GINO FANO

Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **34** (1899), p. 388–409

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1899_1>

Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte;

Nota di GINO FANO.

1. — Abbiasi un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{1}$$

dove le p_i sono date funzioni della variabile (complessa) indipendente x, le quali definiranno un certo campo di razionalità R. Ponendo:

$$z = \mathrm{A}(y) \equiv a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

dove le a_i sono funzioni razionali dello stesso campo R, la z risulterà soluzione generale di una nuova equazione differenziale lineare omogenea:

$$q_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1} z' + q_n z = 0 \tag{2}$$

i cui coefficienti saranno pure funzioni razionali di R; e quest'ultima equazione sarà anch'essa di ordine n — e si potrà perciò supporre $q_0 = 1$ — ogni qual volta l'equazione (1) non abbia alcuna soluzione comune colla $\mathrm{A}(y) = 0$ (e inversamente) [1], in particolare dunque ogni qual volta la (1) stessa sia irriducibile [2]. Ad n soluzioni indipendenti $y_1, y_2, \ldots y_n$ della (1) cor-

[1] Cfr. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*; 2ten Bandes 1ter Th. (Berlin, 1897), p. 113-114.

[2] Questa irriducibilità s'intenderà qui sempre nel senso che l'equazione (1) non abbia soluzioni comuni con altre equazioni differenziali lineari

risponderanno allora altrettante soluzioni $z_i = \mathrm{A}(y_i)$ della (2) pure indipendenti.

Diremo col Sig. SCHLESINGER che l'equazione (2) ottenuta dalla (1) colla sostituzione $z = \mathrm{A}(y)$ *appartiene alla stessa specie* della (1) [1]. Se la (2) è anch'essa di ordine n, la relazione fra le equazioni (1) e (2) è reciproca, ossia la (1) può a sua volta ottenersi dalla (2) con una sostituzione:

$$y = \mathrm{B}(z) \equiv b_0 z + b_1 z' + \ldots + b_{n-1} z^{(n-1)}$$

dove le b_i sono pure funzioni razionali del campo R. Infatti, derivando la

$$z = \mathrm{A}(y) \equiv a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

successivamente $n-1$ volte, ed eliminando sempre la derivata $y^{(n)}$ per mezzo della (1), ci procureremo, oltre a questa, altre $n-1$ relazioni:

$$z^{(i)} = a_{i0} y + a_{i1} y' + \ldots + a_{i,n-1} y^{(n-1)} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

tali che il determinante complessivo $| \, a \, |$ non sarà identicamente nullo, come si deduce immediatamente dalla relazione:

$$\mathrm{D}(z_1 z_2 \ldots z_n) = | \, a \, | \, . \, \mathrm{D}(y_1 y_2 \ldots y_n) \ [2]$$

il cui primo membro si annullerebbe identicamente solo quando le z_i non fossero linearmente indipendenti. E da queste equazioni si ricava immediatamente l'espressione $y = \mathrm{B}(z)$ cercata.

---

di ordine inferiore a n, i cui coefficienti appartengano allo stesso campo di razionalità R. Perciò è necessario e sufficiente che il suo *gruppo di razionalità* (Cfr. PICARD, " Compt. Rend. ,, 1885; " Ann. de Toulouse ,, 1, 1887; VESSIOT, " Ann. Éc. Norm. Sup. ,, III, 9, 1892) non trasformi in sè stesso nessun sistema lineare di soluzioni y di dimensione inferiore a n (Cfr. BEKE, *Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen*, " Math. Annalen ,, 45, p. 278 e seg. [1894]).

[1] Op. e vol. cit., n. 165-166; cfr. in part. p. 124.

[2] Colla scrittura $\mathrm{D}(y_1 y_2 \ldots y_n)$ indichiamo, e indicheremo sempre in seguito, il determinante di ordine n formato colle funzioni y_i e le loro derivate fino all'ordine $n-1$ incluso.

In questo caso (ossia se anche la (2) è di ordine n) le equazioni (1) e (2) hanno lo stesso *gruppo di razionalità* [1]. Di più, se la (1), pur non avendo soluzioni comuni colla $A(y) = 0$, è riducibile, e ammette perciò tutte le soluzioni di un'altra equazione differenziale lineare di ordine $\leq n-1$ a coefficienti pure razionali in R, altrettanto dovrà avvenire per la (2).

2. — Supponiamo ora che la sostituzione $z = A(y)$ trasformi l'equazione (1) nella sua *aggiunta:*

$$z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n p_n z = 0 \tag{2'}$$

(e precisamente in quest'equazione, che è certo di ordine n, e non già, come potrebbe anche avvenire, in un'equazione differenziale di ordine inferiore, le cui soluzioni soddisfacciano tutte in pari tempo anche alla (2')). Diremo allora che l'equazione (1) *appartiene alla stessa specie della propria aggiunta;* e la relazione fra le due equazioni sarà ancora reciproca, la (1) essendo a sua volta aggiunta della (2'). — Indichiamo ancora con $z_1, z_2, \ldots z_n$ le n soluzioni indipendenti della (2') ottenute mediante la relazione $z = A(y)$ da un determinato sistema di soluzioni indipendenti $y_1, y_2, \ldots y_n$ della (1). Un secondo sistema di soluzioni indipendenti della (2'), diverso in generale dal precedente, sarà dato dalle funzioni:

$$u_i = \frac{(-1)^{n+i}}{D(y_1 y_2 \ldots y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_{i-1} & y_{i+1} & \ldots & y_n \\ y'_1 & \ldots & y'_{i-1} & y'_{i+1} & \ldots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

(il cui sistema si suole chiamare *aggiunto* del sistema delle y_i); e queste soluzioni saranno legate alle z_i da relazioni lineari a coefficienti costanti:

$$u_i = \sum_k c_{ik} z_k \tag{3}$$

dove il determinante $| c_{ik} |$ è diverso da zero.

---

(1) Schlesinger, Op. e vol. cit., p. 121.

Ora, immaginando sostituite in queste relazioni alle u_i e z_k le loro espressioni mediante le y_i e loro derivate, le relazioni stesse potranno considerarsi come equazioni contenenti razionalmente le stesse y_i e le loro derivate, insieme a funzioni razionali del campo R. *Ciascuna di esse continuerà perciò a sussistere quando alle soluzioni y_i si applichi una qualunque sostituzione del gruppo di razionalità dell'equazione* (1) [1].

D'altra parte, ogni operazione di questo gruppo è rappresentata da una sostituzione lineare:

$$\overline{y}_i = \sum_k \lambda_{ik} y_k \tag{4}$$

il cui determinante $\Lambda = | \lambda_{ik} |$ è diverso da zero ogni qual volta le $\overline{y}_i$ siano anche indipendenti. Le u_i subiscono allora la sostituzione lineare reciproca (o aggiunta):

$$\bar{u}_i = \sum_k \Lambda_{ik} u_k \tag{4'}$$

dove $\Lambda_{ik} = \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_k}$; mentre le z_i, in forza delle relazioni $z_i = A(y_i)$, si mantengono cogredienti alle y_i e loro derivate, e si ha perciò:

$$\overline{z}_i = \sum_k \lambda_{ik} z_k \tag{4''}$$

Potremo dire dunque che le equazioni (3) continuano a sussistere quando alle u e alle z si applichino contemporaneamente due sostituzioni (4') e (4'') corrispondenti a una stessa delle (4); esse rappresenteranno perciò una sostituzione lineare trasformata in sè stessa da ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione (1), mentre a sua volta ogni sostituzione (4) o (4'') sarà trasformata dalla (3) nella (4'), ossia nella propria aggiunta.

---

(1) SCHLESINGER, Op. e vol. cit., p. 74, 77. Più generalmente anzi, se le a_i fossero soltanto date funzioni qualunque della x, le relazioni (3) avrebbero carattere invariantivo per tutte quelle sostituzioni lineari delle y_i che risultassero contenute nel gruppo di razionalità dell' equazione (1) rispetto al campo di razionalità ottenuto coll' *aggiungere* ad R le funzioni a_i.

E poichè infine la forma bilineare $\sum_i u_i y_i$ si trasforma in sè stessa ogni qual volta alle y_i e alle u_i si applichino due sostituzioni lineari mutuamente aggiunte, così, sostituendo in essa alle u_i le loro espressioni date dalle (3), potremo concludere che la forma bilineare $\Sigma\, c_{ik}\, y_i\, z_k$ si conserverà inalterata ogni qual volta alle y e alle z si applichi una stessa sostituzione del gruppo di razionalità dell'equazione proposta. Diremo perciò:

Se l'equazione (1) *appartiene alla stessa specie della propria aggiunta, il suo gruppo di razionalità deve comporsi di sostituzioni trasformanti in sè una forma bilineare di determinante non nullo* [1].

Viceversa, supponiamo che il gruppo di razionalità dell'equazione (1) si componga di sostituzioni le quali trasformino in sè stessa una forma bilineare $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$, il cui determinante $|\, c_{ik}\,|$ sia diverso da zero. Ciascuna di queste sostituzioni sarà allora simile alla propria aggiunta [2], e verrà anzi trasformata in quest'ultima dalla sostituzione (3), definita dalla forma bilineare proposta (come pure dall'altra sostituzione che si ottiene dalla (3) scambiando gli indici i, k). Pertanto, se con $u_1, \dots u_n$ indichiamo le stesse soluzioni dell' equazione (2'), aggiunta della (1), dianzi definite, e con $z_1, \dots z_n$ le soluzioni pure indipendenti della stessa (2') che sono legate alle u_i dalle equazioni (3), ne segue che, quando le soluzioni y_i della (1) subiscono una qualunque sostituzione del gruppo di razionalità di questa equazione, e le u_i subiscono, in conseguenza, la sostituzione aggiunta, le z_i subiranno la sostituzione trasformata di questa aggiunta mediante l'inversa della (3), ossia ancora la stessa sostituzione delle y_i. *Le variabili y_i e z_i sono dunque cogredienti rispetto ad ogni operazione del gruppo di razionalità dell'equazione* (1).

---

(1) È noto che queste sostituzioni hanno tutte il determinante eguale a ± 1. Altre loro proprietà furono assegnate dal sig. Frobenius nella Memoria: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (" Journ. de Crelle ", 84, 1878).

(2) Cfr. ad es. la Mem. cit. di Frobenius, p. 34.

Ora, se noi poniamo

$$z_i = a_0 y_i + a_1 y'_i + \dots + a_{n-1} y_i^{(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

e ricaviamo da queste equazioni le a_k — il che è certo possibile, perchè il determinante dei loro coefficienti non è altro che $D(y_1\, y_2 \dots y_n)$, e quindi non identicamente nullo — abbiamo:

$$a_k = \frac{D_k}{D(y_1\, y_2 \dots y_n)}$$

dove D_k indica il determinante ottenuto da $D(y_1\, y_2 \dots y_n)$ sostituendo le z_i alle derivate $y_i^{(k)}$. Le a_k sono dunque funzioni differenziali razionali delle y_i (potendosi mediante queste esprimere le u_i e quindi anche le z_i), le quali rimangono inalterate per tutte quelle sostituzioni lineari delle y_i rispetto alle quali le z_i sono cogredienti alle stesse y_i; in particolare dunque esse si conserveranno inalterate (formalmente, e quindi anche come funzioni di x) per tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell' equazione (1). Esse sono perciò funzioni razionali del campo R, e *l'equazione* (2′) *aggiunta della* (1) *appartiene quindi alla stessa specie di quest'ultima.*

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

Perchè un'equazione differenziale lineare appartenga alla stessa specie della propria aggiunta è necessario e sufficiente che il suo gruppo di razionalità si componga di sostituzioni trasformanti in sè stessa una forma bilineare di determinante non nullo.

Si può anche aggiungere: *questa forma bilineare invariante deve annullarsi identicamente se in luogo delle due serie di variabili* (finora indeterminate) *si introducono le soluzioni y_i e z_i delle equazioni* (1) *e* (2′) *mutuamente aggiunte* (ossia quei due sistemi di soluzioni cogredienti, rispetto alle quali si è preso il loro comune gruppo di razionalità) [1]. *Essa si annulla pure se*

---

[1] A questo proposito è forse bene ricordare che un'equazione differenziale lineare determina di per sè soltanto il *tipo* del suo gruppo di razionalità; le relative sostituzioni dipendono poi (ove non si tratti del gruppo lineare totale, o di un suo sottogruppo invariante) dalle soluzioni y_i che si assumono come fondamentali. Variando queste soluzioni, si hanno gruppi in generale diversi, ma fra loro *simili.*

in luogo di queste soluzioni si introducono le loro derivate di due ordini qualunque p, q tali che $p + q \leq n - 2$.

Si ha infatti identicamente $\Sigma u_i y_i^{(p)} = 0$ $(0 \leq p \leq n - 2)$; e quindi, sostituendo alle u_i le loro espressioni date dalle (3):

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z_k \equiv 0$$

Da queste relazioni seguono tutte le altre, per derivazione successiva. Si ha infatti, derivando:

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p+1)} z_k + \Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z' \equiv 0 ;$$

e, se $p \leq n - 3$, è nulla la prima somma, e quindi la seconda. Analogamente, se $p \leq n - 4$, si deduce con una nuova derivazione:

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z'' \equiv 0$$

e così di seguito.

3. — Tra le forme bilineari $\Sigma c_{ik} \xi_i \eta_k$ sono particolarmente notevoli quelle *simmetriche* $(c_{ik} = c_{ki})$ e quelle alternanti $(c_{ik} = - c_{ki}$; $c_{ii} = 0)$; nel primo caso la forma proposta coincide colla coniugata $\Sigma c_{ki} \xi_i \eta_k$; nel secondo caso ne differisce soltanto per il segno. Quando la forma $\Sigma c_{ik} \xi_i \eta_k$ non si trova in alcuno di questi due casi, tutte le sostituzioni lineari che la trasformano in sè stessa lasciano inalterata anche la coniugata $\Sigma c_{ki} \xi_i \eta_k$, che ne è essenzialmente distinta; e quindi anche ogni forma del fascio:

$$\Sigma (c_{ik} + \lambda c_{ki}) \xi_i \eta_k$$

fra le quali una ed una sola è simmetrica $(\lambda = 1)$ ed una alternante $(\lambda = - 1)$ [1].

Pertanto, se un'equazione differenziale lineare appartiene alla stessa specie della propria aggiunta, potremo anche dire

[1] Le reciprocità dello spazio S_{n-1} rappresentate da queste infinite forme bilineari furono considerate dal sig. Segre nella Memoria: *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale*, " Mem. Acc. di Torino ", II, 37, 1885.

che le sostituzioni del suo gruppo di razionalità trasformano in sè:

o una forma bilineare simmetrica di determinante non nullo;

oppure una forma bilineare alternante di determinante non nullo (il che però è possibile soltanto quando il numero n delle variabili di ciascuna serie sia pari) (1).

oppure, in pari tempo, una forma bilineare simmetrica e una forma alternante di determinanti nulli.

Il verificarsi di una di queste tre condizioni è anche sufficiente perchè l'equazione differenziale proposta appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, purchè soltanto, nel terzo caso, si aggiunga la condizione che non siano però nulli i determinanti di tutte le forme del fascio determinato dalle due prime.

Di più, nel primo caso, se in luogo di ciascuna delle due serie di variabili si introducono nella forma simmetrica invariante le soluzioni y_i dell'equazione (1) — o anche le loro derivate di uno stesso ordine qualunque — la forma stessa, come funzione di x, risulterà ancora invariante per tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, e sarà perciò razionalmente nota (apparterrà cioè al campo R).

Altrettanto dicasi nel secondo caso, se in luogo delle due serie di variabili si introducono ad es. rispett. le funzioni y_i e le loro derivate prime. (Introducendo le stesse n quantità in luogo di ciascuna delle due serie di variabili, i varî termini si eliderebbero tutti a due a due).

Diremo pertanto:

Perchè un'equazione differenziale lineare appartenga alla stessa specie della propria aggiunta è necessario e sufficiente che sia invariante formalmente rispetto al suo gruppo di razionalità, e perciò anche razionalmente nota (2);

---

(1) Infatti il determinante di una forma bilineare alternante è *gobbo simmetrico*, e perciò identicamente nullo ogni qualvolta il suo ordine n sia dispari.

(2) Quando le forme che compaiono in quest' enunciato siano le sole razionalmente note, ne discende già come conseguenza anche la loro invarianza *formale*.

o una forma quadratica nelle soluzioni y_i, *a coefficienti costanti, e di discriminante non nullo;*

oppure una forma bilineare alternante nelle y_i *e loro derivate prime, pure a coefficienti costanti e di determinante non nullo.* Questo caso non può presentarsi tuttavia che per equazioni differenziali di ordine pari;

ovvero, in pari tempo, una forma del primo e una del secondo tipo, i cui determinanti siano entrambi nulli, ma tali che non siano però nulli i determinanti di tutte le forme del fascio determinato dalla seconda e dalla forma polare [derivata rispetto a x] *della prima* (1).

A questo risultato può anche darsi forma geometrica, interpretando le sostituzioni lineari delle n variabili y_i come collineazioni di uno spazio S_{n-1}. Diremo allora:

Perchè un'equazione differenziale lineare di ordine n appartenga alla stessa specie della propria aggiunta è necessario e sufficiente che le operazioni del suo gruppo di razionalità si rappresentino mediante collineazioni dello spazio S_{n-1} *permutabili a una stessa reciprocità non degenere, e trasformanti perciò in sè:*

una quadrica non degenere di questo spazio;

ovvero (se n è numero pari) *un complesso lineare non degenere di rette;*

ovvero anche, in pari tempo, una quadrica-luogo e un complesso lineare di rette entrambi degeneri, ma tali che le relative polarità determinino un fascio di reciprocità non tutte degeneri.

A questo va ancora aggiunta la condizione (che sarà d'ora in poi sottintesa negli enunciati geometrici) che le sostituzioni del gruppo di razionalità trasformino in sè non soltanto le equa-

(1) Un esempio di equazione differenziale lineare appartenente alla stessa specie della propria aggiunta ci è dato dalla m^{sima} associata di un'equazione differenziale lineare di ordine pari $2m$, il cui gruppo di razionalità si componga di sostituzioni unimodulari (Schlesinger, op. e vol. cit., p. 157). E infatti le soluzioni di questa m^{sima} associata verificano una relazione quadratica omogenea a coefficienti costanti e di discriminante non nullo (op. e vol. cit., equazione (21) a p. 142), il cui primo membro è invariante rispetto a tutte le operazioni del corrispondente gruppo di razionalità.

zioni dei varî enti considerati, ma anche i primi membri di queste equazioni (riproducano cioè queste equazioni tali e quali, e non già moltiplicate eventualmente per qualche fattore).

Quando si verifichi l'ultima di queste tre ipotesi, il gruppo di collineazioni ottenuto in S_{n-1} ammette certo degli spazî minori uniti fissi, e l'equazione differenziale proposta è perciò riducibile.

Perchè dunque un'equazione differenziale lineare IRRIDUCIBILE *di ordine n appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, è necessario e sufficiente che il suo gruppo di razionalità si componga di sostituzioni trasformanti in sè una forma bilineare simmetrica o alternante di determinante non nullo, e si rappresenti perciò in* S_{n-1} *mediante un gruppo di collineazioni le quali trasformino in sè una quadrica non degenere, ovvero* (se n è numero pari) *un complesso lineare di rette, anche non degenere.*

4. — Vogliamo ora occuparci del caso in cui una delle due equazioni (1) e (2′) mutuamente aggiunte si trasforma nell'altra con una sostituzione $z = A(y)$ ovvero $y = B(z)$ nella quale le derivate di y o z compaiono soltanto fino a un certo ordine $< n - 1$.

Supponiamo ad es. che l'equazione (2′) si trasformi nella (1) colla sostituzione:

$$y = B(z) = b_0 z + b_1 z' + \dots + b_{n-h-1}\, z^{(n-h-1)}$$

nella quale (le b_i essendo sempre funzioni razionali del campo R) mancano i termini contenenti le derivate di z da un certo ordine $n - h$ $(h > 0)$ in poi. — Le equazioni (1) e (2′) apparterranno naturalmente alla stessa specie, e perciò il loro comune gruppo di razionalità si comporrà di sostituzioni trasformanti in sè una forma bilineare $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ di determinante $| c_{ik} | \neq 0$. Di più, questa forma dovrà annullarsi identicamente quando in luogo delle sue due serie di variabili si introducano le soluzioni distinte y_i e z_k (opportunamente scelte) delle equazioni (1) e (2′), ovvero anche le loro derivate di due ordini qualunque p, q, tali che sia $p + q \leq n - 2$.

Ciò premesso, dalla relazione $y_i = B(z_i)$ ricaviamo immediatamente:

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p)} y_k \equiv b_0 \Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z_k + b_1 \Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z'_k + \dots + b_{n-h-1} \Sigma c_{ik} y_i^{(p)} z_k^{(n-h-1)}$$

e quest'espressione sarà perciò identicamente nulla ogni qual volta sia

$$p + n - h - 1 \leq n - 2 \qquad \text{ossia} \qquad p \leq h - 1.$$

E dalle relazioni:

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p)} y_k \equiv 0 \qquad\qquad (p \leq h - 1)$$

si deduce ancora, con successive derivazioni:

$$\Sigma c_{ik} y_i^{(p)} y_k^{(q)} \equiv 0. \qquad\qquad (p + q \leq h - 1)$$

Viceversa, supponiamo che l'equazione differenziale (1) ammetta n soluzioni distinte y_i soddisfacenti a queste relazioni, dove le c_{ik} sono costanti tali che il determinante $| c_{ik} |$ sia diverso da zero; e la forma bilineare di coefficienti c_{ik} sia anzi invariante (formalmente) rispetto a tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1) [1]. La (1) apparterrà allora alla stessa specie della sua aggiunta (2'); e quest'ultima ammetterà n soluzioni distinte z_k legate alle y_k da relazioni del tipo:

$$y_k = b_0 z_k + b_1 z'_k + \dots + b_{n-1} z_k^{(n-1)}$$

dove le b sono funzioni razionali del campo R, e legate altresì alle u_i definite al n° 2 dalle equazioni $u_i = \sum\limits_k c_{ik} z_k$. Ciò posto, se $h > 0$, la relazione:

$$\Sigma c_{ik} y_i y_k \equiv 0$$

(1) Quest'ultima proprietà sarà tuttavia conseguenza delle precedenti, se fra le y_i e loro derivate non passano altre relazioni bilineari, all'infuori di quelle di cui si è già supposta l'esistenza.

dà:

$$b_0 \Sigma c_{ik} y_i z_k + \ldots + b_{n-2} \Sigma c_{ik} y_i z^{(n-2)} + b_{n-1} \Sigma c_{ik} y_i z_k^{(n-1)} \equiv 0$$

e quindi:

$$b_{n-1} \Sigma c_{ik}\, y_i\, z_k^{(n-1)} \equiv 0$$

ossia $b_{n-1} = 0$, perchè quest'ultima somma è uguale a $\Sigma y_i\, u_i^{(n-1)}$ e quindi $=(-1)^{n-1}$ (¹). Allora, se $h > 1$, dalla relazione successiva:

$$\Sigma c_{ik}\, y_i'\, y_k \equiv 0$$

si deduce:

$$b_0 \Sigma c_{ik} y_i'\, z_k + \ldots + b_{n-2} \Sigma c_{ik} y_i'\, z_k^{(n-2)} \equiv 0$$

e quindi:

$$b_{n-2} \Sigma c_{ik}\, y_i'\, z_k^{(n-2)} \equiv 0$$

ossia $b_{n-2} = 0$, perchè quest'ultima somma deve essere eguale ed opposta alla $\Sigma c_{ik}\, y_i\, z_k^{(n-1)}$ (come si deduce subito derivando la $\Sigma c_{ik}\, y_i\, z_k^{(n-2)} \equiv 0$). Così continuando, si trova che sono identicamente nulle tutte le b di indice $\geq n - h$. Concludiamo perciò:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione differenziale lineare di ordine n appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, in guisa precisamente che quest'ultima si trasformi nella prima con una sostituzione razionale:

$$y = b_0 z + b_1 z' + \ldots + b_{n-h-1}\, z^{(n-h-1)} \qquad (h \geq 0)$$

è che le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione proposta trasformino in sè una forma bilineare di determinante non nullo; e che questa forma bilineare (se $h > 0$) *si annulli identicamente quando alle due serie di variabili si sostituiscono le derivate di n soluzioni distinte, opportunamente scelte, della stessa equazione proposta, di due ordini qualunque p, q* (≥ 0) *tali che sia* $p + q \leq h - 1$.

Se nella sostituzione considerata si ha $b_{n-h-1} \neq 0$, questa forma bilineare non potrà più annullarsi quando vi si introducano

(¹) Cfr. ad es. SCHLESINGER, op. cit., vol. I, p. 63.

le derivate di quelle stesse soluzioni di due ordini p, q tali che sia $p+q=h$. E, supposto sempre $b_{n-h-1} \neq 0$, si può ancora aggiungere che il numero h *sarà pari ogni qual volta la sostituzione* $y=\mathrm{B}(z)$ *considerata si riferisca ad una forma bilineare invariante simmetrica* (sia cioè simmetrica la sostituzione che muta le soluzioni z_i nelle u_i, formanti il sistema aggiunto delle y_i); *e sarà invece dispari* (e perciò certo >0) *ogni qual volta la sostituzione* $y=\mathrm{B}(z)$ *si riferisca a una forma bilineare alternante* (il che può avvenire soltanto se n è numero pari).

Supposto infatti h dispari e $=2r+1$, si avrà:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(r)}\, y_k^{(r)} \equiv 0.$$

Di qui, se $c_{ik}=c_{ki}$, derivando e dividendo per 2, si deduce:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(r+1)}\, y_k^{(r)} \equiv 0\,;$$

e si avranno perciò anche tutte le altre relazioni:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(p)}\, y_k^{(q)} \equiv 0 \qquad\qquad (p+q=2r+1)$$

le quali richiedono sia $b_{n-h-1} \equiv 0$, contro l'ipotesi. Essendo pertanto in questo caso h numero pari, potremo dire, adottando una denominazione già usata da HALPHEN [1], che l'equazione differenziale proposta ha rispetto alla forma bilineare simmetrica invariante (ovvero rispetto alla forma quadratica di cui questa è polare) il *rango* $\frac{h}{2}$. Questo numero rappresenta il minimo valore comune di p e q per cui la funzione $\Sigma c_{ik}\, y_i^{(p)}\, y_k^{(q)}$ non è identicamente nulla.

Analogamente, se h è pari e $=2r$, si ha:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(r)}\, y_k^{(r-1)} \equiv 0\,;$$

e quindi, se questa forma è alternante, derivando:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(r+1)}\, y_k^{(r-1)} \equiv 0\,;$$

---

[1] Cfr. la Nota: *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires* (“ Compt. Rend. „, CI, 1885, p. 664-66).

e per conseguenza:

$$\Sigma\, c_{ik}\, y_i^p\, y_k^q \equiv 0 \qquad\qquad (p + q = 2r)$$

e perciò ancora $b_{n-h-1} \equiv 0$. Per analogia, potremo dire che l'equazione differenziale proposta ha rispetto a questa forma bilineare alternante il *rango* $\frac{h-1}{2}$.

Se invece si tratta di una forma bilineare non simmetrica nè alternante, il numero h potrà essere tanto pari quanto dispari. In questo caso però i due sistemi di funzioni $y_i^{(p)}$, $y_i^{(q)}$, finchè $p + q \leq h - 1$, annulleranno in pari tempo due distinte forme bilineari fra loro coniugate (riducendosi il passaggio dall' una all'altra delle relative espressioni al solo scambio dei due indici p e q), e quindi anche tutte le forme del fascio da quelle determinato. Anzi, la (sola) forma simmetrica di questo fascio si annullerà altresì per $p + q = h$ quando h sia numero dispari, e lo stesso avverrà invece per la forma alternante del fascio quando h sia numero pari (1). Il rango dell'equazione differenziale proposta rispetto a queste due forme particolari sarà perciò rispett. $\geq \frac{h+1}{2}$ e $= \frac{h-1}{2}$ se h è dispari, e $= \frac{h}{2}$ e $\geq \frac{h}{2}$ se h è pari. — Viceversa, se sono soddisfatte queste condizioni per certe due forme bilineari invarianti, l'una simmetrica e l'altra alternante, queste stesse forme determineranno tutto un fascio di forme pure invarianti, le quali, quando vi si introducano le $y_i^{(p)}$ e $y_i^{(q)}$, si annulleranno identicamente finchè $p + q \leq h - 1$, ma non più (tutte) se $p + q = h$.

Tenendo conto pertanto di queste ultime considerazioni, possiamo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione differenziale lineare di ordine n appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, in guisa precisamente che quest' ultima possa trasformarsi nella prima con una sostituzione razionale:

$$y = b_0 z + b_1 z' + \ldots + b_{n-h-1}\, z^{(n-h-1)} \qquad (h \geq 0;\, b_{n-h-1} \neq 0);$$

---

(1) Ciò si vede immediatamente, derivando nel primo caso la relazione $\Sigma\,(c_{ik} + c_{ki})\, y_i^{\left(\frac{h-1}{2}\right)}\, y_k^{\left(\frac{h-1}{2}\right)} \equiv 0$, e nel secondo caso la relazione $\Sigma\,(c_{ik} - c_{ki})\, y_i^{\left(\frac{h}{2}\right)}\, y_k^{\left(\frac{h-2}{2}\right)} \equiv 0$.

è che sia formalmente invariante rispetto al suo gruppo di razionalità:

o una forma quadratica a coefficienti costanti e di discriminante non nullo fra n soluzioni distinte y_i, rispetto alla qual forma l'equazione proposta abbia il rango $\frac{h}{2}$ (il numero h essendo pertanto pari):

oppure una forma bilineare alternante nelle soluzioni y_i e loro derivate prime, pure a coefficienti costanti e di determinante non nullo, rispetto alla quale l'equazione proposta abbia rango $\frac{h-1}{2}$ (il numero h essendo dispari, e n pari);

oppure, in pari tempo, una forma del primo e una del secondo tipo, di determinanti anche nulli, purchè non siano tali tutti quelli del fascio di forme determinato dalla seconda di esse e dalla polare della prima; essendo inoltre il rango dell'equazione proposta rispetto a queste due forme rispett. $= \frac{h}{2}$ *e* $\geq \frac{h}{2}$ *ovvero* $\geq \frac{h+1}{2}$ *e* $= \frac{h-1}{2}$, *secondo che h è numero pari o dispari.*

Si potrebbe aggiungere qualche altra osservazione relativamente al caso di un'equazione differenziale lineare *irriducibile*; ma non si può dare anche qui un enunciato preciso come alla fine del n° prec., perchè il gruppo di razionalità dell'equazione proposta, pur trasformando in sè una forma bilineare simmetrica od alternante di determinante non nullo, può anche trasformarne in sè qualche altra, pure di determinante non nullo, ma non simmetrica nè alternante; e questa forma condurrebbe allora a una sostituzione $y = \mathrm{B}(z)$ corrispondente alla terza ipotesi (la quale restava invece esclusa nell'ultimo enunciato del n° 3).

Ricordando però che le forme bilineari alternanti fra due serie di un numero *dispari* di variabili hanno tutte il determinante nullo, potremo dire:

Perchè un'equazione differenziale lineare irriducibile di ordine n dispari appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, è necessario e sufficiente che sia formalmente invariante rispetto al suo gruppo di razionalità, e perciò razionalmente nota, una forma quadratica a coefficienti costanti e di discriminante non nullo fra n sue soluzioni distinte; e perchè sia r il rango dell'equazione stessa rispetto a questa forma, è ancora necessario e sufficiente che *l'equazione aggiunta della proposta si trasformi in quest'ultima con una sostituzione razionale* $y = b_0 z + b_1 z' \dots + b_{n-2r-1}\, z^{(n-2r-1)}$ *in cui* $b_{n-2r-1} \neq 0$.

5. Anche questi ultimi risultati si possono facilmente presentare sotto forma geometrica.

Interpretiamo perciò le soluzioni $y_i(x)$ dell'equazione (1) come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio S_{n-1}. Questo punto (y), al variare della x, descriverà una curva γ *appartenente* al detto spazio [1]; quella curva che HALPHEN in varî lavori ha chiamata *attachée* all' equazione differenziale (1), e che noi potremo chiamare *curva integrale* dell'equazione stessa. Le u_i potranno allora assumersi come coordinate dell'iperpiano (S_{n-2}) osculatore a γ nel punto (y) [2].

Sia ancora $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ la forma bilineare (di determinante non nullo) che si suppone invariante rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo di razionalità dell'equazione (1); e indichiamo con T la reciprocità dello spazio S_{n-1} rappresentata analiticamente dall'annullarsi di questa forma (ove si interpretino anche le ξ e η come coordinate di punto nel detto spazio). Dire che si ha identicamente $\Sigma\, c_{ik}\, y_i^{(p)}\, y_k^{(q)} \equiv 0$ per $p + q \leq h - 1$ $(h > 0)$, in particolare dunque per $p, q \leq \left[\frac{h-1}{2}\right]$ — col qual simbolo indichiamo il minimo intero contenuto in $\frac{h-1}{2}$ —, è lo stesso che dire che i punti $(y), (y') \dots \left(y^{\left[\frac{h-1}{2}\right]}\right)$ sono a due a due reciproci in T (e nella sua inversa), e ciascuno anche reciproco di sè stesso; e anzi, se h è numero pari, sono anche tutti reciproci di $\left(y^{\left(\frac{h}{2}\right)}\right)$. Lo spazio determinato da quei punti, ossia lo spazio $S_{\left[\frac{h-1}{2}\right]}$ osculatore a γ nel punto (y), dovrà perciò appartenere allo spazio $S_{n-2-\left[\frac{h-1}{2}\right]}$ che gli corrisponde in T; e, se h è numero pari, quest'ultimo spazio conterrà anche l' $S_{\frac{h}{2}}$ osculatore a γ nello

---

[1] Non contenuta cioè in uno spazio inferiore.

[2] Cfr. ad esempio SCHLESINGER, op. cit., vol. II, p. 135. Ciò segue d'altronde immediatamente dalle espressioni delle u_i date al n° 2.

stesso punto (y). Quest'ultima condizione è però conseguenza delle precedenti ogni qual volta la forma $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ sia simmetrica.

Diremo pertanto:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione differenziale lineare di ordine n appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, in guisa che quest'ultima si trasformi in quella con una sostituzione razionale:

$$y = b_0 z + b_1 z' + \ldots + b_{n-h-1}\, z^{(n-h-1)} \qquad (h \geq 0)$$

è che il gruppo di razionalità dell'equazione proposta si rappresenti in S_{n-1} *mediante un gruppo di collineazioni permutabili a una stessa reciprocità non degenere* (colla condizione ulteriore di cui al n° 3); *che, se* $h > 0$, *tutti gli* $S_{\left[\frac{h-1}{2}\right]}$ *osculatori alla curva integrale dell'equazione stessa appartengano rispett. agli spazi loro corrispondenti nella detta reciprocità; e che infine, se h è numero pari, questi ultimi spazi contengano rispett. anche i singoli* $S_{\frac{h}{2}}$ *osculatori a quella stessa curva integrale.*

Ora, in una reciprocità non nulla, gli spazî che sono contenuti nei loro omologhi stanno altresì sulla quadrica, luogo dei punti che appartengono agli iperpiani corrispondenti. Ove si tratti invece di una reciprocità nulla, quegli stessi spazî godono della proprietà che tutte le loro rette appartengono al complesso lineare che definisce la correlazione [1].

Perchè dunque l'equazione (2') aggiunta della (1) si trasformi in quest'ultima mediante la sostituzione sopra indicata, essendo $b_{n-h-1} \neq 0$, sarà necessario e sufficiente che il gruppo di razionalità della (1) stessa si rappresenti in S_{n-1} mediante un gruppo di collineazioni, le quali trasformino in sè:

o una quadrica non degenere di S_{n-1}; *il numero h essendo allora pari, ed essendo altresì la curva integrale dell' equazione proposta contenuta in questa quadrica* (per $h > 0$) *con tutti i suoi* $S_{\frac{h-2}{2}}$ *(ma non cogli* $S_{\frac{h}{2}}$*) osculatori;*

---

(1) Queste proprietà sono anche invertibili, se la quadrica e il complesso lineare considerati non sono degeneri.

oppure un complesso lineare non degenere di rette, essendo allora n *pari e* h *dispari, ed essendo altresì contenute nel detto complesso lineare (per* $h \geq 3$*) tutte le rette degli* $S_{\frac{h-1}{2}}$ *(ma non degli* $S_{\frac{h+1}{2}}$*) osculatori alla curva integrale dell'equazione* (1);

ovvero, in pari tempo, una quadrica e un complesso lineare di rette, eventualmente anche degeneri, ma tali che le relative polarità determinino un fascio di reciprocità non tutte degeneri; essendo inoltre la curva integrale dell'equazione (1) *contenuta nella detta quadrica invariante* (se $h > 0$) *insieme ai suoi* $S_{\left[\frac{h-1}{2}\right]}$ *osculatori, e le rette degli* $S_{\left[\frac{h}{2}\right]}$ *osculatori* ($h > 1$) *essendo altresì contenute nel complesso lineare invariante, senza che la prima di queste due proprietà se* h *è numero pari e la seconda se* h *è dispari si verifichi per gli spazî osculatori immediatamente successivi.*

6. — Le considerazioni degli ultimi due n[i] possono applicarsi in particolare al caso $h = n - 1$, al caso cioè in cui le equazioni (1) e (2') mutuamente aggiunte abbiano le stesse soluzioni, a meno eventualmente di un medesimo fattore (funzione razionale del campo R) (1). Mandando anzi a zero il coefficiente di $y^{(n-1)}$ nell'equazione (1), mediante la sostituzione $y = \bar{y}\, e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$, ci procureremo una nuova equazione:

$$\bar{y}^{(n)} + \bar{p}_2 \bar{y}^{(n-2)} + \dots + \bar{p}_n \bar{y} = 0 \qquad (1')$$

i cui coefficienti saranno ancora funzioni razionali del campo R, e che dovrà pure godere della stessa proprietà di cui godeva la (1); anzi questa nuova equazione *coinciderà addirittura colla propria aggiunta,* dovendo anche quest'ultima esser priva del 2° termine.

Se indichiamo pertanto con $y_1, \dots y_n$ un sistema qualunque di soluzioni distinte dell'equazione (1'), e con $u_1, \dots u_n$ il sistema

(1) E si verificherebbe facilmente che questo fattore risulta $= e^{\frac{2}{n}\int p_1 dx}$. Perchè esso sia razionale, occorre che p_1 sia derivata logaritmica della potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{sima}}$ di una funzione razionale.

aggiunto di questo (il quale sarà un secondo sistema di soluzioni distinte della stessa equazione), le u_i dovranno risultare funzioni lineari a coefficienti costanti delle y_i:

$$u_i = \sum_k c_{ik} y_k ;$$

il determinante $| c_{ik} |$ essendo diverso da zero. Riferendoci pertanto alla curva integrale γ dell'equazione (1′) rispetto alle soluzioni y_i (la quale sarebbe d'altronde curva integrale anche della (1)), vediamo che ogni punto (y) di essa corrisponde al relativo iperpiano osculatore in una determinata reciprocità non degenere. E questa reciprocità sarà anzi certamente involutoria, perchè a un punto di γ, considerato come intersezione di n iperpiani osculatori consecutivi, corrisponde ancora il relativo iperpiano osculatore, come congiungente n punti consecutivi di γ stessa.

La forma bilineare invariante $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ è dunque in questo caso simmetrica o alternante (come si potrebbe verificare facilmente anche per via analitica). Anzi, poichè il numero h da noi considerato al n° 4, e che qui (ove si richieda $b_{n-h-1} \neq 0$) risulta $= n - 1$, deve essere pari in tutti i casi in cui la forma bilineare invariante $\Sigma\, c_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ sia simmetrica, e dispari quando essa sia alternante, è chiaro che questa stessa forma dovrà ora essere simmetrica o alternante secondo che n sarà dispari o pari. Ciò va anche d'accordo col fatto che, per n dispari, essa non potrebbe essere alternante senza che si annullasse il suo determinante (1).

Concludiamo pertanto:

Perchè un'equazione differenziale lineare di ordine n coincida colla propria aggiunta (a meno eventualmente di un fattore razionale comune a tutte le soluzioni) *è necessario e sufficiente che*

---

(1) E, per n pari, si può anche osservare che la reciprocità involutoria di cui si tratta non potrebbe essere una polarità rispetto a una quadrica di S_{n-1}, perchè questa quadrica dovrebbe venir segata dagli $S_{\frac{n}{2}}$ osculatori a γ secondo i corrispondenti $S_{\frac{n-2}{2}}$ osculatori contati due volte, e ciò non può avvenire ove la quadrica stessa non sia degenere.

sia invariante rispetto a tutte le operazioni del suo gruppo di razionalità;

se n è numero dispari, una forma quadratica a coefficienti costanti e di determinante non nullo, rispetto alla quale l'equazione proposta abbia rango (massimo) $\frac{n-1}{2}$; vale a dire questa forma si annulli identicamente quando alle variabili si sostituiscano n soluzioni distinte, opportunamente scelte, dell'equazione proposta, ovvero anche le loro derivate di uno stesso ordine qualunque $< \frac{n-1}{2}$;

se n è numero pari, una forma bilineare alternante a coefficienti costanti e di determinante non nullo, rispetto alla quale l'equazione proposta abbia rango $\frac{n-2}{2}$; vale a dire questa forma si annulli identicamente quando alle sue due serie di variabili si sostituiscono rispett. n soluzioni distinte, opportunamente scelte, dell'equazione proposta e le derivate prime di queste soluzioni; ovvero anche le derivate di queste stesse soluzioni di due ordini consecutivi p e $p+1$ tali che sia $p < \frac{n-2}{2}$.

A queste stesse condizioni può anche darsi forma geometrica dicendo che *il gruppo di razionalità dell'equazione proposta deve rappresentarsi in S_{n-1} mediante un gruppo di collineazioni trasformanti in sè:*

se n è dispari, una quadrica non degenere, sulla quale deve stare altresì la curva γ con tutti i suoi $S_{\frac{n-1}{2}}$ osculatori:

se n è pari, un complesso lineare di rette, pure non degenere, al quale devono appartenere tutte le rette contenute negli $S_{\frac{n-2}{2}}$ osculatori a γ.

Nel caso di n dispari, la sufficienza di queste condizioni (sotto forma analitica) fu già sostanzialmente enunciata, benchè non dimostrata, da HALPHEN [1]; la loro necessità fu invece dimostrata dal sig. DARBOUX [2], il quale ha anche osservato che, determinando opportunamente i coefficienti della forma quadratica invariante $\chi(y)$, i due sistemi di soluzioni y_i, u_i, in questo

(1) Cfr. la Nota citata dei " Compt. Rend. ", CI.

(2) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II, p. 115.

caso mutuamente aggiunti, risultano legati dalle relazioni $u_i = \frac{\partial \chi}{\partial y_i}$. E questa è appunto la relazione di polarità rispetto alla quadrica $\chi(y) = 0$.

Invece il risultato qui ottenuto per il caso di n pari ritengo non si sia presentato finora ad altri [1].

Per $n = 3$ pertanto la curva (piana) γ sarà essa stessa una conica [2]. Per $n = 4$ la curva γ apparterrà allo spazio S_3 e avrà le sue tangenti contenute in un complesso lineare (necessariamente non speciale) [3]. Per $n = 5$ si ha l'equazione seconda associata di un'equazione differenziale lineare del 4° ordine appartenente al caso testè considerato; infatti la curva γ, dovendo stare colle sue tangenti in una quadrica non degenere di S_4, può rappresentarsi mediante una rigata sviluppabile di S_3 contenuta in un complesso lineare non speciale.

Osserviamo infine che quest'ultimo teorema, limitatamente alla necessità della condizione in esso contemplata, può anche enunciarsi dicendo: *Se un'equazione differenziale lineare di ordine n coincide colla propria aggiunta* (a meno eventualmente di un fattore comune a tutte le soluzioni), *i punti di una qualunque sua curva integrale corrisponderanno ai relativi iperpiani osculatori in una reciprocità involutoria, la quale sarà una polarità rispetto a una quadrica ovvero un sistema nullo, secondo che n è numero dispari o pari* (e quindi secondo che è pari o dispari lo spazio S_{n-1} di questa curva) [4].

---

(1) Le forme differenziali lineari che coincidono colle proprie aggiunte (a meno del segno, se di ordine dispari) possono anche mettersi sotto forme notevoli, dovute a Jacobi (" Journ. de Crelle ", 17, p. 71) per il caso dell'ordine pari, e a Darboux (l. c., p. 120-21) per il caso dell'ordine dispari. Cfr. anche Schlesinger, Op. cit., vol. I, n° 25.

(2) Caso già considerato dal sig. Fuchs nella Memoria: *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen...* (" Acta Math. ", I, 1881), e, successivamente, da parecchi altri.

(3) Questo caso fu considerato da Halphen nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (" Acta Math. ", III, 1883, p. 343 e seg.).

(4) Essendo questo teorema invertibile, e osservando d'altra parte che ogni curva appartenente a uno spazio S_{n-1} può considerarsi come curva integrale di un'equazione differenziale lineare di ordine n, possiamo anche trarre quest' altra conclusione: *sopra una quadrica non degenere di uno*

Ora il compianto Prof. Brioschi ha dimostrato [1] che le equazioni differenziali lineari coincidenti colle proprie aggiunte sono quelle e quelle sole per cui si annullano gli invarianti lineari a_ν di Forsyth ($\nu = 3, 4 \ldots n$) [2] di indice ν dispari [3]. — Che se poi sono nulli anche gli invarianti di indice pari, l'integrale generale dell'equazione proposta è dato da una forma binaria di grado $n-1$ a coefficienti costanti nelle soluzioni ξ_1, ξ_2 di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine che può formarsi razionalmente [4], e la curva γ è allora una curva algebrica razionale normale di ordine $n-1$ (e inversamente) [5]. L'ultimo enunciato sarà dunque applicabile in particolare a questo caso, e coincide allora con un noto teorema di Clifford [6].

Roma, febbraio 1899.

---

spazio dispari non esistono curve appartenenti allo spazio stesso e osculate in ogni loro punto dall'iperpiano tangente a questa quadrica (proposizione che potrebbe stabilirsi anche per altra via). A quest'ultima condizione dovrebbero soddisfare in S_3 le asintotiche di una quadrica; ma esse sono rette, e non appartengono perciò appunto a S_3.

(1) Cfr. la Mem.: *Les invariants des équations différentielles linéaires* (" Acta Math. ", 14, 1890-91, p. 237).

(2) " Phil. Trans. ", 179, 1888.

(3) Cfr. anche Schlesinger, Op. cit., vol. II, p. 197, 224.

(4) Brioschi, l. c.; Schlesinger, Op. cit., vol. II, p. 205.

(5) Schlesinger, l. c., p. 206, 216. Questa proprietà fu stabilita per la prima volta dal sig. Wallenberg (" Journ. de Crelle ", 113).

(6) *On the classification of loci* (" Phil. Trans. ", 169, 1878, p. 668-69).

L'Accademico Segretario
Andrea Naccari.