Gino Fano

Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine le cui curve integrali sono contenute in varietà algebriche

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Serie 2, Vol. **32** (1899), p. 843–866

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1899_2>

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 5° ORDINE LE CUI CURVE INTEGRALI SONO CONTENUTE IN VARIETÀ ALGEBRICHE.

Nota

di Gino Fano

1. Le ricerche importantissime dei signori Picard (*) e Vessiot (**) sulle equazioni differenziali lineari hanno mostrato che ad ogni equazione differenziale lineare omogenea di ordine n corrisponde un gruppo algebrico G di sostituzioni lineari di n variabili, comunemente detto *gruppo di razionalità* dell'equazione stessa, il quale gode di una duplice proprietà analoga a quella del *gruppo di Galois* di un'equazione algebrica. E precisamente (***):

1) Ogni funzione razionale delle soluzioni — ossia di n soluzioni distinte — dell'equazione differenziale proposta e delle loro derivate, la quale possa esprimersi razionalmente per mezzo della variabile indipendente x, dei coefficienti della stessa equazione proposta e delle loro derivate (appartenga cioè, come funzione di x, al campo di razionalità definito dai detti coefficienti), rimane invariata, come funzione di x, quando a quelle n soluzioni si applichi una qualunque sostituzione del gruppo G;

2) Ogni funzione razionale delle dette soluzioni e loro derivate, la quale rimanga invariata, come funzione di x, per tutte le

(*) *Compt. Rend.*, t. 96, 1883; t. 119, 1894; t. 121, 1895; *Ann. de Toulouse*, t. 1, 1887; *Traité d'analyse*, vol. III, cap. 17.° (1896).

(**) *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires*; Ann. de l'Ec. norm. sup., t. 9, 1892. Cfr. in part., p. 231.

(***) Cfr. anche Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, vol. II, p. 71 (1897).

sostituzioni del gruppo G, è anche razionalmente nota (ossia esprimibile razionalmente mediante la x, i coefficienti dell'equazione differenziale proposta, e le loro derivate).

Più generalmente, se al campo di razionalità definito dai coefficienti dell'equazione differenziale proposta immaginiamo *aggiunte* altre funzioni arbitrarie della variabile indipendente x, potremo parlare del gruppo di razionalità della stessa equazione differenziale rispetto al nuovo campo di razionalità così ottenuto (*). Ad es., aggiungendo (ove occorra) le radici di un'opportuna equazione algebrica con coefficienti appartenenti al campo di razionalità primitivo, si può sempre fare in modo che il gruppo di razionalità risulti *continuo* (**).

La natura del problema dell'integrazione di una data equazione differenziale lineare dipende appunto dalla *composizione* del suo gruppo di razionalità (rispetto a quel campo qualsiasi, le cui funzioni si suppongono razionalmente note), ossia dalla determinazione di una serie di successivi sottogruppi algebrici di quest'ultimo gruppo, ciascuno dei quali sia sottogruppo invariante massimo del precedente (non contenuto cioè in altri sottogruppi pure invarianti e più ampi). E l'analoga decomposizione del gruppo di Galois di un'equazione algebrica caratterizza del pari la natura del problema (algebrico) della risoluzione di quest'equazione.

2. Un'applicazione notevole dei risultati ottenuti dai signori Picard e Vessiot la si ha nelle ricerche dirette a indagare la natura del problema dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare di ordine n, quando si sappia che *n soluzioni distinte $y_1, y_2, \ldots y_n$ di quest'equazione sono legate da una o più relazioni algebriche omogenee a coefficienti costanti.* Il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta deve allora comporsi di sole sostituzioni lineari delle n variabili $y_1, y_2, \ldots y_n$, le quali mutino in sè stesso il sistema di queste equazioni algebriche (***). E poi-

(*) Schlesinger, op. e vol. cit., p. 74.

(**) Vessiot, l. c., p. 234; Schlesinger, l. c., p. 80.

(***) Schlesinger, op. e vol. cit., pp. 95, 207 e seg. Con ciò non intendiamo naturalmente che ciascuna delle date equazioni debba essere trasformata in sè stessa, o in una delle rimanenti; bensì però in una che sia conseguenza di queste.

chè tali equazioni, interpretando le y_i come coordinate projettive omogenee di punto in uno spazio S_{n-1}, rappresenteranno una varietà algebrica μ di questo spazio, nella quale sarà contenuta la *curva integrale* (*) dell'equazione differenziale proposta, così, in linguaggio geometrico, potremo anche dire che *la curva integrale dell'equazione differenziale proposta è contenuta in una varietà algebrica dello spazio S_{n-1}; e il gruppo di razionalità dell'equazione stessa si rappresenta in S_{n-1} mediante un gruppo di collineazioni trasformanti in sè questa varietà algebrica.*

È chiaro pertanto che la determinazione dei vari casi di questa natura che possono presentarsi per un'equazione differenziale lineare di dato ordine n dipenderà essenzialmente dalla determinazione delle varietà algebriche dello spazio S_{n-1} che ammettono gruppi di trasformazioni projettive in sè, nonchè delle composizioni di questi gruppi projettivi. — In particolare, ogni qualvolta il massimo gruppo continuo di trasformazioni projettive della varietà μ in sè stessa sia un gruppo *integrabile* (**), e la stessa proprietà sussista perciò altresì per il massimo sottogruppo continuo del gruppo di razionalità dell' equazione differenziale proposta, l' integrazione di questa equazione potrà effettuarsi, per un teorema già stabilito dal signor VESSIOT (***), *con sole quadrature e operazioni algebriche* (****).

L'interesse maggiore si concentra pertanto su quei soli casi in cui la varietà μ ammette un gruppo continuo *non integrabile* di trasformazioni projettive. E, fra questi, sono già noti, per n qualunque, tutti quelli — è noto cioè come si presenti il problema dell' integrazione in tutti quei casi — in cui la varietà μ è una

---

(*) Ossia la curva descritta dal punto (y), le cui coordinate (variabili) sono date dalle n soluzioni $y_i(x)$ dell' equazione differenziale proposta.

(**) Contenga cioè una serie di successivi sottogruppi, ciascuno dei quali sia sottogruppo invariante del precedente e dipenda da un solo parametro di meno di esso.

(***) L. c., p. 241; SCHLESINGER, l. c., p. 87.

(****) Basteranno anzi delle quadrature, se il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta è esso stesso continuo; e basterà la risoluzione di un' equazione algebrica a coefficienti razionalmente noti se questo gruppo si compone di un numero finito (>1) di operazioni.

curva (*) ovvero una superficie (algebrica) (**). E con ciò sono esauriti, per $n \leqq 4$, tutti i casi possibili (***). Per $n=5$ si presenta invece, come caso ulteriore, quello di un' equazione differenziale lineare la cui curva integrale — che apparterrà allo spazio S_4 — sia contenuta in una (sola) varietà algebrica a tre dimensioni di questo spazio; di modo che cinque soluzioni indipendenti $y_1, y_2, \dots y_5$ dell' equazione stessa dovranno esser legate da una sola relazione algebrica omogenea a coefficienti costanti.

In questa Nota io mi propongo appunto di studiare i vari casi che possono presentarsi nella detta ipotesi, o almeno tutti quelli in cui l' equazione differenziale proposta non può integrarsi con sole quadrature e operazioni algebriche. Basterà perciò ricordare quali sono le varietà algebriche dello spazio S_4 che ammettono un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive, e determinare le composizioni di questi diversi gruppi projettivi.

3. Le varietà a tre dimensioni dello spazio S_4 che ammettono un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive si trovano enumerate in un mio lavoro pubblicato, tre anni or sono, fra le Memorie della R. Accademia di Torino (****). Alcune fra queste varietà non ammettono che un gruppo semplice ∞^3 di trasformazioni projettive; e queste sono:

a) *La varietà cubica luogo delle corde di una quartica razionale normale*, la cui equazione può mettersi sotto la forma:

$$j \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix} \equiv y_1 y_3 y_5 + 2 y_2 y_3 y_4 - y_1 y_4^2 - y_2^2 y_5 - y_3^3 = 0; \quad (\mathrm{I})$$

(*) E coincide perciò colla curva integrale dell'equazione differenziale proposta, o almeno la contiene come parte (sicchè questa curva integrale sarà pure algebrica).

(**) Cfr. alcune mie Note pubblicate nei *Rend.* dell'Acc. dei Lincei, 1.° sem. dell'anno 1895; come pure i lavori ivi cit. di Fuchs, Goursat, Halphen, Schlesinger, Wallenberg, nei quali però la questione è studiata da un punto di vista quasi esclusivamente analitico.

(***) Un caso diverso, ma che costituisce pure una notevole applicazione della stessa teoria di Picard-Vessiot, è quello studiato dal sig. Enriques nella sua Nota: *Sopra le equazioni differenziali lineari del 4° ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare* (Rend. Ist. Lomb., s. II, vol. 29, 1896).

(****) *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, s. II, vol. 46, 1895-96).

b) Le varietà del 6° ordine aventi equazione del tipo:

$$j^2 - k\,(y_1\,y_5 - 4\,y_2\,y_4 + 3\,y_3{}^2)^3 = 0\,, \tag{II}$$

dove j è la forma cubica dianzi considerata, e k un parametro arbitrario (finito e non nullo). Queste varietà sono tutte invarianti, al pari della precedente, rispetto al gruppo projettivo ∞^3 della quartica:

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{Vmatrix} = 0.$$

In particolare, per $k = \dfrac{1}{27}$ si ha la varietà luogo dei piani osculatori a questa quartica:

c) Le varietà del 4° ordine di equazione:

$$6\,y_1\,y_2\,y_3\,y_4 - 4\,y_1\,y_3{}^3 - 4\,y_2{}^3\,y_4 - y_1{}^2\,y_4{}^2 + 3\,y_2{}^2\,y^2{}_3 - k\,y_5{}^4 = 0\,; \tag{III}$$

d) Le varietà del 6° ordine di equazione:

$$(y_2{}^2 - y_1\,y_3)^3 - k\,(y_1\,y^2{}_5 - 2\,y_2\,y_4\,y_5 + y_3\,y_4{}^2)^2 = 0, \tag{IV}$$

essendo sempre k un parametro finito e non nullo.

A queste vanno poi aggiunte:

e) La varietà cubica con piano doppio:

$$y_1\,y_5{}^2 - 2\,y_2\,y_4\,y_5 + y_3\,y_4{}^2 = 0\,,$$

la quale ammette ∞^6 trasformazioni projettive in sè;

f) Il cono di 4° ordine corrispondente all'ipotesi $k = 0$ del caso *c*), con ∞^8 trasformazioni projettive in sè. Questo cono è costituito dagli ∞^1 piani tangenti a un cono cubico normale (a due dimensioni), ed è perciò incontrato da uno spazio S_3 generico secondo la sviluppabile circoscritta a una cubica sghemba;

g) Le quadriche, le quali ammettono ∞^{10} trasformazioni projettive in sè se non degeneri, e ∞^{11} o ∞^{13} se coni, risp. di 1ª o di 2ª specie.

Noi dobbiamo ora considerare un'equazione differenziale lineare del 5° ordine:

$$y^{\mathrm{V}} + p_1\,y^{\mathrm{IV}} + p_2\,y''' + p_3\,y'' + p_4\,y' + p_5 = 0\,, \tag{1}$$

e supporre che cinque sue soluzioni distinte $y_i\,(x)\;(i = 1, 2, \ldots 5)$ soddisfacciano identicamente all'equazione di una delle varietà algebriche testè enumerate (e che perciò la curva integrale dell' equazione stessa sia contenuta in una delle dette varietà).

I primi due casi possono trattarsi simultaneamente. Infatti le ∞^4 sostituzioni lineari delle y_i che trasformano in sè stessa la relazione (I), e ne lasciano perciò inalterato il 1° membro a meno di un fattore costante, sono quelle stesse e quelle sole che trasformano in sè anche la (II), per un valore finito qualunque di k. Pertanto, se le soluzioni $y_i(x)$ dell'equazione differenziale (1) soddisfanno a una qualunque di queste due relazioni (e non ad altre equazioni algebriche), sempre il gruppo di razionalità dell' equazione (1) coinciderà col gruppo delle ∞^4 sostituzioni lineari dianzi considerate, o con un suo sottogruppo. — Noi potremo anzi limitarci a introdurre come ipotesi quest'ultimo fatto; supporremo cioè, in altri termini, che i primi membri di una delle (e quindi di entrambe le) relazioni (I) e (II) si comportino moltiplicativamente rispetto a ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione (1) (e abbiano perciò, quando vi si considerino le y_i come soluzioni $y_i(x)$ della (1) stessa, derivate logaritmiche razionalmente note); sotto quest' ipotesi più generale risulteranno compresi entrambi i casi a) e b) della nostra enumerazione.

4. Supponiamo dunque che il gruppo di razionalità (al più ∞^4) dell' equazione (1) si componga di sostituzioni trasformanti in sè le relazioni (I) e (II), e si rappresenti perciò in S_4 mediante un gruppo di collineazioni le quali lascino invariata una quartica razionale normale C.

Questa quartica potrà rappresentarsi analiticamente (in coordinate di punti z_i) eguagliando a zero tutti i determinanti di 2° ordine estratti dalla matrice:

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{matrix} \right\| .$$

Noi ci proponiamo ora di mostrare come si possa trasformare l' equazione differenziale proposta in un' altra avente questa quartica per curva integrale, e che dovrà perciò essere soddisfatta dalle quarte potenze delle soluzioni di un' equazione differenziale lineare del 2° ordine (*). Questa trasformazione, d' altronde semplicissima,

(*) WALLENBERG, Journ. de Crelle, t. 113; SCHLESINGER, op. e vol. cit., p. 210.

fu già applicata dal sig. MAROTTE (*), nei casi analoghi, ad equazioni differenziali lineari di 3° e 4° ordine.

La quartica C sarà incontrata da ogni spazio S_3, in particolare da ogni S_3 osculatore alla curva integrale Γ dell'equazione (1), in quattro punti, in generale distinti. Facciamo corrispondere pertanto ad ogni punto (y) della curva Γ uno dei punti (z) in cui la quartica C è incontrata dallo spazio S_3 osculatore a Γ in (y) stesso. Le coordinate z_i di questo punto potranno anche concepirsi come funzioni della variabile indipendente x; e, poichè questo punto (z) appartiene al detto spazio osculatore di Γ, il quale può ritenersi determinato dai punti (y), (y'), (y''), (y'''), esse potranno mettersi sotto la forma:

$$z_i = \alpha\, y_i + \beta\, y'_i + \gamma\, y_i'' + \delta\, y_i''',$$

dove α, β, γ, δ sono anche funzioni della x, tali che ciascuna di esse, o meglio ciascuno dei loro rapporti, sia suscettibile di quattro determinazioni diverse (sicchè è presumibile che uno qualunque di questi rapporti abbia a dipendere dalla risoluzione di un'equazione algebrica di 4° grado).

Sostituiamo ora queste espressioni delle z_i nelle equazioni della quartica C, le quali sono del tipo:

$$\begin{vmatrix} z_i & z_k \\ z_{i+1} & z_{k+1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Indicando questi diversi determinanti rispett. con $\vartheta_{ik}(z)$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, e indicando altresì con apici le derivazioni rispetto alla variabile indipendente x, avremo le 6 equazioni:

$$\begin{gathered}
\alpha^2\, \vartheta_{ik}(y) + \beta^2\, \vartheta_{ik}(y') + \gamma^2\, \vartheta_{ik}(y'') + \delta^2\, \vartheta_{ik}(y''') \\
+ \alpha\,\beta\, \vartheta'_{ik}(y) + \beta\,\gamma\, \vartheta'_{ik}(y') + \gamma\,\delta\, \vartheta'_{ik}(y'') \\
+ \alpha\,\gamma\, [\vartheta''_{ik}(y) - 2\,\vartheta_{ik}(y')] + \beta\,\delta\, [\vartheta''_{ik}(y') - 2\,\vartheta_{ik}(y'')] \\
+ \alpha\,\delta\, [\vartheta'''_{ik}(y) - 3\,\vartheta'_{ik}(y')] = 0,
\end{gathered}$$

dove i, k è una qualunque combinazione binaria dei quattro indici 1, 2, 3, 4.

Ordiniamo queste equazioni rispetto a due qualunque delle quan-

(*) *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes.* Ann. de Toulouse, t. 12, 1898, pp. 68 e seg., 84 e seg.

tità α, β, γ, δ, p. es. rispetto alle ultime due:

$$\begin{aligned}\gamma^2 \vartheta_{ik}(y'') + \gamma\,\delta\,\vartheta'_{ik}(y'') + \delta^2 \vartheta_{ik}(y''') \\ + \gamma\,\{\alpha\,[\vartheta''_{ik}(y) - 2\,\vartheta_{ik}(y')] + \beta\,\vartheta'_{ik}(y')\} \\ + \delta\,\{\alpha\,[\vartheta'''_{ik}(y) - 3\,\vartheta'_{ik}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{ik}(y') - 2\,\vartheta_{ik}(y'')]\} \\ + \alpha^2 \vartheta_{ik}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{ik}(y) + \beta^2 \vartheta_{ik}(y') = 0.\end{aligned}$$

Eliminando ora dialiticamente le quantità γ e δ, abbiamo l'equazione:

$$\begin{vmatrix}
\vartheta_{12}(y'') \,.\, \vartheta'_{12}(y'') \,.\, \vartheta_{12}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{12}(y) - 2\,\vartheta_{12}(y')] + \beta\,\vartheta'_{12}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{12}(y) - 3\,\vartheta'_{12}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{12}(y') - 2\,\vartheta_{12}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{12}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{12}(y) + \beta^2 \vartheta_{12}(y') \\
\vartheta_{13}(y'') \,.\, \vartheta'_{13}(y'') \,.\, \vartheta_{13}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{13}(y) - 2\,\vartheta_{13}(y')] + \beta\,\vartheta'_{13}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{13}(y) - 3\,\vartheta'_{13}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{13}(y') - 2\,\vartheta_{13}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{13}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{13}(y) + \beta^2 \vartheta_{13}(y') \\
\vartheta_{14}(y'') \,.\, \vartheta'_{14}(y'') \,.\, \vartheta_{14}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{14}(y) - 2\,\vartheta_{14}(y')] + \beta\,\vartheta'_{14}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{14}(y) - 3\,\vartheta'_{14}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{14}(y') - 2\,\vartheta_{14}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{14}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{14}(y) + \beta^2 \vartheta_{14}(y') \\
\vartheta_{23}(y'') \,.\, \vartheta'_{23}(y'') \,.\, \vartheta_{23}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{23}(y) - 2\,\vartheta_{23}(y')] + \beta\,\vartheta'_{23}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{23}(y) - 3\,\vartheta'_{23}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{23}(y') - 2\,\vartheta_{23}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{23}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{23}(y) + \beta^2 \vartheta_{23}(y') \\
\vartheta_{24}(y'') \,.\, \vartheta'_{24}(y'') \,.\, \vartheta_{24}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{24}(y) - 2\,\vartheta_{24}(y')] + \beta\,\vartheta'_{24}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{24}(y) - 3\,\vartheta'_{24}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{24}(y') - 2\,\vartheta_{24}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{24}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{24}(y) + \beta^2 \vartheta_{24}(y') \\
\vartheta_{34}(y'') \,.\, \vartheta'_{34}(y'') \,.\, \vartheta_{34}(y''') \,.\, \alpha\,[\vartheta''_{34}(y) - 2\,\vartheta_{34}(y')] + \beta\,\vartheta'_{34}(y') \\
.\, \alpha\,[\vartheta'''_{34}(y) - 3\,\vartheta'_{34}(y')] + \beta\,[\vartheta''_{34}(y') - 2\,\vartheta_{34}(y'')] \\
.\, \alpha^2 \vartheta_{34}(y) + \alpha\,\beta\,\vartheta'_{34}(y) + \beta^2 \vartheta_{34}(y')
\end{vmatrix},$$

la quale può considerarsi come un'equazione di 4° grado nel rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$. I coefficienti di quest'equazione sono determinanti e somme di determinanti di 6° ordine del tipo $|\,\vartheta^{(p)}_{ik}(y^{(q)})\,|$; le diverse orizzontali e verticali di ogni singolo determinante corrispondono rispett. alle sei diverse coppie di indici $i\,k$ e a altrettante coppie di apici $p\,q$.

Ora, le sei equazioni $\vartheta_{ik}(y) = 0$ rappresentano rispett. altrettante quadriche linearmente indipendenti passanti per la quartica C; e queste quadriche determinano perciò un sistema lineare ∞^5, nel quale risultano già contenute tutte le quadriche passanti per la quartica stessa. Poichè dunque ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione (1) si rappresenta in S_4 mediante una collineazione trasformante in sè la quartica C e quindi anche il sistema lineare ∞^5 delle quadriche che la contengono, così è chiaro che, per effetto di una qualunque di queste operazioni, le sei funzioni $\vartheta_{ik}(y)$ dovranno anche subire una sostituzione lineare a coefficienti costanti (*). E questa stessa sostituzione la subiranno altresì le loro derivate di uno stesso ordine $\vartheta_{ik}^{(p)}(y)$, come pure le funzioni $\vartheta_{ik}^{(p)}(y^{(q)})$ — corrispondenti a una stessa coppia di apici p, q —, poichè le y_i sono cogredienti alle loro derivate $y_i^{(q)}$. Di qui si trae che i determinanti di 6° ordine che compajono nei coefficienti dell'ultima equazione, e quindi anche questi stessi coefficienti, verranno tutti moltiplicati, nelle operazioni del gruppo di razionalità della (1), per un medesimo fattore costante, il modulo della sostituzione delle $\vartheta_{ik}(y)$. I rapporti di questi coefficienti sono dunque funzioni differenziali razionali delle y_i che si conservano inalterate (formalmente, e quindi come anche funzioni di x) per tutte le operazioni del gruppo di razionalità anzidetto; essi saranno perciò funzioni razionalmente note, e il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ risulterà determinato da *un'equazione algebrica di 4° grado a coefficienti razionalmente noti.*

Supposte *aggiunte* al campo di razionalità primitivo le funzioni di x radici di quest'equazione, si potranno determinare razionalmente tutti gli altri mutui rapporti delle funzioni α, β, γ, δ (almeno se, come possiamo sempre supporre, l'equazione risoluta è, fra le sei analoghe, quella che ha le eventuali radici multiple in numero e con ordine minimo). Infatti, se si formano ad es. le equazioni di 4° grado, pure a coefficienti razionali, da cui dipendono i rapporti $\frac{\alpha}{\gamma}$ e $\frac{\beta}{\gamma}$, è chiaro che tutte le radici distinte dell'una di esse

(*) Ciascuna delle forme $\vartheta_{ik}(y)$ deve infatti mutarsi in una nuova forma quadratica, che, eguagliata a zero, rappresenti una quadrica passante per la stessa C; e questa forma non può essere che una combinazione lineare delle sei $\vartheta_{ik}(y)$ primitive.

determineranno colle radici dell'altra, in un certo ordine, rapporti $\frac{\alpha}{\beta}$ razionalmente noti, e anche tutti distinti. Quelle radici potranno dunque determinarsi razionalmente.

Determinate in tal guisa le funzioni α, β, γ, δ (a meno di un fattore comune, funzione di x, il quale può assumersi completamente ad arbitrio), se noi all'equazione differenziale (1) applichiamo la sostituzione:

$$z = \alpha\, y + \beta\, y' + \gamma\, y'' + \delta\, y''';$$

la trasformata in z, che sarà pure un'equazione differenziale lineare del 5° ordine, ottenibile con sole derivazioni ed eliminazioni:

$$z^{\mathrm{V}} + q_1\, z^{\mathrm{IV}} + q_2\, z''' + q_3\, z'' + q_4\, z' + q_5\, z = 0, \tag{2}$$

dovrà avere cinque soluzioni indipendenti $z_1, z_2, \ldots z_5$ soddisfacenti alle equazioni:

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{matrix} \right\| = 0,$$

e avrà perciò la quartica C come curva integrale.

L'integrale generale dell'equazione (2) sarà dato pertanto (*) da un'espressione del tipo:

$$z = a_1\, \xi_1^4 + a_2\, \xi_1^3\, \xi_2 + a_3\, \xi_1^2\, \xi_2^2 + a_4\, \xi_1\, \xi_2^3 + a_5\, \xi_2^4,$$

dove le a_i sono costanti arbitrarie, e le ξ_1, ξ_2 sono soluzioni distinte di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine, che potrà formarsi razionalmente. Quest'ultima equazione può supporsi ridotta con una sostituzione $\xi = \rho\, \bar{\xi}$ alla forma:

$$\bar{\xi}'' + s\, \bar{\xi} = 0 \tag{3}$$

e le quarte potenze delle sue soluzioni ($\bar{z} = \bar{\xi}^4$) soddisferanno allora all'equazione differenziale lineare di 5° ordine:

$$\bar{z}^{\mathrm{V}} + 20\, s\, \bar{z}''' + 30\, s'\, \bar{z}'' + (64\, s^2 + 18\, s'')\, \bar{z}' + (64\, s\, s' + 4\, s''')\, \bar{z} = 0. \tag{2'}$$

(*) SCHLESINGER, op. e vol. cit., p. 203 e seg.

A questa ultima forma dovrà quindi ridursi la (2) con una sostituzione $z = \sigma \bar{z}$; e anzi, mancando in quest' ultima equazione il termine contenente la derivata $\bar{z}^{\mathrm{IV}}$, sarà:

$$\sigma = \rho^4 = e^{-\frac{1}{5}\int q_1 dx}$$

L' integrazione dell' equazione differenziale proposta si riconduce dunque in questo caso, colla risoluzione di un' equazione algebrica di 4° grado a coefficienti razionali e con una quadratura, all' integrazione dell' equazione differenziale lineare di 2° ordine:

$$\bar{\xi}'' + s\bar{\xi} = 0$$

[dove la funzione s è data dalla (2')].

Derivando infatti la relazione:

$$z = \alpha y + \beta y' + \gamma y'' + \delta y''',$$

successivamente quattro volte, eliminandone la y^{V} e le derivate successive mediante la (1), e considerando le cinque relazioni così ottenute come equazioni lineari non omogenee nelle $y, y', y'', y''', y^{\mathrm{IV}}$, ricaveremo per y un' espressione del tipo:

$$y = A z + B z' + C z'' + D z''' + E z^{\mathrm{IV}},$$

i cui coefficienti $A, B, \ldots$ saranno funzioni di x appartenenti al campo di razionalità definito dai coefficienti p_i della (1) e dalle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; e la z avrà per espressione generale:

$$z = e^{-\frac{1}{5}\int q_1 dx} \left\{ a_1 \bar{\xi}_1^4 + a_2 \bar{\xi}_1^3 \bar{\xi}_2 + a_3 \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 + a_4 \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2^3 + a_5 \bar{\xi}_2^4 \right\}$$

dove le $\bar{\xi}$ sono soluzioni distinte della (3) e le a_i costanti arbitrarie.

Si può ancora osservare che l' equazione differenziale (1) ammetterà tutte le soluzioni:

$$y = e^{-\frac{1}{5}\int q_1 dx} \left\{ A_1 \bar{\xi}^4 + B_1 \bar{\xi}^3 \bar{\xi}' + C_1 \bar{\xi}^2 \bar{\xi}'^2 + D_1 \bar{\xi} \bar{\xi}'^3 + E_1 \bar{\xi}'^4 \right\}$$

dove $\bar{\xi}$ è una soluzione qualunque dell' equazione differenziale (3), e le $A_1, B_1, \ldots$ sono formalmente formate razionalmente mediante le $A, B, \ldots$ e la s.

5. Nei casi *c*) e *d*) del n. 3 l'equazione differenziale proposta è *riducibile* (nel campo di razionalità definito dai suoi stessi coefficienti); e su ciascuno di questi casi potremo limitarci a poche osservazioni.

Nel caso *c*) il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale (1) si rappresenta in S_4 mediante un gruppo projettivo che lascia fisso lo spazio $y_5 = 0$ e il punto $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$. L'equazione stessa ammetterà pertanto un integrale y_5 puramente moltiplicativo, ossia la cui derivata logaritmica sarà razionalmente nota; la determinazione di questo integrale richiederà perciò soltanto una quadratura. Inoltre, le soluzioni y_1, y_2, y_3, y_4 determineranno un sistema lineare invariante rispetto all'intero gruppo di razionalità, e soddisferanno perciò a un'equazione differenziale lineare del 4° ordine con coefficienti razionalmente noti, la quale apparterrà alla categoria VII della classificazione del sig. Marotte (*) (avendo per proprio gruppo di razionalità un gruppo di sostituzioni quaternarie rappresentanti collineazioni di S_3 con una cubica sghemba fissa). L'integrazione di quest' equazione differenziale di 4° ordine si ricondurrà perciò, colla risoluzione di un'equazione algebrica di 3° grado a coefficienti razionali, all'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine; e ciò per una via completamente analoga a quella da noi seguita al n.° prec.

L'equazione differenziale proposta ammette dunque tutte le soluzioni di due altre equazioni differenziali lineari, rispettivamente del 1° e del 4° ordine, a coefficienti razionalmente noti:

$$y' + r y = 0$$

$$y^{\mathrm{IV}} + q_1 y''' + q_2 y'' + q_3 y' + q_4 y = 0;$$

e la seconda di queste equazioni potrà trasformarsi con una sostituzione:

$$z = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$$

(dove α, β, γ risultano anche razionali, dopo aggiunte al campo primitivo le radici di un'equazione cubica) *in un' altra equazione, pure del 4° ordine, la quale, privata del secondo termine, deve assumere la forma:*

$$\bar{z}^{\mathrm{IV}} + 10 s \bar{z}'' + 10 s' \bar{z}' + (3 s'' + 9 s^2) \bar{z} = 0 ,$$

(*) Mem. cit., Cap. VIII, p. 84 e seg.

e sarà perciò soddisfatta dai cubi delle soluzioni dell' equazione differenziale lineare di 2° ordine $\xi'' + s\xi = 0$.

Nel caso *d)* il gruppo di razionalità dell' equazione differenziale proposta può rappresentarsi colle equazioni:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_1 &= (ad - bc)^{-\frac{1}{2}} (a^2 y_1 + 2ab\, y_2 + b^2 y_3) \\
\overline{y}_2 &= (ad - bc)^{-\frac{1}{2}} (ac\, y_1 + (ad + bc)\, y_2 + bd\, y_3) \\
\overline{y}_3 &= (ad - bc)^{-\frac{1}{2}} (c^2 y_1 + 2cd\, y_2 + d^2 y_3) \ (*) \\
\overline{y}_4 &= a\, x_4 + b\, y_5 \\
\overline{y}_5 &= c\, y_4 + d\, y_5.
\end{aligned}$$

(e può anche limitarsi a un sottogruppo di questo gruppo ∞^4). Nello spazio S_4 esso viene rappresentato da un gruppo projettivo, il quale lascerà fissi la retta $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e il piano $y_4 = y_5 = 0$ (non chè la conica $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ in questo piano). Le soluzioni y_4 e y_5 soddisferanno perciò a un'equazione differenziale lineare del 2° ordine, a coefficienti razionalmente noti. Le soluzioni y_1, y_2, y_3 soddisferanno invece a un'equazione differenziale lineare del 3° ordine a coefficienti anche razionalmente noti, e appartenente alla categoria IV del sig. MAROTTE (**); essa deve perciò ricondursi con una estrazione di radice quadrata a un' equazione differenziale lineare del 2° ordine. D' altra parte però, dopo *aggiunte* al campo di razionalità le soluzioni y_4, y_5, il gruppo di razionalità deve ridursi al massimo suo sottogruppo invariante che lascia fisse queste due soluzioni (***); vale a dire al gruppo finito di ordine *due*:

$$\overline{y}_1 = \pm y_1 \qquad \overline{y}_2 = \pm y_2 \qquad \overline{y}_3 = \pm y_3,$$

sicchè la determinazione delle tre soluzioni ulteriori y_1, y_2, y_3 dovrà richiedere (dopo conosciute le y_4 e y_5) soltanto un' estrazione di radice quadrata.

(*) Dove al fattore $(ad - bc)^{-\frac{1}{2}}$ si suppone attribuita in tutte tre le equazioni la stessa determinazione (ossia lo stesso segno).

(**) Mem. cit., Cap. VII, p. 68 e seg.

(***) VESSIOT, Mem. cit., p. 238; SCHLESINGER, op. e vol. cit., p. 82.

E infatti, per ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, le 3 variabili:

$$z_1 = y_4^2 \qquad z_2 = y_4 y_5 \qquad z_3 = y_5^2,$$

sono cogredienti alle y_1, y_3, y_3 $\left(\text{a meno del fattore costante } (ad-bc)^{\frac{1}{2}}\right)$. Ponendo dunque:

$$y_i = A z_i + B z_i' + B z_i'' \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e ricavando da queste equazioni le A, B, C espresse in funzione delle y e delle z:

$$A = \frac{[y_1 z_2' z_3'']}{[z_1 z_2' z_3'']} \qquad B = \frac{[z_1 y_2 z_3'']}{[z_1 z_2' z_3'']} \qquad C = \frac{[z_1 z_2' y_3]}{[z_1 z_2' z_3'']};$$

vediamo che queste tre funzioni si comporteranno moltiplicativamente rispetto alle operazioni del gruppo di razionalità nell' equazione (1); e risulteranno precisamente moltiplicate per il fattore $(ad - bc)^{-\frac{1}{2}}$ I loro mutui rapporti saranno dunque funzioni differenziali razionali delle y_i, le quali si manterranno inalterate (formalmente, e quindi anche come funzioni di x) per tutte le operazioni del gruppo di razionalità anzidetto, e saranno perciò razionalmente note. — Inoltre, dal comportamento veduto delle A, B, C, segue altresì che saranno pure invarianti, e perciò razionalmente note, le tre funzioni:

$$A^2 (y_4 y_5') \qquad B^2 (y_4 y_5') \qquad B^2 (y_4 y_5');$$

così, una volta note y_4 e y_5, le A, B, C si potranno determinare con una (sola) estrazione di radice quadrata (*); e dopo di ciò saranno razionalmente note anche le y_1, y_2, y_3.

L'equazione differenziale proposta ammette pertanto le soluzioni di due altre equazioni differenziali lineari, rispett. del 2° e del 3° ordine, a coefficienti razionalmente noti:

$$y'' + r_1 y' + r_2 y = 0, \tag{2}$$

$$y'' + q_1 y'' + q_2 y' + q_3 y = 0. \tag{3}$$

(*) Tuttavia la determinazione della funzione $(y_4 y'_5)$, e quindi delle A^2, B^2, C^2, può effettuarsi, anche senza conoscere y_4 e y_5, mediante una quadratura; quella stessa che serve a mandar via il 2° termine dell'equazione differenziale lineare di 2° ordine da cui dipendono y_4 e y_5.

Queste equazioni devono inoltre esser tali che l'equazione differenziale lineare di 3° ordine a cui soddisfanno i quadrati delle soluzioni della (2), *e un'opportuna trasformata in* $\overline{y} = \sigma y$ *della* (3) $\left(\text{dove } \frac{\sigma'}{\sigma}\right.$ è razionale$\left.\right)$ *appartengano alla stessa specie* (*). E infatti abbiamo veduto che l'equazione differenziale di 3° ordine a cui soddisfanno i quadrati $z = y^2$ delle soluzioni della (2) si trasforma nella (3) colla sostituzione:

$$y = A z + B z' + C z'',$$

dove A, B, C hanno mutui rapporti e derivate logaritmiche razionali, e sono perciò del tipo:

$$A = a \,.\, e^{\int s dx} \quad B = b \,.\, e^{\int s dx} \quad C = c \,.\, e^{\int s dx},$$

essendo a, b, c e s $\left(= -\frac{\sigma'}{\sigma}\right)$ funzioni tutte razionali.

Osserviamo infine che le cose dette in questo n° valgono anche per ogni caso in cui, pur non essendo la curva integrale dell'equazione (1) contenuta in alcuna varietà algebrica, si sappia tuttavia che il gruppo di razionalità di quest'equazione si rappresenta in S_4 mediante uno dei due gruppi projettivi ∞^3 considerati ai casi *c*) e *d*) del n° 3.

6. Nel caso *e*) il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta non è altro che il (ovvero un sottogruppo del) gruppo ∞^7 rappresentato dalle equazioni:

$$\overline{y}_1 = \rho\,\{a^2 y_1 + 2\,a\,b\,y_2 + b^2 y_3 + 2\,m\,(a\,y_4 + b\,y_5)\}$$

$$\overline{y}_2 = \rho\,\{a c y_1 + (a d + b c) y_2 + b d y_3 + n (a y_4 + b y_5) + m (c y_4 + d y_5)\}$$

$$\overline{y}_3 = \rho\,\{c^2 y_1 + 2\,c\,d\,y_2 + d^2 y_3 + 2\,n\,(c\,y_4 + d\,y_5)\}$$

$$\overline{y}_4 = a\,y_4 + b\,y_5$$

$$\overline{y}_5 = c\,y_4 + d\,y_5\,.$$

(*) Schlesinger, op. e vol. cit., pp. 120, 124.

Le y_4 e y_5 saranno perciò ancora soluzioni di un' equazione differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti razionalmente noti. L'integrazione di quest'equazione ridurrà il gruppo di razionalità anzidetto al massimo suo sottogruppo (necessariamente invariante), le cui operazioni trasformino in sè stesse le soluzioni y_4 e y_5: vale a dire, se si trattava del gruppo totale ∞^7, al gruppo ∞^3:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_1 &= \rho\,(y_1 + 2\,m\,y_4) \\
\overline{y}_2 &= \rho\,(y_2 + n\,y_4 + m\,y_5) \\
\overline{y}_3 &= \rho\,(y_3 + 2\,n\,y_5) \\
\overline{y}_4 &= y_4 \qquad \overline{y}_5 = y_5\,.
\end{aligned}$$

E poichè questo gruppo è integrabile, le soluzioni y_1, y_2, y_3 si potranno dopo di ciò determinare mediante quadrature. Saranno infatti invarianti, e perciò razionalmente note, le due funzioni:

$$\left(\frac{y_1}{y_4}\right)'' : \left(\frac{y_1}{y_4}\right)' \quad \text{e} \quad \left(\frac{y_3}{y_5}\right)'' : \left(\frac{y_3}{y_5}\right)' ;$$

e dalle loro espressioni si ricaveranno rispett. y_1 e y_3: la prima mediante due quadrature; la seconda, dopo effettuate le precedenti, mediante una quadratura ulteriore. E dopo di ciò sarà razionalmente nota anche la y_2.

L'equazione differenziale proposta si potrà dunque mettere razionalmente sotto la forma:

$$(y''' + q_1\,y'' + q_2\,y' + q_3\,y)\,(y'' + r_1\,y' + r_2\,y) = 0\,;$$

essendo:

$$y'' + r_1\,y' + r_2\,y = 0\,, \tag{2}$$

l'equazione differenziale lineare di 2° ordine che ammette le soluzioni y_4 e y_5.

Invece l'equazione differenziale:

$$y''' + q_1\,y'' + q_2\,y' + q_3\,y = 0\,, \tag{3}$$

ammetterà le soluzioni:

$$u_i = y_i'' + r_1\,y_i' + r_2\,y_i = \frac{[y_i''\,y'_4\,y_5]}{[y'_4\,y_5]} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)\,,$$

le quali, per effetto del gruppo di razionalità complessivo ∞^7, subiscono le ∞^4 sostituzioni lineari:

$$\bar{u}_1 = \rho\,(a^2 u_1 + 2\,a\,b\,u^2 + b^2 u_3)$$

$$\bar{u}_2 = \rho\,(a\,c\,u_1 + (a\,d + b\,c)\,u_2 + b\,d\,u_3)$$

$$\bar{u}_1 = \rho\,(c^2 u_1 + 2\,c\,d\,u_2 + d^2 u_3)\,.$$

Di qui, con ragionamento analogo a quello del n° prec., si può concludere che l'equazione differenziale lineare di 3° ordine a cui soddisfanno i quadrati delle soluzioni della (2) deve appartenere alla stessa specie di un'opportuna trasformata in $\bar{y} = \sigma\,y$ della (3) (essendo $\frac{\sigma'}{\sigma}$ funzione razionale). — Le equazioni (2) e (3) si trovano dunque, l'una rispetto all'altra, in condizioni analoghe a quelle che si avevano per le equazioni (2) e (3) del caso *d*). Però, mentre nel caso *d*) le soluzioni della (3) erano altresì soluzioni dell'equazione differenziale proposta (1), nel caso attuale esse rappresentano soltanto il risultato ottenuto applicando alle soluzioni $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ della (1) l'operazione definita dal primo membro della (2).

7. Nel caso *f*), e più generalmente anzi ogni qual volta sia razionalmente nota la derivata logaritmica della forma biquadratica:

$$6\,y_1\,y_2\,y_3\,y_4 - 4\,y_1\,y_3^3 - 4\,y_2^3\,y_4 - y_1^2\,y_4^2 + 3\,y_2^2\,y_3^2,$$

le quattro soluzioni y_1, y_2, y_3, y_4 dovranno soddisfare a un'equazione differenziale lineare del 4° ordine a coefficienti razionalmente noti, la quale sarà dello stesso tipo di quella incontrata nel caso *c*). La sua integrazione si ridurrà perciò, mediante la risoluzione di un'equazione algebrica di 3° grado, a quella di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine. Integrata quest'ultima equazione, saranno razionalmente note le y_1, y_2, y_3, y_4, e la y_5 si determinerà con sole quadrature.

L'equazione differenziale proposta deve dunque potersi mettere razionalmente sotto la forma:

$$(y' + r\,y)\,(y^{\text{IV}} + q_1\,y''' + q_2\,y'' + q_3\,y' + q_4\,y) = 0\,;$$

e l'equazione di 4° ordine che si ottiene eguagliando a zero quest'ultima parentesi deve essere dello stesso tipo di quella incontrata nel caso *c*) (n° 5).

8. Rimane il caso in cui la curva integrale dell'equazione differenziale (1) sia contenuta in una quadrica dello spazio S_4 (la cui equazione indicheremo brevemente con $f(y) = 0$.

Se questa quadrica non è degenere, conviene ancora distinguere due casi, secondo che la forma $f(y')$, considerata come funzione della variabile indipendente x, *è* oppure *non è* identicamente nulla. Di entrambi questi casi io mi sono già occupato nella mia Nota: *Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine...*, testè pubblicata negli Atti della R. Accademia di Torino (seduta del 12 marzo 1899).

Se si ha identicamente $f(y') = 0$, l'equazione differenziale proposta è *seconda associata* (*) di un' equazione differenziale lineare del 4° ordine, che può formarsi razionalmente. Mandando a zero in essa il coefficiente del 2° termine, colla sostituzione:

$$y = z\, e^{-\frac{1}{5}\int p_1 dx},$$

si deve ottenere un'equazione del tipo:

$$\left.\begin{aligned} &z^{\mathrm{V}} + 12\, q_2\, z''' + 18\, q_2'\, z'' + (18\, q_2'' + 36\, q_2^2 - 4\, q_4)\, z' \\ &\quad + (6\, q_2''' + 36\, q_2\, q_2' - 2\, q_4')\, z = 0; \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

e questa è la seconda associata dell'equazione differenziale lineare di 4° ordine:

$$y^{\mathrm{IV}} + 6\, q_2\, y'' + 6\, q_2'\, y' + q_4\, y = 0, \qquad (2)$$

la quale ultima ha la proprietà di coincidere colla propria aggiunta e prima associata, e può scriversi immediatamente quando sia nota la (1'). Indicando con y_1, y_2, y_3, y_4 quattro soluzioni distinte di quest'ultima equazione, i sei determinanti $(y_i\, y'_k)$ saranno altrettante soluzioni della (1'), e fra queste ve ne saranno cinque indipendenti. L'integrazione dell'equazione (1) si riconduce perciò con una sola quadratura a quella di quest'ultima equazione. Ma *l'integrazione della (2) è un problema non ulteriormente riducibile*, trattandosi di un' equazione il cui gruppo di razionalità (essendo oloedricamente isomorfo al gruppo projettivo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale in S_3) è *semplice* (**). Si può bensì sostituire alla

(*) SCHLESINGER, op. e vol. cit., p. 127.

(**) LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*; vol. II, pp. 521, 449.

(2) un' equazione differenziale non lineare del 3° ordine (ad es., formandone la trasformata in $\frac{y'}{y}$, la quale sarebbe una specie di " Equazione di Riccati generalizzata "); ma non si può in alcun modo ridursi all' integrazione di un' equazione differenziale di ordine inferiore al 3°, perchè il gruppo ∞^{10} considerato non contiene alcun sottogruppo con più di 7 parametri (*).

Se si ha invece $f(y') \neq 0$, basta aggiungere al campo di razionalità definito dai coefficienti della (1) la radice quadrata di una funzione razionale di questi coefficienti e loro derivate, per ridurre (come io ho mostrato al n. 9 della mia Nota cit.) l'integrazione della (1) stessa a quella di un' altra equazione differenziale lineare del 5° ordine a coefficienti razionalmente noti, la quale si trovi nel caso dianzi considerato (abbia cioè cinque soluzioni distinte ζ_i legate dalle relazioni $f(\zeta) = f(\zeta') = 0$). — Senza entrare a questo proposito in dettagli, mi limiterò a ricordare che, se noi ci rappresentiamo la quadrica di S_4 contenente la curva integrale dell'equazione (1) mediante un complesso lineare non speciale di S_3, e questa stessa curva integrale mediante una rigata (non sviluppabile) R contenuta nel detto complesso, la curva integrale della nuova equazione differenziale verrà rappresentata dalla rigata sviluppabile (**) intersezione dello stesso complesso lineare colla congruenza delle tangenti principali di R. Questa sviluppabile Σ sarà pertanto circoscritta ad R; e le diverse generatrici di R staranno rispettivamente nei singoli piani tangenti di Σ, e apparterranno ai fasci determinati dalle singole coppie di generatrici consecutive di Σ stessa. Anzi, ogni generatrice di R apparterrà a due diversi fra questi fasci (distinti, ogni qual volta essa non sia generatrice singolare), corrispondentemente alle due tangenti principali di R che si appoggiano ad essa e stanno nel complesso lineare considerato. Indicando pertanto con $y_1, y_2, \ldots y_5$ cinque soluzioni distinte dell'equazione (1), e con $\zeta_1^{(1)}, \ldots \zeta_5^{(1)}$; $\zeta_1^{(2)}, \ldots \zeta_5^{(2)}$ le due diverse determinazioni di uno stesso sistema, opportunamente scelto, di soluzioni distinte della nuova equazione differenziale di 5° ordine (corrispondenti al doppio segno del radicale quadratico stato aggiunto al

(*) LIE, op. e vol. cit., p. 455.

(**) LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe* ... Math. Ann., vol. 5, 1872, p. 179.

campo di razionalità primitivo), dovranno sussistere relazioni del tipo:

$$y_i = a_1 \zeta_i^{(1)} + b_1 \zeta_i^{(1)'} = a_2 \zeta_i^{(2)} + b_2 \zeta_i^{(2)'} \qquad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

essendo le a e le b certe funzioni, i cui mutui rapporti saranno completamente individuati da queste equazioni. In particolare i rapporti $\frac{b_1}{a_1}$ e $\frac{b_2}{a_2}$ saranno funzioni differenziali razionali delle $\zeta_i^{(1)}$ e $\zeta_i^{(2)}$ e quindi delle y_i (*), le quali, esprimendo i birapporti $[\zeta, \zeta', (\zeta + \zeta), y]$ (**), rimarranno invariate, come funzioni di x, per tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, e saranno perciò razionalmente note (dopo aggiunto al campo di razionalità il radicale quadratico già considerato). Per completare poi la determinazione delle singole funzioni a e b basterà tener conto della (1) (alla quale le y_i devono soddisfare) e della relazione $f(y''_\zeta) = f(y')$ posta nella mia Nota cit. Queste relazioni permetteranno di effettuare tale determinazione anche razionalmente.

Concludiamo pertanto:

Ogni equazione differenziale lineare del 5° ordine, di cui cinque soluzioni indipendenti siano legate da un' equazione quadratica omogenea a coefficienti costanti e di discriminante non nullo, può ottenersi da un'equazione del tipo (1') *mediante una trasformazione* $y = Az + Bz'$, *dove* A e B *sono certe funzioni della variabile indipendente* x. I coefficienti di quest'equazione (1') appartengono al campo di razionalità definito dai coefficienti dell'equazione differenziale proposta (1) coll'aggiunta della radice quadrata di una funzione razionale di questi stessi coefficienti e loro derivate: a questo campo di razionalità appartiene altresì la funzione $\frac{A}{B}$; ma

---

(*) Poichè le $\zeta_i^{(1)}$ e $\zeta_i^{(2)}$ possono a lor volta esprimersi razionalmente mediante le y_i, le loro derivate, e il radicale quadratico dianzi considerato.

(**) Essendosi nella mia Nota cit. determinate le ζ in modo che, per effetto delle operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione proposta, esse subissero sostituzioni lineari a coefficienti costanti, e fossero perciò cogredienti alle ζ', ne segue che anche alla retta $(\zeta + \zeta')$ e più generalmente ad ogni retta $(\zeta + k\zeta')$ corrisponderà la retta $(\overline{\zeta} + \overline{\zeta'})$ o rispett. $(\overline{\zeta} + k\,\overline{\zeta'})$.

la determinazione delle due funzioni A, B richiederà in generale una quadratura (*).

9. Se la curva integrale dell'equazione (1) appartiene a un cono quadrico di 1ª specie, — la cui equazione possiamo supporre che contenga le sole y_1, y_2, y_3, y_4 —, la (1) dovrà ammettere tutte le soluzioni $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$ di un' equazione differenziale lineare di 4° ordine a coefficienti razionalmente noti. E quest'ultima equazione, avendo quattro soluzioni distinte legate da una relazione quadratica di discriminante non nullo, dovrà a sua volta essere soddisfatta dai prodotti delle soluzioni di due equazioni differenziali lineari di 2° ordine, che potranno anche formarsi razionalmente a meno di un'estrazione di radice quadrata (**).

Se queste due equazioni le supponiamo ridotte rispett. alla forma:

$$y'' + q_1 y = 0 \qquad y'' + q_2 y = 0,$$

i prodotti delle loro soluzioni soddisferanno all' equazione differenziale lineare di 4° ordine:

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{IV}} &- \frac{q_1' - q_2'}{q_1 - q_2} y''' + 2(q_1 + q_2) y'' \\ &+ \left\{ 3(q_1' + q_2') - 2 \frac{(q_1 + q_2)(q_1' - q_2')}{q_1 - q_2} \right\} y' \\ &+ \left\{ (q_1'' + q_2'') + (q_1 - q_2)^2 - \frac{q_1'^2 - q_2'^2}{q_1 - q_2} \right\} y = 0. \end{aligned}$$

E di qui è facile dedurre la più generale equazione differenziale lineare del 5° ordine che ammette tutte le soluzioni della precedente; essa potrà rappresentarsi simbolicamente scrivendo:

$$(y' + p y)\left(y^{\mathrm{IV}} - \frac{q_1' - q_2'}{q_1 - q_2} y''' + 2(q_1 + q_2) y'' + \ldots\right) = 0 .$$

L'equazione differenziale proposta dovrà perciò ridursi a questa forma mediante una sostituzione $y = \rho \overline{y}$.

(*) Le considerazioni precedenti si riferivano infatti all'equazione avente per soluzioni le ζ_i; la quale equazione non è ancora del tipo (1'), ma si riduce a questa forma mandando a zero in essa il coefficiente del 2° termine.

(**) GOURSAT, *Compt. Rend.*, t. 97 (1883), p. 31.

Halphen ha anche mostrato (*) che, scegliendo opportunamente la variabile indipendente x, le due equazioni differenziali lineari di 2° ordine considerate possono mettersi sotto la forma:

$$y'' + \left(q + \frac{c}{2}\right) y = 0, \quad y'' + \left(q - \frac{c}{2}\right) y = 0,$$

dove q è funzione di x, e c è una costante arbitraria (non nulla, se le due equazioni sono distinte). I prodotti delle soluzioni di queste due equazioni soddisfanno all'equazione differenziale di 4° ordine:

$$y^{\mathrm{IV}} + 4\,q\,y'' + 6\,q'\,y' + (2\,q'' + c^2)\,y = 0;$$

e l'equazione di 5° ordine più generale che ammette tutte le soluzioni della precedente sarà del tipo:

$$(y' + p\,y)\,(y^{\mathrm{IV}} + 4\,q\,y'' + 6\,q'\,y' + (2\,q'' + c^2)\,y) = 0,$$

ossia:

$$y^{\mathrm{V}} + p\,y^{\mathrm{IV}} + 4\,q\,y''' + (10\,q' + 4\,p\,q)\,y'' + (8\,q'' + 6\,p\,q' + c^2)\,y' + (2\,q''' + 2\,p\,q''' + p\,c^2)\,y = 0.$$

A questa forma dovrà dunque ridursi la (1) *con un' opportuna sostituzione* $y = \rho\,\bar{y}$, $x = f(\bar{x})$.

Se infine la (1) ha la propria curva integrale contenuta in un cono quadrico di 2ª specie (la cui equazione possiamo supporre che contenga le sole y_1, y_2, y_3), essa dovrà ammettere tutte le soluzioni $(C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3)$ di un'equazione differenziale lineare di 3° ordine, la quale a sua volta dovrà essere soddisfatta dai quadrati delle soluzioni di un'equazione pure lineare di 2° ordine (a coefficienti razionalmente noti). Se quest'ultima equazione la supponiamo ridotta alla forma:

$$y'' + r\,y = 0;$$

i quadrati delle sue soluzioni dovranno soddisfare all'equazione differenziale di 3° ordine:

$$y''' + 4\,r\,y' + 2\,r'\,y = 0;$$

e l'equazione (1) si potrà perciò ridurre con una sostituzione $y = \rho\,y$

(*) Cfr. la Mem. *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre.* Acta Math., III, 1883, p. 348 e seg.

alla forma:

$$(y'' + p y' + q y)(y''' + 4 r y' + 2 r' y) = 0$$

ossia:

$$y^{\mathrm{V}} + p y^{\mathrm{IV}} + (4 r + q) y''' + (10 r' + 4 p r) y'' + (8 r'' + 6 p r' + 4 q r) y' + 2 (r''' + p r'' + r' q) y = 0,$$

la cui integrazione richiede quella di due distinte equazioni differenziali lineari di 2° ordine, oltre a un certo numero di quadrature. L'integrazione di queste due equazioni differenziali di 2° ordine riduce il gruppo di razionalità dell'equazione proposta all'insieme di quelle sole trasformazioni projettive di S_4 che lasciano fissi tutti i piani (e gli spazi S_3) e tutti i punti appartenenti alla retta asse del cono: trasformazioni che formano evidentemente un gruppo integrabile.

10. Nella mia Memoria già citata al n° 3 di questa Nota sono anche determinate le *superficie* algebriche dello spazio S_4 che ammettono un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive. Queste sono:

1.° La sviluppabile del 6° ordine circoscritta a una quartica razionale normale;

2.° La superficie di 4° ordine luogo delle intersezioni delle coppie di piani osculatori a una quartica.

Queste due superficie non ammettono chè le ∞^3 trasformazioni projettive che lasciano fissa la quartica cui esse si riferiscono.

3.° Il cono razionale normale del 3° ordine, il quale è invariante rispetto allo stesso gruppo projettivo ∞^8 del cono quartico a tre dimensioni considerato nel caso *e*).

4.° La rigata cubica normale con direttrice rettilinea, la quale è projettata da questa direttrice secondo un cono quadrico di 2ª specie, invariante rispetto alle sue ∞^6 trasformazioni projettive.

Infine, la sola curva appartenente a S_4 la quale ammetta un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive è la quartica razionale normale.

Possiamo dunque concludere:

Ogni equazione differenziale lineare del 5° ordine le cui soluzioni siano legate da una o più equazioni algebriche omogenee a *coefficienti costanti* (di grado superiore al 1°) *può integrarsi con operazioni algebriche, quadrature, e, eventualmente, una o due equazioni differenziali lineari di 2° ordine (ovvero equazioni di Riccati)* — a meno che non si tratti di *una sola relazione quadratica e di discriminante non nullo fra cinque soluzioni distinte*. In questo caso l' integrazione dell' equazione differenziale proposta può ricondursi con un' estrazione di radice quadrata e una quadratura (al più a quella di un'equazione differenziale lineare di 4° ordine del tipo:

$$y^{\mathrm{IV}} + p\,y'' + p'\,y' + q\,y = 0.$$

Roma, aprile 1899.