Gino Fano

Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie V, Vol. **71** (1898), p. 302–308

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1898_5>

Matematica. — *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nel 3° vol. della *Theorie der Transformationsgruppen* del sig Lie (Abth. II, Kap. 7, 8) sono determinati i varî tipi a cui possono ridursi, mediante trasformazioni puntuali arbitrarie, tutti i gruppi continui primitivi di trasformazioni puntuali dello spazio, ed alcune categorie di gruppi imprimitivi di queste stesse trasformazioni. D' altra parte, in una Memoria comune del sig. Enriques e mia (1) e in due miei lavori successivi (2) è stata data una classificazione completa dei gruppi continui di trasformazioni *cremoniane* dello spazio (dal punto di vista delle trasformazioni stesse); sono stati cioè determinati i tipi a cui questi ultimi gruppi possono ridursi, mediante trasformazioni anche cremoniane (birazionali). Fra i risultati di queste due ricerche deve passare evidentemente la relazione seguente: *Quei gruppi tipici di trasformazioni puntuali che si compongono* (come avviene per la maggior parte di quelli trovati dal sig. Lie) *di trasformazioni cremoniane, devono anche comparire fra i gruppi tipici di queste ultime trasformazioni; ma ad essi possono aggiungersene, in tal caso, degli altri* (birazionalmente distinti dai primi, ma riducibili ad essi, o a qualcuno degli altri tipi di gruppi puntuali, con trasformazioni non cremoniane).

Quanto ai gruppi primitivi, fu già mostrato in uno dei miei lavori cit. (3), che i gruppi tipici di trasformazioni puntuali trovati dal sig. Lie (che sono soltanto gruppi proiettivi, più il gruppo ∞^{10} di tutte le trasformazioni conformi) si incontrano pure nella classificazione dei gruppi cremoniani; e che in quest' ultima classificazione compare altresì *un* gruppo tipico ulteriore — il gruppo ∞^6 delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera di raggio non nullo —, il quale può ridursi con una trasformazione $(2, 1)$ (razionale in un senso solo) al gruppo delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa una quadrica non degenere.

Avendo ora completata (4) anche la classificazione dei gruppi imprimitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, credo opportuno mettere in relazione i risultati da me ottenuti in proposito con quelli del sig. Lie sui gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali. Vedremo così di quali trasfor-

(1) Annali di Matem., s. 2ª, t. 26 (1897).

(2) Atti della R. Acc. di Torino, vol. 33° (1898); nonchè la Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati,* che trovasi in corso di stampa presso la stessa Accademia.

(3) Atti della R. Acc. di Torino, vol 33°. Cfr. anche la Memoria cit. del sig. Enriques e mia, § 6.

(4) Nella Mem. cit., *I gruppi di Jonquières generalizzati.*

mazioni geometriche si compongano i gruppi tipici del sig. Lie, pei quali l'illustre Autore si è limitato ad assegnare le trasformazioni infinitesime generatrici; e vedremo pure come alcuni di questi gruppi siano o possano ridursi a sottogruppi dei rimanenti.

2. Il sig. Lie esaurisce la determinazione dei gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio nei due casi seguenti:

I. Gruppi che trasformano in sè un sistema ∞^1 di superficie, e subordinano sopra ciascuna superficie del sistema un gruppo primitivo;

II. Gruppi che trasformano in sè una congruenza di linee, e operano in modo primitivo sopra questa congruenza.

Nel primo caso egli trova 12 tipi diversi, che distingue coi numeri progressivi [1]...[12] dei §§ 38-40. E a questa stessa condizione I soddisfanno, fra i gruppi cremoniani tipici da me incontrati, soltanto i due seguenti, con alcuni loro sottogruppi (1):

1°. *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *delle quadriche passanti per una retta fissa* (asse di un fascio invariante di piani) *e per un punto fisso fuori di questa retta* (centro di una stella invariante di rette e piani).

2°. *Gruppo* ∞^{2n+9} *delle trasformazioni di ordine* $n\,(\geq 1)$ *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{n+2} *dei coni di ordine n aventi una data generatrice* $(n-1)^{\text{pla}}$ *e gli stessi* $n-1$ *piani tangenti lungo questa generatrice.* La detta generatrice è asse di un fascio invariante di piani; e ogni punto di essa è vertice di ∞^{n+1} coni di quel sistema.

Ora, il primo di questi gruppi tipici (completi) coincide col gruppo [10] del sig. Lie (op. e vol. cit., p. 153) determinato dalle trasformazioni infinitesime (in coordinate cartesiane x, y, z):

$$p\,,\ q\,,\ xp\,,\ xq\,,\ yp\,,\ yq\,,\ x\,(xp+yq)\,,\ y\,(xp+yq)$$
$$r\,,\ zr\,,\ z^2r$$

(1) E precisamente quei sottogruppi che operano ancora in modo primitivo sopra ogni piano del fascio invariante. — Non volendo presupporre noti tutti gli sviluppi contenuti nella mia Mem. cit., per poi scegliere, fra i varî gruppi tipici, quelli che soddisfanno alle condizioni qui imposte, basta osservare (cfr. Enriques-Fano, Mem. cit., § 12) che, se sopra ogni superficie del sistema invariante ∞^1 viene subordinato un gruppo primitivo, queste superficie sono certo algebriche e razionali, e il loro sistema è trasformabile birazionalmente in un fascio di piani. E poichè in ciascun piano di questo fascio risulterà invariante *una* rete omaloidica di curve, dovremo trovarci nel caso studiato al cap. IV della mia Memoria; si tratterà cioè di un gruppo equivalente a un gruppo proiettivo sopra una varietà M_3 contenente ∞^1 piani, la quale potrà ridursi ad essere (come ivi è dimostrato) una M_3^3 con ∞^2 direttrici rettilinee, oppure un cono, in questo caso certo di 2ª specie. Rappresentando opportunamente quella M_3^3 e questi coni sullo spazio S_3, i gruppi delle loro trasformazioni proiettive danno luogo rispettivamente ai due tipi di gruppi cremoniani sopra indicati.

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

colle due condizioni $[a\, b_1\, c_2] = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$. Questo gruppo trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare ∞^5 di paraboloidi iperbolici:

$$z\,(ax + by) + cx + dy + ez + f = 0$$

aventi un piano direttore parallelo al piano xy, e l'altro (di giacitura variabile) parallelo all'asse z. Lo stesso gruppo opera proiettivamente sul fascio (improprio) dei piani paralleli al piano xy, e sulla stella (impropria) delle rette e piani paralleli all'asse z; esso risulta anzi dalla composizione dei gruppi proiettivi totali (rispett. ∞^3 e ∞^8) di queste due forme.

I gruppi [7], [4], [1] del sig. Lie sono sottogruppi del precedente, ottenuti col fissare rispett. uno, due (infinitamente vicini) o tutti i piani $z =$ cost.

Il secondo dei nostri gruppi tipici completi coincide invece col gruppo [12] del sig. Lie, determinato dalle $2n + 9$ trasformazioni infinitesime:

$$\begin{gathered} xq\,,\ xp - yq\,,\ yp\,,\ xp + yq\,,\ r\,,\ zr\,,\ z^2 r + nz\,(xp + yq) \\ p\,,\ zp\,,\ z^2 p\,,\ \ldots .\ z^n p \\ q\,,\ zq\,,\ z^2 q\,,\ \ldots .\ z^n q \end{gathered}$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,; \quad x' = \frac{ax + by + \varphi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}\,; \quad y' = \frac{cx + dy + \psi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}$$

dove si può ritenere $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ sono polinomi affatto arbitrarî di grado n in z. Questo gruppo trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare ∞^{n+2} dei cilindri di ordine n (colle generatrici parallele al piano xy):

$$\lambda x + \mu\, y + f_n(z) = 0$$

dove ancora $f_n(z)$ è un polinomio generico di grado n in z. I detti cilindri hanno la retta all' infinito del piano xy come generatrice $(n-1)^{\text{pla}}$, e gli $n - 1$ piani tangenti lungo questa generatrice coincidono tutti (il che non costituisce una particolarità dal punto di vista delle trasformazioni birazionali), e coincidono precisamente col piano all' infinito.

I gruppi [11], [9], [8] sono sottogruppi del precedente, e il primo ne è anzi sottogruppo invariante (corrispondente al caso $ad - bc = 1$).

Infine, i gruppi [5] e [6] del sig. Lie contengono trasformazioni infinitesime del tipo:

$$z^m\, e^{\lambda_i z}\, p\ ; \quad z^m\, e^{\lambda_k z}\, q$$

dove le m sono numeri interi non negativi, e le λ sono costanti arbitrarie. Questi gruppi si compongono di trasformazioni (algebriche e) birazionali soltanto quando si annullino tutte le λ; e possono anche ridursi a tali quando siano nulli tutti gli esponenti m, e le λ siano numeri interi; ma in ambo i casi si hanno soltanto sottogruppi del gruppo [12]. Altrettanto dicasi dei gruppi intransitivi [2] e [3], nelle cui trasformazioni infinitesime compaiono, come moltiplicatori di p e q, delle funzioni arbitrarie $Z(z)$, che, per gruppi cremoniani, sarebbero razionali e si potrebbero anche supporre intere (op. e vol. cit., p. 147).

Esclusi pertanto questi casi di gruppi non cremoniani nè riducibili a tali, *tutti gli altri fra i tipi* [1]...[12] *del sig. Lie coincidono con uno dei nostri due gruppi cremoniani tipici o con uno dei loro sottogruppi.*

3. Passiamo ora ad esaminare i gruppi continui che lasciano fissa una conseguenza di linee, ed operano su di essa in modo primitivo. Questi gruppi, ove si compongano di trasformazioni cremoniane [1], si riducono birazionalmente a uno dei tre tipi seguenti (e loro sottogruppi):

1) Lo stesso gruppo 1° (∞^{11}) della categoria precedente;

2) *gruppo* ∞^8 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^7, *di grado 6, delle superficie del 3° ordine passanti per una cubica sghemba* (σ), *e aventi un dato punto doppio* (P) (centro di una stella invariante di rette e piani) *posto sopra quella cubica.* Questo sistema lineare ∞^7 è somma della stella di piani P e della rete, pure invariante, delle quadriche passanti per la cubica σ;

3) *gruppo di dimensione* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ *delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè stesso il sistema lineare* $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ *delle superficie di ordine n aventi un dato punto* $(n-1)^{\text{plo}}$ — centro di una stella invariante di rette e piani — *e uno stesso cono tangente di ordine* $n-1$ *in questo punto.*

Nel caso di trasformazioni semplicemente puntuali, il sig. Lie ha trovati i tipi [13]....[33] dei §§ 42-44, in numero totale di *ventuno.* Fra questi, i tipi [13]....[26] sono tutti (o possono ridursi a) sottogruppi dei rimanenti *sette*; non esclusi nemmeno i gruppi [16] e [24], pei quali la detta

[1] Nella Mem. cit. del sig. Enriques e mia (§§ 15-16) è dimostrato che in questo caso la congruenza invariante si compone necessariamente di curve algebriche e razionali, ed è essa stessa algebrica, razionale, del 1° ordine, e trasformabile birazionalmente in una stella di rette. La determinazione dei vari tipi corrispondenti a questo caso trovasi nel cap. VII della mia Mem.: *I gruppi di Jonquières generalizzati.*

proprietà non risulta evidente, ma dei quali è dimostrato altrove (¹) come possano ridursi a gruppi proiettivi trasformanti in sè un complesso lineare di rette e *un* punto col suo piano polare rispetto al complesso; e quindi a sottogruppi di [32], corrispondentemente al caso $n = 1$.

I gruppi [27]...[33] sono quelli che operano in modo ∞^8 sulla congruenza di linee invariante. Fra essi, il [33] coincide col gruppo [10], ossia col gruppo ∞^{11} di trasformazioni quadratiche già considerato, e in questo è contenuto come sottogruppo il [28].

Il gruppo [27] determinato dalle otto trasformazioni infinitesime:

$$p\,,\,q\,,\,xq + r\,,\,xp - yq - 2zr\,,\,yp - z^2r\,,\,xp + yq$$
$$x^2p + xyq + (y - xz)r\,,\,xyp + y^2q + z\,(y - xz)r$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2x + b_2y + c}\;;\quad y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$
$$z' = \frac{\mathrm{A}z - \mathrm{B} + \mathrm{C}(y - xz)}{- \mathrm{A}_1z + \mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1(y - xz)}$$

dove le lettere maiuscole indicano i subdeterminati di 2° ordine del determinante $[a\, b_1\, c_2]$ (che può supporsi $= 1$), è birazionalmente identico al 2° dei nostri gruppi cremoniani tipici. Esso trasforma infatti in sè stessa la stella (impropria) di piani:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

nella quale subordina il gruppo proiettivo totale ∞^8; e trasforma anche in sè la rete di paraboloidi iperbolici:

$$y - xz + \lambda z + \mu = 0$$

e quindi il sistema lineare ∞^7 di superficie cubiche, somma dei due precedenti sistemi ∞^2:

$$(\alpha_1\, x + \beta_1\, y)\,(y - xz) + (\alpha_2\, x + \beta_2\, y)\, z + \alpha_3\, x + \beta_3\, y + \gamma z + \delta = 0.$$

L'unica differenza fra il gruppo 2° dianzi definito e quest'ultimo consiste in ciò: che la rete delle quadriche passanti per la cubica σ è ora sostituita da quella dei paraboloidi iperbolici $y - xz + \lambda\, z + \mu = 0$, aventi a comune le rette all'infinito dei piani xy e yz, e raccordati anzi lungo la prima di esse; sicchè la congruenza delle corde di σ risulta sostituita dalla congruenza lineare speciale delle rette (parallele al piano xy) intersezioni

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, § 109, p. 445. La riduzione di cui sopra si ottiene mediante la sostituzione: $x_1 = x\,,\, y_1 = \frac{1}{2}\, y\,,\, z_1 = z - \frac{1}{2}\, xy$.

variabili di questi paraboloidi: o anche, si può dire, la cubica σ si è spezzata in tre rette, due delle quali, infinitamente vicine (le direttrici di quella congruenza lineare speciale), si appoggiano alla terza. Ora tutto ciò è affatto inessenziale; e lo prova il modo stesso in cui, nella mia Mem. cit. (n. 28), fu costruito il gruppo 2° di questa categoria; appoggiandosi soltanto cioè sul fatto che, oltre alla stella P di rette e piani, fosse invariante una seconda congruenza del 1° ordine, composta di linee contenute rispett. nei piani di quella stella (*una* per ciascun piano), e unisecanti i raggi della stella contenuti in detti piani. A questa condizione soddisfanno tanto la congruenza delle corde della cubica σ passante per P, quanto una qualsiasi congruenza lineare, anzi ogni congruenza di rette di 1ª classe rispetto alla quale P sia punto generico [1].

Il gruppo [32] determinato dalle $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ trasformazioni infinitesime:

$$p\,,\,q\,,\,xq\,,\,xp-yq\,,\,yp\,,\,xp+yq\,,\,x^2p+xyq+nxzr\,,\,xyp+y^2q+nyzr$$
$$zr \quad x^{\varrho}y^{\sigma}r \quad (\varrho+\sigma=0\,,1\,,2\,,\dots n)$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x'=\frac{ax+by+c}{a_2x+b_2y+c_2}\,;\quad y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\,;\quad z'=\frac{z+\Phi_n(xy)}{(a_2x+b_2y+c_2)^n}$$

dove Φ_n è un polinomio affatto arbitrario di grado n nelle variabili $x\,,y$, coincide (per $n>0$) col 3° dei nostri gruppi cremoniani tipici (per $n=0$ si ha invece un sottogruppo di [33]). Esso trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare di superficie di ordine n rappresentato dall'equazione:

$$z=\mathrm{F}_n(x\,y)$$

dove F_n è pure un polinomio qualsiasi di grado n in $x\,,y$: tale sistema, di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, si compone appunto delle superficie di ordine n che hanno il punto all'infinito dell'asse z come $(n-1)^{\text{plo}}$, e uno stesso cono tangente in questo punto (costituito precisamente dal piano all' infinito contato $n-1$ volta).

Degli altri gruppi trovati dal sig. Lie, il [30] è sottogruppo invariante del precedente, con un solo parametro di meno (e corrisponde al caso $[a\,b_1\,c_2]=1$); e il [31] è un gruppo proiettivo ∞^9 con un punto fisso e un piano fisso che non si appartengono, sottogruppo quindi di [32] corrispon-

(1) Cfr. anche la prima nota al n. 28 della Mem. stessa.

dentemente al caso $n = 1$. Infine il gruppo [29], che contiene le operazioni non algebriche generate dalle trasformazioni infinitesime

$$x^2p + xyq + \frac{3}{2}xr\,,\ xyp + y^2q + \frac{3}{2}yr\,,$$

si riduce a un sottogruppo invariante di [31] colla sostituzione $z = \frac{3}{2}\log z'$.

Concludiamo pertanto: *I tipi* [13] ... [33] *del sig. Lie coincidono tutti con uno dei tre gruppi cremoniani tipici di questa categoria* II, *o con un loro sottogruppo.*

4. Per gli altri gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali (quelli cioè che lasciano invariata una congruenza di linee e un sistema ∞^1 di superficie appartenenti a questa congruenza) il sig. Lie si limita a indicare per quale via si possa giungere a determinarne tutti i tipi. In particolare, nel caso di un gruppo il quale operi in modo ∞^3 sopra ciascuna linea della congruenza invariante — supposta trasformata questa congruenza (mediante una trasformazione puntuale) nella stella di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ — egli trova che il gruppo può ridursi a contenere le sole tre trasformazioni infinitesime r, zr, z^2r, più altre i cui simboli sono del tipo:

$$\xi(x,y)\,p + \eta(x,y)\,q$$

dove la ξ può anche supporsi funzione della sola x (op. e vol. cit., p. 172-73). Le equazioni finite del gruppo avranno allora la forma:

$$x' = f(x\,,y\,,a\,,b\,,\ldots)\,;\quad y' = \varphi(x\,,y\,,a\,,b\,,\ldots)\,;\quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

(dove f non contiene y, se questa non compare nelle ξ); e sarà quindi invariante il fascio dei piani $z = \text{cost.}$, ossia *un sistema* ∞^1 *di superficie non appartenenti alla congruenza invariante considerata.* Il gruppo proposto potrà dunque ottenersi (dal punto di vista gruppale) per composizione dei due gruppi (affatto indipendenti l'uno dall'altro) subordinati nella congruenza invariante e in quest'ultimo sistema ∞^1 di superficie. — Questa proprietà sussiste naturalmente anche nel caso di un gruppo cremoniano; e acquista anzi allora un'importanza maggiore e un significato molto più preciso, perchè la riduzione di quella congruenza di linee e di questo sistema di superficie rispett. a una stella di rette e a un fascio di piani può ottenersi con una trasformazione anche cremoniana (cfr. il n. 7 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati*); sicchè, ciò che prima era soltanto una *proprietà di struttura* del gruppo, diventa ora una proprietà di un gruppo cremoniano, in relazione alla geometria delle trasformazioni cremoniane.