GINO FANO

I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane nello spazio

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **33** (1898), p. 480–504

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1898_4>

I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio;

Nota di GINO FANO.

1. — È noto che ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane del piano (dipendente da un numero finito di parametri) si può ridurre con un' ulteriore trasformazione cremoniana (birazionale) a un gruppo appartenente a una di *tre* categorie determinate: *gruppi proiettivi, gruppi di trasformazioni quadratiche* (o *conformi*), e *gruppi di Jonquières* (trasformanti in sè stesso *un* fascio di rette) (1). Ciascuna di queste categorie comprende soltanto *un* tipo di gruppo completo (di un ordine qualunque n, nel 3° caso) coi relativi sottogruppi. A quest'argomento, e ad altri che vi si connettono, si riferiscono, in parte, anche talune mie note di questi ultimi anni (2).

Recentemente, il signor Enriques e io ci siamo proposti di studiare l'analoga questione per lo spazio; e in una nostra comune Memoria (3) abbiamo dimostrato che i gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio sono tutti riducibili birazionalmente a *gruppi proiettivi, gruppi conformi*, o *gruppi* “ *di Jonquières generalizzati* „ (ossia trasformanti in sè stesso un fascio di piani, ovvero una stella di rette), più altri *due* tipi di di gruppi ∞^3 ben determinati. In particolare, i gruppi *primitivi* si riducono tutti a gruppi proiettivi e conformi; i gruppi *imprimitivi*, a gruppi di Jonquières generalizzati (e ad altri *tre* tipi, uno dei quali è ancora un gruppo conforme). Il risultato relativo ai gruppi primitivi fu però ottenuto valendosi della

(1) Enriques, “ Rend. R. Acc. dei Lincei „, maggio 1893.

(2) Rend. cit., aprile 1895; “ Rend. di Palermo „, t. X (1896), pp. 1 e seg., 16 e seg.

(3) “ Annali di Matem. „, s. 2a, t. 25. In seguito indicherò questa Memoria, per brevità, colle lettere E F.

classificazione, dovuta al sig. Lie, dei gruppi continui primitivi di trasformazioni *puntuali* dello spazio (1); e quest' ultima presuppone a sua volta lunghe ricerche sui gruppi continui *irriducibili* di trasformazioni di contatto del piano (non riducibili cioè ad *estensioni* di gruppi puntuali) (2). Non sarà quindi inutile il mostrare come allo stesso nostro risultato sui gruppi cremoniani primitivi si possa anche giungere per una via più diretta, senza valersi di tante altre ricerche, ma ricorrendo soltanto (come io già feci pei gruppi cremoniani del piano) a un unico teorema (molto più semplice) del sig. Lie, già dimostrato per un numero qualunque di variabili (3).

Questa dimostrazione diretta verrà data appunto nel presente lavoro. E, per mezzo di essa, noi preciseremo anche ulteriormente il risultato già ottenuto dal sig. Enriques e da me, determinando in pari tempo *i singoli gruppi tipici (proiettivi e conformi) birazionalmente distinti, ai quali tutti i gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane possono ricondursi.* Questi gruppi (come si potrebbe anche facilmente dedurre dal risultato già noto) sono quelli stessi che sono distinti dal punto di vista delle trasformazioni puntuali, e furono già come tali enumerati dal sig. Lie (4), più *il gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni conformi che lasciano fissa una data sfera (non nulla)* (5). In un altro lavoro mi occuperò della determinazione dei diversi tipi di gruppi di Jonquières generalizzati; questione interessante, ma piuttosto lunga e complicata.

Anche in questo lavoro farò costantemente uso (come in

---

(1) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pp. 122-140. Così pure vi occorrono le ricerche del Sig. Enriques sui sistemi lineari di superficie a intersezioni variabili razionali („ Rend. Acc. dei Lincei „, dicembre 1893, nota (3) a p. 282; „ Mathem. Ann. „, vol. 46).

(2) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 23, 24.

(3) Op. cit., vol. I, p. 631.

(4) Op. cit., vol. III, p. 139.

(5) Come è già detto (ma non dimostrato) in EF, § 6. — Desidero anche avvertire esplicitamente, ch'io non intendo certo che questa nuova dimostrazione sia preferibile all'altra contenuta in EF, §§ 4-6; ma ho creduto che valesse forse la pena di far conoscere anche queste ricerche, le quali formarono un sol gruppo con quelle che concorsero alla Memoria pubblicata negli Annali di Matematica.

E F; cfr. in part. § 2) della possibilità di ricondurre birazionalmente ogni gruppo cremoniano continuo dello spazio a un gruppo proiettivo sopra un'opportuna varietà M_3 di un certo spazio S_r (rappresentabile sopra S_3 in modo che quel gruppo cremoniano e questo gruppo proiettivo vengano a corrispondersi). Supporremo pure i nostri gruppi *algebrici* (cfr. E F, § 1), e ci varremo, ogni qual volta sarà necessario, delle osservazioni enunciate in E F, §§ 2, 3.

2. — Come già in altre ricerche, sarà anche qui per noi fondamentale la considerazione del gruppo proiettivo che il gruppo proposto subordina nell'intorno di un punto generico dello spazio imposto come unito.

Consideriamo un gruppo continuo qualunque G di trasformazioni cremoniane dello spazio, e indichiamo con k la sua dimensione. Fra le operazioni di esso ve ne saranno allora almeno ∞^{k-3} che lasciano fisso un punto generico P; e anzi precisamente tante, se il gruppo stesso è transitivo (il che richiede $k \geq 3$). Queste operazioni formeranno un sottogruppo che permuterà le ∞^2 direzioni uscenti da P secondo le operazioni di un certo gruppo *proiettivo* (il quale potrebbe tuttavia ridursi alla sola trasformazione identica). Supposto per il momento che quest'ultimo gruppo sia anch'esso continuo, potremo concludere, per le note proprietà dei gruppi continui proiettivi in una forma fondamentale di 2ª specie, che dovrà presentarsi uno dei quattro casi seguenti (¹):

1° Le ∞^2 direzioni uscenti da P verranno permutate secondo tutte le possibili ∞^8 proiettività della loro stella;

2° Vi sarà in questa stella almeno una direzione fissa uscente da P;

3° Verrà trasformato in sè il sistema delle ∞^1 direzioni uscenti da P e contenute in un certo piano (formanti cioè un fascio) — senza però che sia fissa alcuna direzione, contenuta o no in questo piano —;

4° O infine verrà trasformato in sè un cono quadrico elementare di direzioni uscenti da P (potendosi anche supporre che

(¹) Cfr. anche Lie, op. cit., vol. III, p. 124.

non sia contemporaneamente fissa nessuna direzione e nessun fascio di direzioni entro la stella P).

Si vede facilmente che il gruppo proposto G sarà certo *primitivo* nel 1° e nel 4° caso, e *imprimitivo* nel 2° (perchè in questo caso le direzioni fisse condurrebbero per integrazione a una congruenza di linee invariante). Nel 3° caso dovrà venir trasformata in sè una certa equazione Pfaffiana:

$$\mathrm{X}(x,y,z)\,dx + \mathrm{Y}(x,y,z)\,dx + \mathrm{Z}(x,y,z)\,dz = 0;$$

e il gruppo G sarà primitivo o imprimitivo secondo che quest'equazione Pfaffiana sarà non integrabile oppure integrabile. — Se il gruppo G è primitivo, esso sarà pure transitivo; e dalla dimensione ($k - 3 \geqq 8, 5, 3$) del sottogruppo che se ne stacca col fissare il punto generico P si può già concludere che nel 1°, 3° e 4° caso sarà rispett. $k \leqq 11, 8, 6$.

Però il gruppo G, pur essendo continuo, potrebbe subordinare nella stella delle direzioni uscenti da P un gruppo proiettivo non più continuo, ma bensì misto ([1]), o composto soltanto di un numero finito (≥ 1) di operazioni. In tal caso, con un ragionamento analogo a quello che fu già applicato dal Klein alle forme di prima specie ([2]), si vedrebbe facilmente che nell'intorno del punto P sarebbe certo fissa o una direzione, o un sistema di un numero finito di direzioni (eventualmente anche permutabili fra loro); con che il gruppo G risulterebbe imprimitivo.

Concludiamo perciò che, se il gruppo G è primitivo, esso deve subordinare nell'intorno di un punto generico P, imposto come unito, un gruppo proiettivo continuo del 1°, 3° o 4° fra i tipi dianzi enumerati. Dovremo quindi esaminare successivamente questi tre casi.

([1]) Questo caso non è indicato come possibile dal Sig. Lie, ma può effettivamente presentarsi; si presenta ad es. se G è il gruppo ∞^7 di tutte le trasformazioni proiettive che mutano in sè un dato cono quadrico.

([2]) Cfr. il *Princip der Fixpunkte* (*Höhere Geometrie*, II, autogr. Vorl., 1893, pp. 275-76).

I.

3. — Si abbia un gruppo continuo G di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale subordini nella stella delle direzioni uscenti da un punto generico P l' intero gruppo proiettivo ∞^8 di questa stella.

Ricorriamo (come già si è avvertito) a un teorema generale del sig. Lie [1], secondo il quale *un gruppo continuo di trasformazioni puntuali di uno spazio qualunque, il quale nell'intorno di un punto generico, imposto come unito, subordini il massimo gruppo proiettivo possibile* (per lo spazio S_3 dunque un gruppo ∞^8), *si può ridurre con un'ulteriore trasformazione puntuale a un gruppo proiettivo,* e precisamente *al gruppo proiettivo totale,* ovvero *al gruppo lineare generale* o *speciale.* Si tratta ora di far vedere che nello spazio S_3 (come pure nel piano, e lo si dimostrerebbe anche facilmente per uno spazio qualunque) se il gruppo proposto si compone di trasformazioni cremoniane, esso deve potersi ridurre a uno dei tre gruppi proiettivi nominati con una trasformazione pure cremoniana (anzichè semplicemente puntuale). Indicata pertanto con S^{-1} una trasformazione puntuale (certo esistente) la quale muti il gruppo *cremoniano* G in un gruppo proiettivo G′ (∞^{15}, ∞^{12} o ∞^{11}), basterà dimostrare che la sua inversa S fa corrispondere al sistema ∞^3 dei piani, invariante rispetto a G′, *un sistema lineare omaloidico di superficie,* il quale sarà invariante rispetto a G: da ciò seguirà appunto che S, e quindi S^{-1}, sono trasformazioni birazionali.

4. — Poichè vi sono in G′ infinite trasformazioni che lasciano fissi tutti i punti di un piano generico, così in G ve ne dovranno essere pure infinite per le quali siano fissi tutti i punti di una qualunque delle superficie φ, trasformate dei piani mediante S. Le φ saranno dunque superficie algebriche (per l'ultima osservazione contenuta in E F, § 3); e saranno pure *razionali,*

---

(1) Op. cit., vol. I, p. 631.

perchè G subordina su ciascuna di esse un gruppo transitivo primitivo di trasformazioni birazionali (1).

Così pure, essendovi in G′ infinite trasformazioni che lasciano fissa una retta qualunque e ne permutano ancora i vari punti in infiniti (anzi in almeno ∞^2) modi diversi, si conclude che le intersezioni delle superficie φ a due a due sono curve algebriche e con infinite (anzi almeno ∞^2) trasformazioni proiettive in sè; dunque curve *razionali* (e normali pei rispettivi spazi).

Infine, ciascuna φ è incontrata dalle rimanenti secondo un sistema di sole ∞^2 curve razionali (trasformate mediante S delle rette di un certo piano); e questo sistema è invariante rispetto al gruppo primitivo subordinato da G su quella φ. Da ciò si trae che il detto sistema di ∞^2 curve su φ è una rete omaloidica (perchè il gruppo di trasformazioni birazionali subordinato da G sulla φ è equivalente a un gruppo proiettivo primitivo del piano; gruppo che non trasforma in sè nessun sistema ∞^2 di curve, all'infuori del sistema delle rette). Tre φ generiche hanno dunque un solo punto variabile comune (perchè così avviene delle curve intersezioni di due di esse colla terza); e perciò le φ formano un sistema lineare omaloidico, come appunto si voleva dimostrare.

Concludiamo pertanto: *I gruppi cremoniani corrispondenti al 1° caso del n° 2 sono riducibili birazionalmente a gruppi proiettivi,* e precisamente *al gruppo totale* ∞^{15}, *al gruppo lineare* ∞^{12}, o *al gruppo lineare speciale* ∞^{11}.

II.

5. — Supponiamo ora che il gruppo cremoniano proposto subordini nell'intorno di un punto generico, imposto come unito, un gruppo proiettivo (∞^6 o ∞^5) il quale non trasformi in sè nessuna direzione uscente da questo punto, bensì però un fascio di tali direzioni. Faremo vedere che *i gruppi di questa categoria*

(1) Dalle ricerche dei Sigg. Castelnuovo e Enriques (" Compt. Rend. de l'Ac. des Sciences ", luglio 1895) risulta infatti che, se una superficie algebrica non razionale ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, queste formano sempre un gruppo imprimitivo.

sono tutti di un tipo unico, e si possono ridurre birazionalmente al gruppo proiettivo ∞^{10} *di un complesso lineare non speciale.*

Abbiamo già detto (cfr. nº 2) che in questo caso deve venir trasformata in sè stessa un'equazione Pfaffiana *non integrabile*, e riducibile quindi (come un'opportuna trasformazione) alla forma $dz - ydx = 0$, che è l'equazione differenziale di un complesso lineare non speciale [1]. Il sig. Lie, valendosi dei risultati ottenuti sui gruppi continui irriducibili di trasformazioni di contatto del piano, ha dimostrato che con quella stessa trasformazione ogni gruppo continuo primitivo di trasformazioni puntuali, rispetto al quale sia invariante l'equazione Pfaffiana considerata, deve necessariamente ridursi al grupppo ∞^{10} delle proiettività che trasformano in sè il complesso lineare definito dalla $dz - ydx = 0$. Si potrebbe ora far vedere che, se il gruppo (primitivo) proposto si compone di trasformazioni birazionali, esso deve potersi ridurre a questo gruppo proiettivo ∞^{10} con una trasformazione anche birazionale; ma noi tratteremo invece la questione direttamente, senza valerci del risultato già noto pei gruppi puntuali.

6. — Ci converrà perciò riferirci a una varietà razionale M_3 di un certo spazio S_r ($r \geq 4$ [2]), la quale possa rappresentarsi sullo spazio S_3 in modo che al gruppo cremoniano proposto corrisponda su di essa un gruppo *proiettivo* G (di dimensione $k \geq 8$).

Un primo punto che ci importa stabilire è il seguente:

Le ∞^{k-3} *trasformazioni del gruppo* G *che lasciano fisso un punto generico* P *della varietà* M_3 *trasformano in sè stessa anche una certa superficie contenuta nella* M_3 *e passante per* P. Faremo poi vedere che, variando P, questa superficie descrive, entro la varietà M_3, un sistema lineare omaloidico (che sarà certo invariante rispetto a G): di qui seguirà appunto la riduzione di G, e quindi del gruppo cremoniano proposto, a un gruppo proiettivo di S_3.

Le ∞^{k-3} operazioni di G che lasciano fisso il punto generico P su M_3 formano un sottogruppo H, il quale trasforma in sè

(1) Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 206.

(2) Escludiamo per ora il caso $r \geq 3$, per evitare talune complicazioni; vedremo poi che a questo caso si riducono tutti gli altri.

stesso lo spazio S_3 tangente in P alla M_3, e così pure un piano π passante per P e contenuto in questo S_3, ma non lascia ancora fissa nessuna retta del fascio P (π). Una qualunque di queste rette sarà fissa per un ulteriore sottogruppo H', soltanto ∞^{k-4}, il quale subordinerà gruppi integrabili nel piano π e nello spazio S_3 tangente alla M_3 in P. *Io dico ora che questo gruppo* H′ *deve essere esso stesso integrabile.* Evidentemente da H′ noi possiamo staccare dei sottogruppi invarianti, di dimensioni decrescenti di un'unità per volta, fino ad avere un gruppo per il quale siano fissi tutti punti dello spazio S_3 considerato (tangente in P alla M_3); basterà quindi far vedere che quest'ultimo gruppo deve anche essere integrabile.

E infatti, se questo gruppo non fosse integrabile, esso dovrebbe contenere (almeno) un sottogruppo semplice ∞^3 (H″), il quale lascerebbe ancora fissi tutti i punti dello spazio S_3 tangente in P alla nostra M_3 — o eventualmente anche di un S_h ($h \geq 3$) contenente tale S_3 —, e lascerebbe del pari fisso uno spazio Σ_{r-h-1} non incontrante questo S_h, con tutti gli S_{r-h} per esso (1). Fra questi S_{r-h}, quelli che proiettano i singoli punti della varietà M_3 dovranno tutti incontrare questa varietà in *superficie* passanti rispett. per questi punti (non già in curve o in numero finito di punti, perchè su tali enti il gruppo H″ non potrebbe operare in modo ∞^3). In particolare lo spazio S_{r-h} passante per P incontrerà la M_3 secondo una superficie passante per P stesso; sicchè tutte le tangenti in P a questa superficie, essendo contenute in quell'S_{r-} , dovranno incontrare lo spazio Σ_{r-h-1}. D'altra parte queste tangenti devono anche stare nello spazio S_3 tangente in P alla M_3, il quale non incontra Σ_{r-h-1}. Siamo dunque caduti in un assurdo, e perciò il gruppo H′ sarà necessariamente integrabile, c. s. v. d.

7. — Poichè dunque il gruppo H′ è integrabile, esso ammetterà tutta una serie di spazi fissi $S_1, S_2, \ldots S_{r-1}$ passanti per P, di cui ciascuno conterrà i precedenti. Fra questi spazi consideriamone uno (certo esistente) il quale incontri la varietà

---

(1) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* vol. III, pp. 757, 785. Cfr. anche la mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (“ Mem. Acc. di Torino „, 1895-96).

M_3 secondo una *linea* (e non una superficie) passante per P; e indichiamo con γ questa linea (o, eventualmente, una parte irriducibile di essa, anche passante per P). — Questa linea γ (certamente algebrica) sarà invariante pel gruppo H′, e toccherà in P l'unica retta invariante del fascio P (π) — che è anche la sola tangente fissa della M_3 —; essa varierà però al variare di H′ entro il gruppo H (∞^{k-3}), perchè varia appunto, entro una serie ∞^1, questa sua tangente. Variando, essa assumerà ∞^1 posizioni diverse, luogo delle quali sarà una superficie φ, tangente in P al piano π, e invariante rispetto ad H. Con ciò è appunto dimostrato quanto ci eravamo proposti al principio del n° prec.

Su questa superficie φ (che sarà algebrica, perchè luogo di una serie razionale ∞^1 di curve algebriche) sarà pure invariante rispetto ad H il sistema ∞^1 delle curve γ, le quali verranno permutate da H stesso in tutti gli ∞^3 modi possibili, come le rette del fascio P (π) ad esse rispett. tangenti.

Variando P, varierà naturalmente la superficie φ, assumendo in tutto ∞^3 posizioni diverse, perchè se no le curve o superficie luoghi di punti P corrispondenti a una stessa φ costituirebbero nella varietà M_3 un sistema d' imprimitività pel gruppo G. — Resta a mostrare che questo sistema ∞^3 è un sistema lineare omaloidico.

8. — Nel piano π passante per il punto P lo stesso gruppo H già considerato (che è almeno ∞^5) subordina un gruppo proiettivo, per il quale è unito il punto P, ma non è fissa nessuna retta del fascio P (π). — Non si può invece escludere *a priori* che vi sia in π una retta fissa non passante per P: se non ve n'è alcuna, il gruppo subordinato da H in π sarà ∞^6 o ∞^5, mentre sarebbe soltanto ∞^4 o ∞^3 in caso contrario.

D'altra parte sappiamo che nella stella (∞^2) delle rette tangenti in P alla varietà M_3 il gruppo H subordina almeno ∞^5 trasformazioni diverse. Se dunque in π ne fossero subordinate sole ∞^4, o meno, si avrebbero in H infinite trasformazioni, per le quali sarebbero fissi tutti i punti del piano π e non tutte le direzioni uscenti da P sulla varietà M_3. Noi dimostreremo ora che questo non può avvenire; e ne verrà perciò di conseguenza: 1° *che il gruppo* H *subordinerà in* π *un gruppo proiettivo* ∞^6 o ∞^5

avente il punto P *come solo elemento unito;* 2° *che lo stesso gruppo* H *subordinerà su ciascuna retta del fascio* P (π), *e quindi anche su ciascuna curva* γ *della superficie* φ, *tutte le* ∞^2 *proiettività aventi in* P *un punto unito.* Le γ saranno pertanto curve razionali (e normali), e razionale sarà pure la superficie φ.

Supponiamo dunque che vi sia in H un sottogruppo continuo H_0 (almeno ∞^1, e necessariamente invariante entro H), le cui operazioni lascino fisso ogni punto del piano π; *dico che per queste stesse operazioni devono risultar fisse anche tutte le tangenti alla varietà* M_3 *nel punto* P. Infatti le operazioni del gruppo H_0 lasceranno fissi tutti i punti di ogni curva γ uscente da P (perchè sono tali tutti i punti della tangente in P a ciascuna di queste curve); *saranno dunque fissi rispetto a* H_0 *tutti i punti della superficie* φ *uscente da* P. — Di qui si trae che saranno pure fisse per H_0 tutte le ∞^2 superficie φ', analoghe a φ, uscenti dai punti di φ stessa, e quindi ancora le curve δ mutue intersezioni di queste superficie; sicchè H_0 *sarà un gruppo doppiamente intransitivo*, avente queste (∞^2) curve δ come traiettorie fisse. — Infine, la superficie φ'' analoga a φ e φ', uscente da un punto generico della varietà M_3 (fuori di φ), pur non essendo fissa, dovrà tuttavia variare in modo da incontrare sempre la φ (che è luogo di punti uniti) secondo una medesima curva (luogo anche di punti uniti); essa dovrà dunque descrivere un sistema ∞^1 (e precisamente un fascio) contenente la stessa φ. *Di qui si trae che le* ∞^2 *curve* δ (ciascuna delle quali è luogo del punto corrispondente a una φ'' variabile) *dovranno tutte passare per* P. *Saranno dunque fisse per* H_0 *tutte le tangenti in* P *a queste* ∞^2 *curve;* e siccome H_0 è contenuto invariantivamente in H, così ogni operazione di H dovrà ancora trasformare in sè, se non ciascuna di queste tangenti, certo l' insieme di esse. Ora, nella stella ∞^2 delle tangenti in P alla varietà M_3, sono invarianti rispetto ad H solo l'intera stella, e il fascio di quelle tangenti che stanno in π: e una curva δ generica non può essere tangente a una retta del fascio P (π), perchè se no essa sarebbe anche, come le γ, luogo di punti uniti per l' intero gruppo H_0.

Le tangenti in P alle ∞^2 curve δ esauriranno dunque il sistema delle tangenti in P stesso alla varietà M_3; e perciò ogni operazione del gruppo H_0 lascerà pure fisse tutte queste tangenti [1].

9. Le cose dette finora ci conducono a una rappresentazione birazionale semplicissima della superficie φ, invariante pel gruppo H, sul piano π ad essa tangente. Ogni punto di φ (o di π) diverso da P è infatti unito per ∞^{k-5} operazioni di G — ossia di H —; e queste stesse operazioni lasciano anche fissa la curva γ di quella φ (la retta del fascio P (π)) passante per il punto considerato, quindi ancora *la* retta del fascio P (π) (*la* curva γ della superficie φ) tangente in P a questa curva (a questa retta), e *un* determinato punto di questa tangente (di questa curva γ), ossia del piano π (della superficie φ); punto che si assumerà come omologo al primo. La superficie φ risulta così riferita birazionalmente al piano π, in modo che alle curve γ corrispondono le rette del fascio P; e questa corrispondenza trasforma precisamente l'uno nell'altro i gruppi proiettivi subordinati da G (o da H) su quelle due superficie.

Consideriamo ora, sopra questa φ, il sistema delle linee intersezioni di essa colle rimanenti (analoghe) superficie φ; sistema che sarà al più ∞^3, e invariante rispetto al gruppo H. Quali linee corrisponderanno a queste nel piano π? Bisognerà cercare in π un sistema al più ∞^3 di linee (non passanti, in generale, per P) il quale sia invariante rispetto al gruppo H (che opera su P in modo almeno ∞^5); ciascuna di queste linee dovrà quindi essere invariante per almeno ∞^2 operazioni di H stesso, ossia per almeno ∞^2 trasformazioni proiettive di π, per le quali sia pure fisso il punto P. Tali linee, se irriducibili, non potranno dunque essere che rette; e, se si spezzassero, potrebbero tutt'al più spezzarsi in coppie di rette; caso anche da escludersi, perchè nel gruppo (∞^6 o ∞^5) subordinato da H in π vi sono ancora infinite operazioni trasformanti l'una nel-

---

[1] Da queste considerazioni segue già che il sistema ∞^3 delle superficie φ è lineare — perchè contiene l'intero fascio individuato da due qualunque di esse —, purchè però vi siano nel gruppo G infinite trasformazioni che lascino fisso ogni punto del piano π considerato. Risulterà in seguito, dal fatto che il gruppo G deve essere ∞^{10}, che questa condizione è sempre soddisfatta.

l' altra due qualunque delle ∞^4 coppie di rette non passanti per P (sicchè non risulta invariante nessun sistema di dimensione ≤ 3 di tali linee). E poichè nel piano π vi sono soltanto ∞^2 rette, così concludiamo che la superficie φ considerata è incontrata dalle rimanenti secondo sole ∞^2 linee diverse, formanti (come le rette corrispondenti nel piano π) una rete omaloidica.

10. — *Una qualunque superficie φ è dunque incontrata dalle rimanenti secondo una rete omaloidica di curve.* Di qui segue immediatamente che tre φ generiche hanno una sola intersezione variabile, e che perciò *le superficie φ formano un sistema lineare omaloidico.*

Riferendo proiettivamente, in un modo qualsiasi, quest'ultimo sistema al sistema dei piani dello spazio S_3, potremo rappresentare birazionalmente la nostra M_3 (cfr. n° 5) sullo spazio, in modo che al gruppo G, e quindi al gruppo cremoniano proposto, corrisponda un gruppo proiettivo (di S_3). Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani di questa categoria II *si possono tutti ridurre, con un' opportuna trasformazione birazionale, a gruppi proiettivi.*

Rimane soltanto a vedere quali siano i gruppi proiettivi di S_3 soddisfacenti alle condizioni qui richieste (primitivi cioè, e tali che, fissando un punto, risulti fisso anche un piano, ma non una retta, per questo punto). Esclusi i gruppi con almeno un punto unito fisso, che sono certo imprimitivi: esclusi pure tutti quelli con una linea o una superficie invariante; sia che questa linea o superficie sia di ordine ≥ 2, perchè per ogni punto imposto come unito si avrebbe un cono invariante (proiettante la linea, o tangente alla superficie) di ordine ≥ 2; sia che si tratti invece di una retta (gruppo imprimitivo) o di un solo piano invariante (gruppi già incontrati nella categoria I); non rimangono, com'è noto, che due altri casi soltanto [1]: il gruppo proiettivo totale ∞^{15}, e *il gruppo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale.* Di questi, il secondo soltanto soddisfa alle condizioni richieste (le ∞^3 rette del complesso essendo precisamente le linee γ da noi considerate sulla varietà M_3; varietà

---

[1] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 235.

che qui non è altro che lo stesso spazio S_3). Concludiamo pertanto;

Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale sia primitivo e tale che, imposto come fisso un punto generico, risulti pure fissa una giacitura uscente da questo punto, contiene necessariamente d i e c i *parametri, e si può trasformare birazionalmente nel gruppo* ∞^{10} *delle collineazioni che mutano in sè stesso un complesso lineare non speciale.*

Con un ragionamento un po' più lungo si potrebbe anche prescindere dall' uso del teorema sui gruppi proiettivi di S_3, del quale ci siamo valsi poc'anzi, facendo vedere direttamente che si giunge a un gruppo trasformante in sè una reciprocità nulla, e quindi un complesso lineare di rette. Per brevità non vi insistiamo.

III.

11. — Per completare lo studio dei gruppi cremoniani continui primitivi ci rimane a considerare il caso di un gruppo, il quale, nell'intorno di un punto generico imposto come unito, subordini le ∞^3 trasformazioni proiettive che lasciano fisso un cono quadrico di direzioni uscenti dal punto stesso (caso 4° del n° 2).

Assunti nell'intorno di questo punto generico P (x, y, z) i differenziali dx, dy, dz come coordinate omogenee di una direzione variabile, il cono quadrico invariante verrà rappresentato da un'equazione omogenea di 2° grado negli stessi differenziali:

$$a_{11}\, dx^2 + a_{22}\, dy^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{1}$$

i cui coefficienti a_{ik} varieranno col punto P, e saranno perciò funzioni delle (sole) coordinate $x, y, z,$ tali che il determinante $|a_{ik}|$ non risulti identicamente nullo.

La (1) *è dunque una* EQUAZIONE DI MONGE [1], *che deve essere trasformata in sè dal gruppo cremoniano proposto.* Essa definisce infatti una varietà ∞^4 di elementi lineari (" *Linienele-*

[1] LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 249.

mente „) dello spazio, la quale è invariante rispetto ad ogni operazione di questo gruppo.

Ora, ad ogni equazione di Monge, purchè non lineare nei differenziali dx, dy, dz che in essa compaiono, corrisponde una certa equazione alle derivate parziali del 1° ordine (anche non lineare):

$$F(x, y, z, p, q) = 0)$$

$\left(\text{essendo } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, la quale è soddisfatta da ∞^4 elementi superficiali (“ *Flächenelemente* „) dello spazio, e precisamente da quegli elementi x, y, z, p, q che per ogni punto x, y, z inviluppano il cono definito dalla proposta equazione di Monge.

Alla nostra equazione (1) corrisponderebbe un' equazione alle derivate parziali (di 1° ordine e 2° grado), il cui primo membro sarebbe la funzione reciproca (o aggiunta) della forma quadratica che compare nella (1):

$$A_{11} p^2 + A_{22} q^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{2}$$

È chiaro che *anche quest' equazione alle derivate parziali dovrà essere trasformata in sè dal gruppo proposto.*

Infine, è pure noto che ad ogni equazione alle derivate parziali (non lineare) sono collegate invariantivamente rispetto ad ogni trasformazione puntuale (¹) certe ∞^3 curve dette *caratteristiche*, che sono particolari curve integrali della corrispondente equazione di Monge, nel nostro caso dunque dell'equazione (1). *Sarà dunque invariante rispetto al gruppo cremoniano proposto anche il complesso delle ∞^3 caratteristiche dell' equazione alle derivate parziali* (2). È appunto sull'esistenza di un complesso di linee invariante rispetto al gruppo proposto che riposano le varie considerazioni che ora svilupperemo.

Di queste ∞^3 curve ne passeranno ∞^1 per ogni punto dello spazio, e ciascuna di esse avrà in questo punto una direzione contenuta nel corrispondente cono (1); mentre, inversamente, ogni direzione contenuta in questo cono elementare apparterrà ad *una* caratteristica uscente da quel punto. — Veramente *a*

(¹) Lie: op. ultima cit., p. 579.

priori non si potrebbe escludere che ciascuna direzione di un dato cono elementare appartenesse anche ad un numero > 1 di caratteristiche (descriventi però altrettante superficie separate uscenti dal punto vertice di quel cono, perchè se no nella serie ∞^1 delle stesse caratteristiche si avrebbe un'involuzione invariante, e non potrebbero perciò venir subordinate in essa che sole ∞^1 trasformazioni, e non già ∞^3). Tuttavia, partendo dall'osservazione che vi sono certo nel gruppo infinite trasformazioni che lasciano fissi tutti i punti di una caratteristica qualsiasi, e quindi anche quelli di ogni altra eventualmente tangente alla prima, si riesce facilmente ad escludere questo caso.

12. Immaginiamo di nuovo costruita una varietà razionale M_3 di uno spazio S_r, rappresentabile sopra S_3 in modo che al gruppo cremoniano proposto corrisponda su di essa un gruppo *proiettivo* G. Sopra questa varietà sarà invariante rispetto a G un complesso (sistema ∞^3) di linee γ, corrispondenti alle caratteristiche dell'equazione (2).

Fissato sulla M_3 un punto generico P, risulterà anche fisso il cono quadrico delle tangenti alle ∞^1 curve γ passanti per questo punto; cono che è contenuto nello spazio S_3 ivi tangente alla varietà M_3. Sopra questo cono verrà subordinato un gruppo proiettivo, che dovrà permutarne le generatrici in tutti gli ∞^3 modi possibili, e sarà perciò *non integrabile.* Come tale, esso dovrà anche subordinare su ciascuna generatrice del cono, imposta come unita, almeno ∞^1 trasformazioni diverse (perchè così avviene in tutti i casi — che sono noti — di gruppi proiettivi non integrabili sopra un cono). Altrettante trasformazioni, col punto (generico) P come punto unito, si avranno quindi anche sulla linea γ tangente a questa generatrice in P stesso; e perciò, complessivamente, su questa γ verranno subordinate da G (al variare di P) almeno ∞^2 trasformazioni proiettive.

Le linee γ, e quindi *le caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali* (2), *sono dunque curve algebriche e razionali.*

Ciò premesso, ci converrà distinguere i due casi seguenti:

1° Il gruppo subordinato da G sopra una curva γ è precisamente ∞^2, e ammette quindi sulla curva stessa *un* punto unito fisso A;

2° Questo stesso gruppo è invece ∞^3 (sicchè, imposta come fissa una curva γ, non risulterà ancora fisso nessun punto su di essa).

Cominceremo dal primo caso (cfr. ni 13-16), al quale sarà poi facile ricondurre il secondo (n° 17).

E, quanto al primo caso, osserviamo subito che *il punto* A *che noi supponiamo risultare fisso sopra una qualsiasi curva* γ *non è un punto generico della varietà* M_3; e perciò, *per effetto delle diverse trasformazioni del gruppo* G, *esso non potrà assumere che al più* ∞^2 *posizioni diverse.* Infatti con tre sole condizioni noi possiamo ottenere che sia fissa una curva γ col punto A che vi è contenuto; mentre invece per fissare un punto *generico* e una curva γ qualsiasi passante per esso occorrono quattro condizioni.

Noi possiamo anzi supporre che il punto A assuma in tutto *precisamente* ∞^2 posizioni diverse (descriva cioè una certa superficie F), perchè a questo caso possiamo sempre ridurci trasformando opportunamente la varietà M_3.

Si considerino ad es. le ∞^3 superficie luoghi rispettivamente delle curve γ uscenti dai singoli punti P della M_3 primitiva, e si prenda come nuova M_3 quella rappresentata dal minimo sistema lineare (certo invariante) che contiene tali superficie. (Questo sistema lineare è certo semplice, perchè, se appartenesse a un'involuzione (invariante, di ordine >1), i punti coniugati di un punto qualunque P in questa involuzione dovrebbero stare su una e quindi su ciascuna delle γ uscenti da P stesso; sicchè su ciascuna di queste curve si avrebbe pure un'involuzione invariante, e non potrebbero perciò venirvi subordinate ∞^2 trasformazioni diverse). Sulla nuova M_3 tutte le sezioni iperpiane (o almeno ∞^3 fra queste, formanti una serie continua e non contenuta in un sistema lineare inferiore) dovranno contenere qualche punto A, sicchè di questi punti ve ne saranno almeno ∞^1. E, se ve ne fossero soltanto ∞^1 (aventi per luogo una curva), quindi sopra ogni sezione iperpiana solo un numero finito, bisognerebbe che le γ uscenti da un dato punto P concorressero ancora in uno stesso punto A (di quella curva); e allora i punti P corrispondenti a uno stesso A formerebbero superficie costituenti un sistema d'imprimitività pel gruppo G. Concludiamo perciò che sulla M_3 così costruita i punti A avranno certo per luogo una *superficie*.

13. — Supponiamo dunque che vi sia nella M_3 una superficie F, invariante rispetto al gruppo G, e incontrata da ogni γ in *un* punto (A). Le ∞^1 curve γ uscenti da un punto generico P della varietà M_3 incontreranno rispettivamente la F negli ∞^1 punti di una curva p, la quale sarà invariante per tutte quelle trasformazioni di G che lasciano fermo P. Su questa curva p verranno subordinate, come nella serie delle γ uscenti da P, ∞^3 trasformazioni (proiettive) diverse; le p sono dunque curve algebriche e razionali (normali). — Variando P, varierà la corrispondente curva p, e assumerà in tutto ∞^3 posizioni diverse (se no le curve o superficie luoghi di punti P corrispondenti a una stessa p costituirebbero un sistema d'imprimitività pel gruppo G). *Il gruppo (certamente transitivo) subordinato da* G *sopra* F *dovrà trasformare in sè questo sistema* ∞^3 *di curve* p. — D'altra parte questo gruppo (proiettivo) subordinato su F è oloedricamente isomorfo (in senso gruppale) a G medesimo, e quindi, al pari di G, almeno ∞^6 (perchè in G non vi può essere che un numero finito di trasformazioni, le quali lascino fisso ogni punto di F, e quindi ogni linea p). Ricordando pertanto che un gruppo continuo di trasformazioni proiettive sopra una superficie algebrica è sempre equivalente a un gruppo proiettivo del piano, oppure sopra una quadrica di S_3, o sopra un cono razionale normale di ordine n in S_{n+1}, non sarà difficile riconoscere quali casi potranno qui presentarsi.

È certo che il gruppo subordinato da G sopra F non può essere equivalente a un gruppo di omografie piane, perchè alle (∞^3) curve p dovrebbero corrispondere altrettante coniche, e un gruppo almeno ∞^6, quindi ∞^6 o ∞^8 di omografie piane non trasforma in sè nessun sistema ∞^3 di coniche (irriducibili).

Potrebbe invece questo gruppo ridursi al gruppo (continuo) ∞^6 delle trasformazioni proiettive di una quadrica di S_3; e si vede facilmente che alle curve p dovrebbero allora corrispondere le sezioni piane (ossia le coniche) di questa quadrica.

Supponiamo infine che il gruppo proiettivo subordinato sopra F sia equivalente a un gruppo proiettivo sopra un cono Γ^n di S_{n+1} $(n \geq 2)$; *dico che questo caso è possibile soltanto per* $n=2$. — Anzitutto alle curve p su F dovranno corrispondere su Γ^n curve razionali *normali*, dunque di ordine n o $n+1$; anzi precisamente di ordine n (vale a dire sezioni iperpiane del cono), perchè se no sulle stesse curve non potrebbero venir subordinate che (al più) ∞^2 proiettività trasformanti in sè il cono Γ^n. Di più, il sistema di queste ∞^3 curve C^n — ovvero dei relativi iperpiani S_n — è un *sistema lineare;* ciò segue immediatamente dal fatto che nel gruppo, almeno ∞^6, da considerarsi su Γ^n vi sono almeno ∞^3 omologie (col centro nel vertice del cono), le quali, applicate ad uno generico di quegli S_n, gli fanno descrivere un sistema lineare ∞^3, che dovrà necessariamente coincidere col sistema invariante considerato. — Infine, essendo invariante un sistema lineare ∞^3 di spazi S_n in S_{n+1}, sarà pure invariante (per $n \geq 3$) lo spazio S_{n-3} base del sistema, e quindi lo spazio S_{n-2} che proietta questo dal vertice del cono Γ^n (vertice che non sta in quell' S_{n-3}, se no tutte le ∞^3 curve C^n si spezzerebbero in gruppi di n generatrici). D'altra parte il nostro gruppo proiettivo su Γ^n non può lasciar fisso nessuno spazio (di dimensione ≥ 1) passante pel vertice di Γ^n stesso (perchè se no esso, e quindi G, risulterebbero integrabili); sarà quindi $n=2$ come avevamo affermato da principio. E alle curve p corrisponderanno precisamente le ∞^3 sezioni piane del cono quadrico Γ^2.

Concludiamo perciò che *il sistema delle curve* p *sopra* F *è in ogni caso un sistema lineare* ∞^3 *di grado due, trasformabile birazionalmente nel sistema delle sezioni piane di una quadrica o cono quadrico di* S_3. — Ricordando poi ancora che il gruppo G deve essere oloedricamente isomorfo al gruppo da esso subordinato sopra F, e quindi ancora a un gruppo proiettivo sopra una quadrica o cono quadrico di S_3, si può aggiungere che (limitatamente all'ipotesi 1ª del nº 12) *il gruppo* G *è necessariamente* ∞^6 o ∞^7, e ha in ciascuno di questi casi composizioni ben determinate.

14. — Ad ogni curva p sulla superficie F corrisponde almeno un punto P della varietà M_3, tale che le γ uscenti da questo punto incontrano F sopra quella p; ma potrebbe anche darsi che ad una stessa curva p corrispondesse un numero finito $n>1$ di punti P. Ove ciò avvenga, ne risulterà definita sulla varietà M_3 un'involuzione di punti di ordine n, invariante rispetto al gruppo G, e tale che a due punti coniugati in essa corrisponderà sempre una stessa curva p sopra F.

Alla considerazione di quest' involuzione si collega quella delle superficie (che indicheremo con α) luoghi delle ∞^1 curve γ uscenti rispettivamente dai singoli punti di F. Fra queste superficie, complessivamente in numero di ∞^2, ve ne sono ∞^1 che passano per un punto qualunque P della varietà M_3: quelle, e quelle sole, che *escono* dai punti A della linea p corrispondente al punto P considerato. Ora, se nella M_3 esiste effettivamente un'involuzione invariante I_n del tipo dianzi considerato (essendo $n>1$), queste stesse ∞^1 superficie α passanti per P dovranno anche contenere gli $n-1$ punti coniugati di P nella detta involuzione (mentre invece nel caso $n=1$ non passerebbero per nessun altro punto variabile con P). *Il sistema* ∞^2 *delle superficie* α *apparterrà dunque all'evoluzione invariante* I_n *(supposta esistente).*

Ci converrà esaminare separatamente i due casi di $n=1$ e $n>1$; e cominciamo dal primo.

15. — Nel caso $n=1$ abbiamo già detto che le superficie α passanti per un punto generico della varietà M_3 non passano in conseguenza per nessun altro punto variabile col primo. — Possiamo aggiungere che per due punti generici della M_3 passano *due* superficie α (uscenti rispettivamente dai punti A intersezioni delle due curve p che corrispondono ai punti considerati). Il sistema (∞^2) delle α è dunque quadratico, e perciò contenuto in *un* sistema lineare ∞^3, che sarà pure invariante rispetto a G. Infine questo sistema lineare ∞^3 è omaloidico, perchè tre superficie α generiche (e tanto basta) hanno una sola intersezione variabile: infatti alle loro intersezioni devono corrispondere sopra F altrettante curve p distinte e passanti pei tre punti A da cui escono le stesse α; e di tali curve p non ve ne ha che una.

L'esistenza di questo sistema lineare omaloidico invariante permette di ridurre il gruppo G operante sulla nostra M_3, e quindi il gruppo cremoniano di S_3 a cui G si supponeva equivalente, a un gruppo proiettivo anche di S_3. Alle superficie α corrisponderanno ∞^2 piani formanti un inviluppo di 2ª classe; dunque il sistema dei piani tangenti a una quadrica, non degenere, o anche semplicemente degenere come inviluppo. Nel primo caso avremo *il gruppo proiettivo (continuo)* ∞^6 *di una quadrica non degenere;* nel secondo caso, un gruppo proiettivo con una conica fissa, la quale può supporsi coincidente coll'assoluto dello spazio euclideo; si tratterà perciò o del *gruppo* ∞^7 *delle similitudini,* o del *gruppo* ∞^6 *dei movimenti euclidei.* — Nel primo caso la stessa quadrica fissa è la superficie F, luogo dei punti A; e le tangenti a questa quadrica sono le linee γ. Nel secondo caso la superficie F si è ridotta ad una curva — la conica fissa —; ma i due gruppi relativi possono considerarsi come ottenuti per proiezione stereografica da gruppi proiettivi sopra una quadrica di S_4, sulla quale si sia fissato il punto centro di proiezione: il cono di rette uscente da questo punto è allora la superficie F, e le ∞^3 rette della quadrica sono le linee γ.

Abbiamo trovati dunque tre gruppi tipici:

1° *Gruppo continuo* ∞^6 *delle trasformazioni proiettive di* S_3 *che lasciano fissa una quadrica non degenere* (e ciascuno dei suoi sistemi di generatrici), ovvero anche *gruppo* ∞^6 *dei movimenti non euclidei;*

2° *Gruppo* ∞^7 *delle similitudini;*

3° *Gruppo* ∞^6 *dei movimenti euclidei.*

16. — Supponiamo ora che vi sia sulla varietà M_3 un'involuzione invariante I_n ($n \geq 2$), i cui gruppi si compongano di punti corrispondenti a una stessa curva p sopra F (cfr. n° 14). A quest' involuzione apparterranno allora tanto il sistema ∞^2 delle superficie α, quanto il sistema lineare ∞^3 in cui il precedente (essendo d'indice *due*) sarà pur sempre contenuto. Questo sistema lineare (Σ) non sarà dunque più omaloidico, ma permetterà di rappresentare l'involuzione I_n sullo spazio S_3, e la varietà M_3 sopra questo S_3 *multiplo* (n^{plo}), in modo che al gruppo G corrisponda ancora, in questo spazio, uno dei tre gruppi proiettivi trovati al n° prec. — È facile anzi vedere che, di questi tre gruppi, non potrà qui presentarsi che il 1° (ossia il gruppo proiettivo con una quadrica fissa). Infatti il nostro S_3 multiplo deve necessariamente ammettere una *superficie* di diramazione di ordine >1, perchè se no alle rette di esso corrisponderebbero sulla M_3 curve riducibili (1), e in particolare alle rette di

(1) È noto infatti che, sopra una curva irriducibile, un'involuzione razionale di ordine $n > 1$ (priva di punti fissi) ammette sempre almeno due gruppi distinti con elementi multipli.

un piano curve (anche riducibili) di una superficie del sistema Σ, formanti sopra questa superficie un sistema lineare ∞^2; ed è noto che le curve di un sistema lineare non possono tutte spezzarsi in due o più parti variabili — come qui avverrebbe —, a meno che queste parti non formino un fascio — il che invece non sarebbe possibile —. Di più, questa stessa superficie di diramazione dovrà essere invariante rispetto al gruppo proiettivo ottenuto in S_3. Ora, dei tre gruppi incontrati al n° prec., il primo soltanto trasforma in sè una superficie di ordine >1 (e precisamente una quadrica); dovrà dunque certo presentarsi questo caso.

Da questo gruppo proiettivo ∞^6 di S_3 si può estrarre un sottogruppo semplice ∞^3, il quale lasci fisso un piano generico; vi sarà perciò in G un sottogruppo analogo, il quale lascerà fissa una superficie generica del sistema Σ, e, sopra questa, l'involuzione di ordine n costituita dagli ∞^2 gruppi di I_n che vi sono contenuti. D'altra parte i tipi di gruppi proiettivi semplici ∞^3 sopra una superficie sono tutti conosciuti; e, fra questi, il solo gruppo proiettivo di una quadrica (non degenere) con una conica fissa soddisfa alla duplice condizione (qui richiesta) di trasformare in sè un'involuzione di ordine >1 (e precisamente un'involuzione quadratica) e una rete di curve irriducibili (coniche) appartenente a questa involuzione (e corrispondente al sistema delle rette del piano rappresentativo). *Sarà dunque necessariamente* $n=2$. Infine, uno spazio S_3 *doppio* avente come superficie di diramazione una quadrica non degenere si può rappresentare sopra una M_3^2 di S_4, in modo che alle trasformazioni proiettive di esso che lasciano fissa la quadrica di diramazione corrispondano le trasformazioni proiettive di questa M_3^2 che lasciano fisso un punto dello spazio S_4 esterno alla varietà stessa (potendosi l' S_3 doppio considerare come proiezione della M_3^2 da quest'ultimo punto) [1]. Concludiamo perciò che i gruppi di questa nuova categoria (caso $n>1$ del n° 14) devono tutti ridursi a un unico tipo: al *gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni proiettive di una quadrica di* S_4, *che lasciano fisso un punto di questo spazio esterno alla quadrica,* e quindi anche *una sezione iperpiana generica di questa*

---

(1) Di questa rappresentazione è fatto uso anche in EF, § 18.

quadrica (determinata cioè da un S_3 ad essa non tangente). Questo gruppo ∞^6 soddisfa appunto alle varie condizioni imposte; e le coppie di punti della quadrica allineate sul polo della sezione iperpiana fissa formano un'involuzione quadratica invariante rispetto al gruppo medesimo, la quale si trova nelle condizioni richieste per la I_n.

Questo gruppo ∞^6 si può ricondurre, per mezzo di una proiezione stereografica e (eventualmente) di una trasformazione proiettiva, a un gruppo di trasformazioni conformi, rispetto alle quali dovrà essere invariante una sfera (reale o immaginaria, ma non di raggio nullo).

Troviamo dunque come 4° tipo di questa categoria III il *gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera (non nulla).* Questo gruppo trasforma in sè l'involuzione razionale delle coppie di punti che, considerate come sfere nulle, appartengono ad un medesimo fascio contenente la sfera fissa.

17. — Passiamo ora ad occuparci di quei gruppi G che sopra ogni linea γ subordinano tutte le possibili ∞^3 trasformazioni proiettive (caso 2° del n° 12).

Consideriamo entro G quel sottogruppo (continuo) H, di dimensione $k-3$, che si ottiene imponendo come fisso un punto generico P della varietà M_3. Questo sottogruppo trasformerà in sè stessa la superficie Π, luogo delle ∞^1 curve γ uscenti da P. Da ogni punto di questa superficie esciranno pure ∞^1 curve γ, non contenute in generale in Π stessa; e, variando quest'ultimo punto, varieranno tali curve, assumendo in tutto ∞^3 posizioni diverse, descrivendo cioè l'intero complesso delle γ (sicchè ogni γ avrà (almeno) un punto comune con quella superficie Π).

Dico ora che questo sottogruppo H *deve coincidere con uno dei gruppi già studiati precedentemente* (e riducibili ai tipi dei n[i] 15 e 16). Basterà perciò far vedere che il gruppo H subordina ancora nell'intorno di un nuovo punto generico R della varietà M_3 lo stesso gruppo proiettivo ∞^3 (con un cono quadrico elementare invariante) subordinatovi dall'intero gruppo G; in altri termini, che le ∞^1 curve γ uscenti da R vengono permutate anche da H in tutti gli ∞^3 modi possibili. — Sopra ogni curva γ verranno però subordinate da H sole ∞^2 proiettività, con un punto fisso A; e questo punto avrà per luogo la stessa superficie Π contenente le γ che escono da P.

Consideriamo perciò la superficie luogo delle ∞^1 γ uscenti dal punto R, nonchè la curva r intersezione di questa superficie colla Π: al variare di R questa curva descriverà sopra Π un sistema al più ∞^3, invariante rispetto ad H.

Ora, la superficie Π può riferirsi birazionalmente al cono quadrico delle tangenti in P alle ∞^1 curve γ di cui essa è luogo, assumendo come omologhi due punti (rispett. di Π e di questo cono) i quali risultino uniti per le medesime operazioni di H (corrispondenza analoga a quella considerata al n° 9 tra le superficie φ e il piano π). In questo modo vengono a corrispondersi i gruppi (proiettivi, non integrabili) subordinati da H sopra quelle due superficie; e, dovendosi avere sul cono quadrico considerato un gruppo (proiettivo) non integrabile il quale operi in modo ∞^2 sopra ciascuna generatrice di esso, questo non potrà essere che il gruppo totale ∞^7, o il suo sottogruppo invariante ∞^6. In ambo i casi non esiste sul cono alcun sistema invariante di curve non passanti per P e di dimensione <3; e l'unico di dimensione $=3$ è quello delle sezioni piane. Le curve r su Π dovranno dunque corrispondere alle sezioni piane di questo cono; e su ciascuna di esse, quindi anche nella serie ∞^1 delle γ uscenti da un punto R, verranno subordinate da H ∞^3 trasformazioni.

Il sottogruppo H *di* G *rientra dunque a sua volta in uno dei tipi già incontrati di questa categoria III.*

Quale sarà questo tipo? Poichè gli attuali punti A hanno per luogo una superficie Π sulla quale viene subordinato un gruppo equivalente ad un gruppo proiettivo sopra un cono quadrico di S_3, dobbiamo trovarci nel 2° o 3° caso del n° 15; e diremo perciò:

Il sottogruppo H *di* G *è equivalente ad un gruppo proiettivo* (∞^6 o ∞^7) *sopra una quadrica non degenere di* S_4, *sulla quale si sia fissato un punto* P. Le linee γ sono le rette di questa quadrica; la superficie Π, il cono di rette uscente da P.

All'intero gruppo G corrisponderà sopra questa quadrica un gruppo di trasformazioni, le quali dovranno ancora mutare rette in rette, e coni di rette in coni di rette; dunque ancora un gruppo proiettivo. E questo gruppo, dovendo contenere tre parametri in più di H, sarà l'intero gruppo ∞^{10} delle trasformazioni proiettive di quella quadrica; non un gruppo ∞^9, perchè il gruppo proiettivo ∞^{10} di una quadrica non degenere di S_4 non contiene sottogruppi ∞^9 [1].

È noto poi che questo gruppo ∞^{10} si può ridurre a sua volta al gruppo di tutte le trasformazioni conformi di S_3. Troviamo pertanto come 5° ed ultimo tipo di questa categoria III *il gruppo* ∞^{10} *di tutte le trasformazioni conformi* (che mutano cioè le sfere in sfere).

18. — Con ciò è completamente risoluta la questione posta al principio di questo lavoro; ed è (nuovamente) dimostrato che *ogni gruppo continuo primitivo di trasformazioni cremoniane dello spazio si può ridurre, con un'opportuna trasformazione cremoniana, a un gruppo di trasformazioni proiettive o conformi.* Più particolarmente, ogni gruppo siffatto è riducibile a uno dei *nove* gruppi seguenti, i quali sono tutti birazionalmente distinti fra loro:

A. Gruppi proiettivi non conformi:

1° *Gruppo totale* ∞^{15};

2° *Gruppo lineare generale* ∞^{12} (o *gruppo delle affinità*);

3° *Gruppo lineare speciale* ∞^{11} (o *gruppo delle affinità equivalenti*);

4° *Gruppo* ∞^{10} *delle trasformazioni proiettive che mutano in sè stesso un complesso lineare non speciale;*

5° *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa una quadrica non degenere, e ciascuno dei due sistemi di generatrici su di essa* (equivalente al *gruppo dei movimenti di uno spazio* S_3 *non euclideo*);

B. Gruppi proiettivi e conformi ad un tempo, dunque gruppi di similitudini:

6° *Gruppo* ∞^7 *di tutte le similitudini;*

7° *Gruppo* ∞^6 *dei movimenti* (*euclidei*);

---

(1) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, p. 455; vol. III, pp. 258 e seg. Questa proprietà del gruppo proiettivo ∞^{10} di una M_3^2 non degenere di S_4 (o di un complesso lineare non speciale di S_3) può anche dimostrarsi geometricamente in modo semplice.

C. Gruppi conformi non proiettivi:

8° *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera* (*senza scambiarne i due sistemi di generatrici immaginarie*);

9° *Gruppo* ∞^{10} *di tutte le trasformazioni conformi.*

Questi stessi tipi furono anche trovati dal sig. LIE nella classificazione dei gruppi continui primitivi di trasformazioni *puntuali,* colla sola differenza che il nostro tipo 8° coincide per lui col 5°, al quale esso può infatti ridursi con una trasformazione (2, 1) — ma non con una trasformazione birazionale —.