frac{1}{12}\bar{p}_2 \qquad q_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\bar{p}_2'' + \frac{1}{4}\bar{p}_2^2 - \bar{p}_4\right)$$

e ricaviamo altresì le tre condizioni seguenti, alle quali dovranno soddisfare le $\bar{p}_i$:

$$\bar{p}_1 = 0 \quad \bar{p}_3 = \frac{3}{2}\bar{p}_2' \quad \bar{p}_5 = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_4' - \frac{1}{2}\bar{p}_2'''\right).$$

La prima di queste equazioni ci dice che la trasformazione $z = \rho\bar{z}$ da noi applicata all'equazione (1) deve in pari tempo farne sparire il secondo termine; sicchè dovrà essere;

$$\rho = e^{-\frac{1}{5}\int p_1 dx} \qquad \text{e quindi:} \qquad f(z'') = e^{-\frac{2}{5}\int p_1 dx}$$

rimanendo così risparmiato il calcolo di quest'ultima espressione. Le altre due equazioni dicono che devono annullarsi i due invarianti a_3 e a_5 di FORSYTH-BRIOSCHI; come si vede chiaramente scrivendo la (1') con coefficienti binomiali:

$$\bar{z}^{\mathrm{v}} + 10\bar{p}_2\bar{z}''' + 10\bar{p}_3\bar{z}'' + 5\bar{p}_4\bar{z}' + \bar{p}_5\bar{z} = 0;$$

e dando a quelle stesse equazioni la forma:

$$a_3 \equiv \bar{p}_3 - \frac{3}{2}\bar{p}_2{}' = 0$$

$$a_5 \equiv \bar{p}_5 - \frac{5}{2}\bar{p}_4{}' + \frac{15}{7}\bar{p}_3{}'' - \frac{5}{7}\bar{p}_2{}''' - \frac{80}{7}\bar{p}_2 a_3 = 0 \ (^1).$$

L'equazione (1'') *seconda associata della* (6') *coincide dunque anch'essa colla propria aggiunta*, avendo nulli (il coefficiente $\bar{p}_1$, e) i due invarianti a_3 e a_5 di indice dispari. Questa sua proprietà (che può anche verificarsi direttamente) va d'accordo altresì col fatto che il suo gruppo di razionalità si compone di sostituzioni trasformanti in sè una forma quadratica, rispetto alla quale l'equazione stessa ha il rango massimo *due* (come si è veduto appunto al n° 6 della mia Nota: *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte*, inserta nello scorso fascicolo di questi Atti).

Roma, 5 marzo 1899.

(1) Cfr. anche SCHLESINGER, Op. e vol. cit., p. 190, 196. Questi sono i due invarianti ivi designati coi simboli $\vartheta_3(x)$ e $\vartheta_5(x)$.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.