GINO FANO

Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sé

Rendiconti Circ. Mat. Palermo, Vol. **11** (1897), p. 241–246

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1897_3>

UN TEOREMA SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CON INFINITE TRASFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ.

Nota di **Gino Fano**, in Roma.

Adunanza del 9 maggio 1897.

1. Nella mia Nota: *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè* (*) è dimostrato fra altri (benchè non vi sia esplicitamente enunciato) il teorema seguente: *Ogni superficie algebrica con un gruppo continuo primitivo di trasformazioni proiettive in sè si può riferire birazionalmente ad un piano in modo che a quel gruppo di trasformazioni proiettive su di essa corrispondano trasformazioni anche proiettive di questo piano* [e precisamente l'intero gruppo proiettivo ∞^8, oppure un gruppo ∞^6 o ∞^5 con una (sola) retta fissa].—Io mi propongo ora di precisare meglio questo risultato (**), determinando effettivamente *quali siano le superficie algebriche* Φ *di uno spazio qualunque, che ammettono un gruppo così fatto di trasformazioni proiettive.*

La questione equivale, come ognun vede, a quest'altra:

Quali sono i sistemi lineari Γ *di curve piane algebriche di un*

(*) Questi Rendiconti, vol. X, pag. 1 e seg.; cfr. in particolare n° 2.

(**) Il che non importava fare nella mia Nota citata; ma mi riescirà utile in seguito, per analoghe ricerche sulle varietà a tre dimensioni.

dato ordine qualunque n, che vengono trasformati in sè dall'intero gruppo proiettivo ∞^8 *del piano, oppure da un gruppo proiettivo* ∞^6 o ∞^5 *con una sola retta fissa* (in particolare dal gruppo delle *affinità* o delle *affinità equivalenti*)? Le due questioni coincidono, perchè, da un lato, ogni superficie Φ si può rappresentare sul piano in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le curve di un sistema lineare Γ; e, d'altra parte, ogni sistema lineare così fatto può essere assunto come rappresentativo di una superficie Φ.—(Si osservi che un sistema lineare Γ è necessariamente *semplice*, vale a dire quelle curve di esso che passano per un punto generico del piano non contengono di conseguenza nessun altro punto variabile col primo: ciò perchè i tre gruppi proiettivi testè considerati non trasformano in sè nessuna involuzione piana, e nessun fascio di curve. Di qui si trae che ogni sistema Γ — escluso soltanto, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, il sistema ∞^0 costituito dall'unica retta fissa, eventualmente anche contata più volte—o è una rete omaloidica, e precisamente quella delle rette, oppure ha la dimensione $\geqq 3$, e rappresenta perciò nel solito senso una certa superficie).

Evidentemente, il sistema lineare [di dimensione $\frac{1}{2}n(n+3)$] di *tutte* le curve piane algebriche di un dato ordine qualunque n è un sistema Γ; esso rappresenta una ben nota superficie di ordine n^2 dello spazio $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, la quale sarà quindi una superficie Φ (*). Ma vi saranno altre superficie Φ? Noi dimostreremo di no, e avremo quindi il teorema:

Le sole superficie (algebriche) di uno spazio qualunque, le quali ammettono un gruppo continuo primitivo di trasformazioni proiettive in sè (ossia un gruppo il quale non lasci fisso su di esse alcun sistema ∞^1 di curve), *sono le superficie di ordine* n^2 *appartenenti a uno spazio* $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, *che si possono rappresentare sul piano in modo che*

(*) Per $n=2$ si avrebbe la così detta *superficie di Veronese* (F_2^4 di S_5) (cfr. Veronese: *La superficie omaloide normale del quarto ordine...*; Mem. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XIX, 1883-84; Segre: *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano...*; Atti Acc. di Torino, vol. XX, 1885). Per $n=3$, cfr. Del Pezzo: *Sulle superficie dell'n^o ordine...* (questi Rend., vol. I).

alle loro sezioni iperpiane corrispondano le $\infty^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ *curve algebriche di ordine* n (*).

Ovvero anche: *Un gruppo continuo primitivo* (∞^8, ∞^6 o ∞^5) *di omografie piane non trasforma in sè nessun sistema lineare di curve algebriche di un dato ordine* n, *all'infuori del sistema di dimensione* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *di tutte le curve piane aventi quest'ordine* (e, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, dei sistemi formati da tutte le curve di un ordine $k < n$, alle quali si sia aggiunta, come componente fissa, la retta invariante contata $n - k$ volte).

Un terzo enunciato, equivalente a questi due, sarebbe il seguente:

Se ad una curva piana di un dato ordine n *si applicano tutte le* (∞^8, ∞^6 o ∞^5) *trasformazioni di un gruppo primitivo di omografie piane, si ha un'infinità di curve di quello stesso ordine, la quale appartiene al sistema lineare di dimensione* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *di tutte le curve piane di ordine* n (non è contenuta, cioè, in nessun sistema lineare di tali curve di dimensione inferiore)—purchè soltanto, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, la retta invariante non sia parte della curva considerata.

2. Questo teorema sulle curve piane e sui sistemi lineari di tali curve è analogo ad altro, già noto (**), sui gruppi di elementi di una forma fondamentale di prima specie: *Se ad un gruppo qualunque di* n *elementi di una forma semplice si applicano le* ∞^3 *trasformazioni del gruppo proiettivo sulla forma stessa, ovvero anche quelle di un sottogruppo* ∞^2 *o di un sottogruppo* ∞^1 *parabolico del gruppo medesimo* (purchè l'elemento unito fisso di questo sottogruppo non sia uno degli n prima considerati), *si ha un'infinità di gruppi di* n *elementi, la quale appartiene all'involuzione completa* I_n^n *sulla forma stessa.*

(*) Per il caso del gruppo ∞^8 questo stesso teorema fu già enunciato (ma non dimostrato) dal sig. Lie. (« *Theorie der Transformationsgruppen* », vol. III, pag. 786), il quale lo riportò da un manoscritto inedito del sig. Study (cfr. l. c.).

(**) E che si potrebbe anche dimostrare facilmente, al pari di questo, per induzione completa.

Ovvero anche: *Le sole involuzioni* I_n^r *sopra una forma di prima specie* (ossia *sopra un ente razionale qualunque*), *le quali vengano trasformate in sè dall'intero gruppo proiettivo* ∞^3, *o anche da un gruppo* ∞^2 *o* ∞^1 *parabolico sulla forma stessa* (*sull'ente razionale*), *sono l'involuzione completa di dimensione* $r = n$, *e* (nel caso di un gruppo ∞^2 o ∞^1) *le involuzioni anche complete* I_r^r, *alle quali si sia aggiunto come elemento fisso l'unico elemento unito contato* $n - r$ *volte.*

E infine (enunciato analogo al primo del n° 1): *Le sole curve algebriche* (*) *appartenenti ad uno spazio qualunque* S_n, *le quali ammettono* ∞^3 *o* ∞^2 *trasformazioni proiettive, o anche soltanto un gruppo* ∞^1 *parabolico di tali trasformazioni, sono le curve razionali normali di ordine* n *di questo stesso spazio.*

Sotto quest'ultima forma il teorema è stato dato dal sig. Lie (**) per il caso di un gruppo proiettivo almeno ∞^2; nel caso del gruppo parabolico ∞^1 esso è noto per $n = 2$ e $n = 3$ (***), e si dimostrerebbe analogamente per n qualunque.

Di questi teoremi noi ci varremo ora per dimostrare quelli enunciati al n° 1; e possiamo proporci in particolare di dimostrare ad es. il secondo dei tre enunciati. Basterà limitarci al caso del gruppo proiettivo ∞^5, perchè questo entra come sottogruppo in tutti gli altri; sicchè il teorema, dimostrato vero in questo caso, lo sarà *a fortiori* per i gruppi ∞^6 e ∞^8.

Si abbia dunque in un piano un sistema lineare ∞^k (Γ) di curve algebriche di ordine n, il quale venga trasformato in sè dal gruppo proiettivo *speciale* ∞^5 (G) con una retta invariante r; retta che supponiamo non essere componente fissa di tutte le curve del sistema. Tali curve segheranno sopra r un'involuzione di ordine n, che dovrà essere trasformata in sè da tutte le ∞^3 proiettività subordi-

---

(*) L'algebricità della curva non è nemmeno ipotesi necessaria perchè il teorema sussista (o, per dir meglio, le curve soddisfacenti al teorema sono già necessariamente algebriche). Per gruppo ∞^1 parabolico deve allora intendersi quello che, nello spazio S_n, ha un solo punto unito fisso $(n + 1)^{plo}$

(**) Op cit., vol. III, pag. 187; per $n = 3$ e $n = 2$ cfr. anche Klein-Lie: Compt. Rend., vol. LXX, 1870; Math. Ann., vol. IV.

(***) Klein-Lie, l. c. Vedi anche Pittarelli: Annali di Mat., ser. 2ª, t. XXII.

nate da G sopra r stessa. Quest'involuzione sarà perciò di dimensione n; e per un gruppo qualunque di essa passeranno ancora infinite curve del sistema Γ. Ciò si vede subito, applicando a una curva qualunque del sistema le diverse omologie di asse r contenute in G (e queste sono precisamente le ∞^2 omologie *speciali* di asse r).—Nel sistema lineare Γ (che avrà una dimensione $\geqq n+1$) vi saranno dunque certo delle curve riducibili composte della retta r e di una parte residua di ordine $n-1$: tali curve residue formeranno (per $n > 1$) un sistema lineare Γ' di dimensione $k-n-1$ (perchè l'involuzione segata da Γ sopra r è di dimensione n), il quale verrà pure trasformato in sè dal gruppo G.—Dico ora che la curva generica di questo sistema residuo non potrà contenere ancora r come parte fissa; vale a dire, in altri termini, che non è possibile che tutte le curve del sistema Γ (primo considerato), le quali contengono come parte la retta r, la contengano necessariamente come linea almeno doppia. Trasformiamo infatti una curva generica γ di Γ mediante un'omologia speciale di asse r, e sia γ' la curva così ottenuta (la quale incontrerà r negli stessi punti di γ); nel fascio determinato da γ e γ' (e che è tutto contenuto in Γ) vi sarà allora *una* curva contenente r come parte. Perchè r fosse componente almeno doppia di questa curva, bisognerebbe che γ e γ' avessero, nelle comuni loro intersezioni con quella retta, le stesse tangenti; e ciò si può sempre evitare, prendendo il centro dell'omologia considerata (sopra r, ma) fuori di queste intersezioni.—Il sistema Γ' non contiene dunque la r come parte fissa di ogni sua curva; e abbiamo perciò questo primo risultato:

Se il gruppo G considerato trasforma in sè stesso un sistema lineare ∞^k di curve algebriche di ordine $n > 1$ non contenenti la retta invariante r come parte fissa, esso deve anche trasformare in sè un sistema lineare di curve di ordine $n-1$ non contenenti del pari la r come parte fissa, e avente la dimensione $k-n-1$ (la quale sarà $\geqq 2$).

Questo secondo sistema è il residuo della retta r rispetto al primo.

Ciò premesso, il teorema del n° 1 si dimostra facilmente per induzione completa. Esso è vero infatti per $n = 1$; basterà perciò dimostrare che, ammesso che sussista per tutti gli ordini inferiori ad un dato valore qualunque n, esso dovrà risultare verificato anche per questo stesso ordine n. — Siamo dunque autorizzati a supporre che il sistema Γ' (di curve di ordine $n - 1$, non contenenti la r come parte fissa) abbia la dimensione massima $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$; vale a dire che sia:

$$k - n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2);$$

e allora sarà pure:

$$k = \frac{1}{2}n(n+3)$$

come appunto si voleva dimostrare.

3. Il teorema testè dimostrato per i sistemi lineari di curve piane si può anche estendere facilmente a uno spazio qualunque S_r, avvertendo però che i gruppi proiettivi analoghi a quelli da noi considerati nel piano non saranno più i soli gruppi proiettivi *primitivi*. Già per $r = 3$ sono anche primitivi il gruppo proiettivo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale, il gruppo ∞^7 delle similitudini, e quello ∞^6 dei movimenti Euclidei o anche non Euclidei (*); tutti gruppi i cui analoghi nel piano sono imprimitivi.

(*) Lie: op. cit., vol. III, pp. 139, 140, 227.

Ripetendo lo stesso nostro ragionamento, e valendoci dei sistemi lineari di varietà M^n_{r-2} di S_{r-1} come noi ci siamo valsi delle involuzioni I_n in una forma di prima specie ($r = 2$), si potrebbero dimostrare, anche per induzione completa (rispetto ad r), i teoremi seguenti:

Se ad una varietà M^n_{r-1} di uno spazio S_r si applicano tutte le [$\infty^{r(r+2)}$] *trasformazioni del gruppo proiettivo di S_r medesimo, o anche soltanto quelle* [$\infty^{r(r+1)}$] *proiettività che lasciano fisso un iperpiano arbitrario, oppure quelle del gruppo speciale $\infty^{r(r+1)-1}$ contenuto invariantivamente nel precedente* (purchè in questi ultimi due casi l'iperpiano fisso non sia parte della varietà M^n_{r-1} considerata), *si ha un sistema di infinite varietà M^n_{r-1}, il quale appartiene al sistema lineare di dimensione $\binom{n+r}{r} - 1$ di tutte le varietà M^n_{r-1} di S_r.*

E quindi anche: *I tre gruppi proiettivi di S_r dianzi menzionati non trasformano in sè nessun sistema lineare di varietà M_{r-1} di un ordine qualunque n, all'infuori del sistema lineare di dimensione $\binom{n+r}{r} - 1$ di tutte le varietà aventi quest'ordine* (e, nel caso di un gruppo con un iperpiano fisso, dei sistemi formati da tutte le varietà di un ordine $k < n$, alle quali si sia aggiunto quello stesso iperpiano contato $n - k$ volte).

E infine: *Le sole varietà algebriche M_r di uno spazio qualunque, le quali ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè, tale che, fissato un loro punto generico, risulti subordinato nella stella ∞^{r-1} delle direzioni uscenti da questo punto l'intero gruppo proiettivo ∞^{r^2-1}, sono le varietà razionali di ordine n^r appartenenti a spazi $S_{\binom{n+r}{r}-1}$, che si possono rappresentare sopra S_r in modo che alle loro sezioni iperpiane corrisponda il sistema lineare di tutte le varietà M_{r-1} di ordine n.*

Quest'ultimo teorema dice anche di più dei due precedenti; esso si basa ancora sopra un teorema del sig. Lie (*), in forza del quale ogni gruppo puntuale di S_r che nell'intorno di un punto generico, imposto come fisso, subordina l'intero gruppo proiettivo ∞^{r^2-1}, è simile a uno dei tre gruppi proiettivi di S_r stesso dianzi considerati; e sulla possibilità di trasformare il primo gruppo nel secondo, ove si tratti di un gruppo birazionale, con una trasformazione anche birazionale. Che ciò sia possibile, fu da me dimostrato finora nel solo caso di $r = 2$ (**); ma anche questa dimostrazione si estende facilmente al caso di r qualunque.

Roma, aprile 1897.

GINO FANO.

(*) Op. cit., vol. I, pag. 631.

(**) Cfr. la mia Nota cit. di questi Rendiconti, vol. X.