Federigo Enriques, Gino Fano

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio

Annali Mat. Pura Appl., Serie 2, Vol. **26** (1897), p. 59–98

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1897_2>

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.

(*Di* Federigo Enriques *a Bologna e* Gino Fano *a Roma*)

Oggetto di questa Memoria è la classificazione dei gruppi continui di trasformazioni birazionali (o cremoniane) dello spazio, cioè la *riduzione* di essi *a tipi* determinati, *mediante trasformazioni birazionali.*

Fra questi gruppi si presentano subito quattro categorie, come naturale estensione dei gruppi cremoniani tipici del piano: i gruppi proiettivi, i gruppi conformi (gruppi di trasformazioni che mutano una sfera in una sfera) ed i gruppi (che si possono chiamare) *di Jonquières generalizzati*, cioè quelli che posseggono una stella invariante di rette o un fascio invariante di piani.

Lo studio dei gruppi di queste quattro categorie è stato in parte già effettuato (pei gruppi proiettivi e conformi), ed in parte (pei gruppi di Jonquières generalizzati) si potrebbe facilmente effettuare, riducendosi a casi già noti, valendosi cioè di una opportuna composizione dei gruppi binari e dei gruppi cremoniani di varietà a due dimensioni.

Appare dunque naturale che si cerchi — come noi appunto abbiamo cercato — di ricondurre birazionalmente i vari gruppi cremoniani a *tipi* appartenenti ad una delle quattro categorie nominate, o almeno di vedere in quali casi questa riduzione risulta possibile. E ciò accade invero per *tutti* i gruppi cremoniani, *fatta eccezione* soltanto per *due* tipi ben definiti di gruppi ∞^3, i quali si distaccano da tutti i rimanenti, e ciascuno dei quali si può caratterizzare in modo sufficiente. Ecco precisamente i risultati della nostra analisi.

I gruppi cremoniani primitivi sono riducibili (birazionalmente) a *gruppi proiettivi* o *conformi* (era nota soltanto la possibilità di eseguire questa riduzione mediante una trasformazione *puntuale*).

I gruppi imprimitivi sono riducibili a *gruppi di Jonquières generalizzati*, fatta eccezione per *tre* tipi di gruppi (semplici, transitivi) ∞^3, nei quali le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico dello spazio formano gruppi finiti oloedricamente isomorfi ai gruppi dei poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro). Tuttavia nel *caso tetraedrico* il gruppo ∞^3 si riduce ancora ad un *gruppo conforme.*

I gruppi corrispondenti al *caso ottaedrico* ed *icosaedrico* sono riducibili rispett. a due tipi ben definiti, composti il primo di ∞^3 *trasformazioni cubiche*, il secondo di ∞^3 *trasformazioni del 7.º ordine.*

In conclusione: *i gruppi continui di trasformazioni birazionali dello spazio si possono ricondurre birazionalmente a gruppi proiettivi o conformi, oppure a gruppi di Jonquières generalizzati, o infine a due tipi ben definiti di gruppi* (semplici, transitivi) ∞^3 *rispett. dell'ordine 3 e 7.*

Proposizioni preliminari.

1. Due osservazioni fondamentali ci saranno utili nel nostro studio. La prima è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio o è algebrico, o è contenuto in un gruppo più ampio algebrico.

Questa proprietà spetta come è noto ai gruppi continui di trasformazioni birazionali di una qualsiasi varietà algebrica (Picard, Painlevé, Castelnuovo e Enriques). Essa ci permette di limitarci, senza introdurre con ciò restrizioni, alla considerazione di gruppi algebrici.

2. La seconda osservazione fondamentale è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio lascia invariati infiniti sistemi lineari (ampi quanto si vuole) *di superficie algebriche.*

Per costruire un tale sistema invariante rispetto ad un gruppo dato, basta p. e. partire da un qualsiasi sistema continuo (lineare o no) di superficie: i sistemi trasformati di questo formeranno un *corpo* di superficie aventi un certo ordine n, ed il minimo sistema lineare a cui questo corpo appartiene, od anche il sistema lineare completo determinato dal medesimo gruppo base, forniranno dei sistemi invarianti (cioè dei nuovi corpi) pel dato gruppo di trasformazioni (*).

(*) Cfr. Enriques, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano.* Rendic. Accad. dei Lincei, Maggio 1893.

L'osservazione precedente si può anche enunciare dicendo che « ogni gruppo cremoniano dello spazio è simile ad un gruppo proiettivo di un certo spazio S_n »: invero, se si costruisce pel gruppo proposto un sistema lineare invariante di superficie algebriche avente una certa dimensione n ($\geqq 3$), si ha subito una varietà razionale V_3 di S_n rappresentata sullo spazio ordinario da quello stesso sistema lineare di superficie, ed un gruppo proiettivo di S_n che opera sulla V_3 come il nostro gruppo cremoniano opera nello spazio.

Affinchè questa rappresentazione della V_3 riesca biunivoca, basta soltanto supporre che il sistema invariante costruito sia *semplice*, vale a dire che le superficie di esso passanti per un punto generico non passino in conseguenza per altri punti variabili: questa condizione, come è chiaro, può soddisfarsi in infiniti modi, data l'arbitrarietà che compare nella costruzione del sistema.

3. Dalla similitudine dei gruppi cremoniani dello spazio S_3 con gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n si deducono subito alcune conseguenze delle quali dovremo spesso far uso in seguito. Le enunciamo qui esplicitamente:

a) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano, il quale subordini su di essa almeno ∞^2 trasformazioni diverse, è una curva algebrica e razionale (*).

b) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale, subordini su di essa almeno ∞^1 trasformazioni diverse, è una curva razionale (**).

c) Ogni superficie invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale operi transitivamente sui punti di essa, è una superficie algebrica e razionale (***).

Queste proposizioni non sono che la traduzione immediata dei noti teoremi relativi alle curve e alle superficie con trasformazioni proiettive in sè, cui abbiamo alluso nelle citazioni precedenti.

d) Ogni curva (invariante) luogo di punti uniti per le trasformazioni cremoniane di un gruppo continuo, è una curva algebrica, oppure è contenuta in una superficie algebrica, luogo anch'essa di punti uniti.

(*) Klein-Lie, *Comptes Rendus*, 1870; Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, s. 187.

(**) L. c.

(***) Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* Atti Istituto Veneto, ser. VII, tom. IV e V, 1893; Fano, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* Rend. Acc. dei Lincei, Febbraio 1895.

Ogni superficie luogo di punti uniti per le trasformazioni di un gruppo cremoniano continuo è una superficie algebrica.

Per stabilire quest'ultima proposizione basta osservare che i punti uniti delle omografie di un S_n sono isolati, oppure costituiscono degli spazi lineari, e questi ultimi possono segare una varietà algebrica (invariante) V_3 soltanto secondo curve o superficie algebriche (luoghi di punti uniti su V_3).

Gruppi primitivi.

4. I gruppi primitivi di trasformazioni puntuali dello spazio sono stati classificati dal sig. Lie (*), il quale ha dimostrato che ogni gruppo siffatto può essere ricondotto con una trasformazione puntuale:

a) al gruppo ∞^{10} delle trasformazioni conformi;

b) oppure ad uno dei seguenti gruppi proiettivi:

1) gruppo ∞^{15} di tutte le omografie;
2) gruppo ∞^{12} delle affinità;
3) gruppo ∞^{11} delle affinità equivalenti;
4) gruppo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale;
5) gruppo ∞^{6} di una quadrica non specializzata (movimenti non euclidei);
6) gruppo ∞^{7} delle similitudini;
7) gruppo ∞^{6} dei movimenti (euclidei).

Questa riduzione vale in particolare anche per i gruppi cremoniani, in quanto si tratti di classificarli dal punto di vista gruppale. Ma nuovi tipi possono presentarsi (ed effettivamente si presentano) allorchè si tratta di trovare i gruppi cremoniani birazionalmente distinti. Può infatti accadere che la trasformazione puntuale che riconduce un gruppo cremoniano dato ad uno dei gruppi enumerati non sia birazionale.

5. Si abbia un gruppo cremoniano algebrico, primitivo, Γ, ed un gruppo Γ' appartenente ad uno dei tipi *a*) o *b*), trasformato di Γ mediante una trasformazione puntuale. Per comodità di linguaggio designeremo con Σ e Σ' gli spazi in cui sono dati rispett. i due gruppi Γ e Γ'.

(*) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, s. 122-140.

Qualunque sia il tipo di Γ', esistono certo in questo gruppo infinite trasformazioni, che lasciano fermi tutti i punti di una retta (di Σ'), senza lasciar fermi contemporaneamente tutti i punti di una superficie passante per questa retta. Di qui si trae che le curve C dello spazio Σ corrispondenti alle rette dello spazio Σ' debbono essere *algebriche*. Infatti le infinite trasformazioni di Γ che lasciano fissi tre punti di una C costituiscono un sottogruppo algebrico di Γ, pel quale la C è una curva di punti uniti non contenuta in una superficie di punti uniti (cfr. il lemma d, § 3). Ma possiamo anche riconoscere facilmente che le curve C [trasformate delle rette di Σ', o parti irriducibili (variabili) di queste trasformate] sono *razionali*. Infatti le trasformazioni di Γ che lasciano invariata una C costituiscono un sottogruppo algebrico, le cui operazioni scambiano i punti di C in almeno ∞^1 modi (perchè lo stesso appunto accade in Σ', fissando una retta relativamente a Γ'): la razionalità delle C segue dunque dai lemmi a) b) del § 3.

Infine osserviamo che nello spazio Σ due punti individuano *una* C che passa per essi, poichè altrimenti tutte le trasformazioni di Γ che lasciano fermi i punti di una C dovrebbero lasciare ferma la superficie (passante per la detta C) luogo delle C che si appoggiano alla nominata in un punto fisso ed in un secondo punto variabile; mentre, se in Σ' si fissano tutti i punti di una retta, le trasformazioni di Γ' così ottenute non lasciano ferma alcuna superficie per questa retta.

6. Ciò posto consideriamo le superficie F dello spazio Σ che corrispondono ai piani dello spazio Σ' nella trasformazione puntuale che fa corrispondere Γ a Γ': le F sono algebriche e razionali, poichè contengono una rete di curve razionali C: *esse formano un sistema lineare* ∞^3, perchè due punti di Σ individuano una C (sezione di due F) passante per essi (*); e questo sistema lineare $|F|$, ad intersezioni variabili razionali, è invariante rispetto al gruppo Γ se Γ', appartiene ad uno dei tipi b), ossia è un gruppo proiettivo. Se invece Γ' appartiene al tipo a), ossia è il gruppo conforme ∞^{10}, si vede facilmente che il sistema costruito sarà contenuto in un sistema lineare invariante ∞^4 (che indicheremo ancora con $|F|$) corrispondente al sistema delle sfere di Σ', e tale che le intersezioni variabili di due superficie sieno ancora razionali.

(*) Cfr. Enriques, *Una questione sulla linearità*, ecc. Rend. Accad. dei Lincei, Giugno 1893.

In ogni caso il detto sistema invariante $|F|$ è contenuto in *un* sistema lineare invariante completo, cioè determinato dal gruppo base.

Ora i sistemi lineari completi, almeno ∞^3, di superficie algebriche ad intersezioni variabili razionali si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti tipi (*):

1) sistema di superficie d'ordine n con una retta base $(n-1)^{\text{pla}}$;
2) sistema delle quadriche tangenti in un punto ad un piano dato;
3) sistema delle quadriche per una conica, p. e. sistema delle sfere;
4) sistema dei piani.

Si può dunque assumere come tipo del gruppo Γ, trasformandolo birazionalmente in Σ, un gruppo che lasci invariato un sistema lineare appartenente ad uno dei tipi 1) 2) 3) 4). Ma nei casi 1) e 2) questo gruppo non risulta primitivo, e quindi anche Γ non potrebbe essere tale. Concludiamo dunque che:

Ogni gruppo cremoniano primitivo dello spazio può ricondursi con una trasformazione birazionale:

1) *ad un gruppo proiettivo,*
2) *o ad un gruppo conforme.*

Resterebbero ora a determinare i singoli gruppi primitivi proiettivi e conformi. Quelli proiettivi sono noti, e sono quelli stessi enumerati come tipi di gruppi puntuali. Nel gruppo conforme totale (∞^{10}) si troverebbe un solo tipo di sottogruppo primitivo che non si lascia ricondurre birazionalmente (ma solo con una trasformazione [2, 1]) ad un gruppo proiettivo: tale è *il gruppo delle trasformazioni conformi che lasciano fissa una sfera data*, il quale nasce appunto con una trasformazione [1, 2] dal gruppo proiettivo (∞^6) di una quadrica non specializzata.

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad integrazioni variabili iperellittiche.* Mathematische Annalen, Bd. 46. La riduzione si applica ai sistemi *semplici* (v.$^{\text{i}}$ l. c.); ma tali sono appunto sempre i sistemi completi ad intersezioni razionali e di dimensione $\geqq 3$, essendo completo il sistema di curve segato sopra una superficie qualunque del sistema dalle rimanenti.

Gruppi algebrici semplicemente infiniti.

7. Si abbia nello spazio un gruppo cremoniano algebrico ∞^1. Le traiettorie C dei vari punti saranno curve algebriche e razionali (§ 3, lemma *b*), formanti una congruenza del 1.° ordine, e sopra ciascuna di queste curve vi saranno *due* punti uniti. Se questi punti coincidono per ogni C (se si tratta cioè di un gruppo parabolico) il luogo dei punti stessi sarà una superficie (che potrà anche ridursi ad una curva o all'intorno di un punto fisso) unisecante le curve C.

Escludiamo questo caso, e dimostriamo che anche in ogni altro caso esiste una varietà (superficie, curva, ecc.) unisecante le curve C della congruenza. Lo scopo della dimostrazione è di poter poi applicare un risultato noto (*), che permetterà di ricondurre con una trasformazione birazionale la congruenza delle curve C ad una stella di raggi.

Consideriamo perciò un gruppo proiettivo ∞^1 di un certo S_n equivalente al gruppo proposto (operante sopra una V_3 rappresentata birazionalmente sullo spazio), e chiamiamo ugualmente C le traiettorie di questo gruppo. Possiamo supporre che le C sieno prive di punti doppi; basta infatti osservare che, in caso opposto, questi punti doppi dovrebbero essere punti uniti per le omografie del gruppo; allora, considerando un sistema lineare invariante di varietà algebriche passanti per tutti quei punti uniti, si potrebbe trasformare la V^3 in un'altra varietà di un altro spazio, ed il gruppo proiettivo dato in un altro gruppo le cui traiettorie risulterebbero prive di punti doppi. (Il ragionamento cadrebbe in difetto se il gruppo proiettivo equivalente al gruppo dato fosse un gruppo di S_3, e si avesse una (vera) superficie come luogo di punti uniti; ma allora questa sarebbe un piano, ed il gruppo si comporrebbe di omologie, sicchè la conclusione sussisterebbe ancora.)

Ciò posto, sia F il luogo dei punti uniti pel nostro gruppo proiettivo sulle traiettorie C appartenenti alla varietà (invariante) V_3. Dico che F non può essere una varietà unica irriducibile, bisecante le C, ma deve necessariamente spezzarsi in due luoghi (curve, superficie, ecc.) unisecanti le C. Sup-

(*) Estensione di un teorema di Nöther. Cfr. Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione D'un' equazione algebrica* $f(x\,y\,z)=0$, ecc. Mathem. Annalen, Bd. 49, n.° 15.

porremo perciò che F sia una varietà irriducibile bisecante le C; e faremo vedere che si cade in un assurdo.

Essendo la F un luogo di punti uniti pel nostro gruppo proiettivo, lo spazio lineare (minimo) S_r cui F appartiene risulterà tutto costituito di punti uniti; in particolare risulteranno anche costituite di punti uniti le rette che uniscono le coppie di punti uniti di una (qualunque) curva C. Ora ciò è assurdo, perchè lo spazio lineare (S_h) cui appartiene la C dovrebbe allora contenere anche infiniti iperpiani (S_{h-1}) uniti, e quindi sulla C stessa (generica) verrebbe subordinato dal gruppo ∞^1 soltanto un numero finito di trasformazioni (proiettive).

Resta dunque provata l'esistenza di un luogo di punti unisecante le traiettorie C del gruppo proiettivo su V_3, ovvero, ciò che è lo stesso, del gruppo cremoniano di S_3 (perchè appunto F dovrà spezzarsi in due parti, contenenti ciascuna *un* punto di ogni C).

Se ne deduce (come abbiamo già avvertito):

Ogni gruppo cremoniano ∞^1 algebrico dello spazio si può trasformare birazionalmente in guisa che le traiettorie dei punti divengano le rette di una stella.

La stella è naturalmente invariante per tale gruppo. Si noti che si può anche supporre che *il centro della stella sia unito sopra ogni singolo raggio;* basta far corrispondere all'intorno di questo punto uno dei luoghi di punti uniti delle traiettorie C.

Gruppi la cui riduzione si può far dipendere da quella dei gruppi ∞^1.

8. *Gruppi doppiamente intransitivi.* I gruppi cremoniani algebrici doppiamente intransitivi portano un punto generico dello spazio nei punti di una curva algebrica C. Queste curve C si possono dunque considerare come le traiettorie di un sottogruppo ∞^1 (algebrico) del gruppo dato. Si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico due volte intransitivo si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariate le rette di una stella (ma non sempre il centro di essa.)

9. *Gruppi integrabili.* I gruppi integrabili (*) posseggono sempre un sottogruppo ∞^1 invariante. Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, questo

(*) Lie, op. cit., Bd. I, s. 265; Bd. III, s. 679, 681.

sottogruppo ∞^1 invariante dovrà pure essere algebrico se è unico, ed in caso diverso potrà essere scelto algebrico. Questa conclusione si ricava dall'esame dei gruppi proiettivi integrabili di cui il Lie (*) ha assegnato il tipo, tenendo sempre presente l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 a gruppi proiettivi che lasciano ferma una varietà razionale V_3 di uno spazio opportuno.

Ecco il ragionamento a cui conviene ricorrere.

Ogni gruppo proiettivo integrabile Γ' di S_n lascia fisso (almeno) un punto di S_n, una retta per questo punto, un piano per questa retta, ecc. Consideriamo il più ampio gruppo Γ definito da queste condizioni; gruppo che è certamente algebrico. Da esso si può staccare algebricamente (come è noto, e evidente) una successione di sottogruppi invarianti, le cui dimensioni decrescono di una unità per volta. Fra questi se ne troverà uno che ha comune col sottogruppo (algebrico) Γ' precisamente ∞^1 trasformazioni, le quali formeranno un sottogruppo algebrico invariante (∞^1) di Γ'.

Ciò posto, si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico integrabile si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciar fissa una stella di rette.

Basta infatti considerare un sottogruppo algebrico ∞^1 invariante nel gruppo dato, e trasformare in una stella di rette la congruenza delle sue traiettorie.

10. *Corollario. Gruppi* ∞^2. I gruppi ∞^2 essendo integrabili (**), si può applicare ad essi il resultato precedente. Ma in questo caso si può anche dire di più.

Si abbia un gruppo cremoniano algebrico ∞^2 semplicemente intransitivo, tale cioè che i punti dello spazio descrivano, per effetto delle trasformazioni di esso, delle *superficie* F, che saranno algebriche e razionali, e formeranno un fascio. Il sottogruppo ∞^1 invariante del gruppo stesso (o, se questo gruppo è permutabile, un qualunque suo sottogruppo ∞^1 algebrico) darà luogo ad una congruenza invariante del 1.° ordine di curve razionali C; sopra ogni F vi sarà un fascio invariante di tali curve.

Ora noi vogliamo dimostrare che le superficie F si possono trasformare birazionalmente nei piani di un fascio — ossia nei piani per una retta a —, facendo in pari tempo corrispondere alle curve C le rette di una stella col centro A su a.

(*) Op. cit., Bd. I, s. 589; Bd. III, s. 262, 681.

(**) Lie, op. cit., Bd. I, s. 713.

Infatti si può procedere nel seguente modo. In primo luogo si può far corrispondere biunivocamente ad ogni F un piano α per a, ed alle C sopra una F le rette per A nel corrispondente piano α: ciò segue da un noto teorema del sig. NOETHER (*), applicato alla varietà ∞^2 delle curve C. In secondo luogo, considerando una superficie unisecante le C, si può riferire punto per punto ogni C alla retta corrispondente.

Con ciò si ottiene la trasformazione birazionale cercata, per la quale ogni F risulta rappresentata sul piano corrispondente.

Resta così stabilito che:

Ogni gruppo cremoniano algebrico ∞^2 si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariati i singoli piani d'un fascio, nonchè una stella di rette col centro sull'asse del detto fascio.

11. *Gruppi semplicemente intransitivi.* Alle considerazioni svolte pei gruppi ∞^2 si collega la riduzione di tutti i gruppi cremoniani algebrici semplicemente intransitivi, cioè di quei gruppi pei quali i punti dello spazio descrivono *superficie* (razionali) F di un fascio. In un tal gruppo esiste infatti sempre un sottogruppo algebrico ∞^1, il quale darà sopra ogni F un fascio di traiettorie razionali C. Benchè questi fasci di curve C, sopra le singole F, non sieno ora (in generale almeno) invarianti rispetto all'intiero gruppo proposto, essi ci danno tuttavia il mezzo di trasformare contemporaneamente (come nel caso dei gruppi ∞^2) tutte le F nei piani per una retta, e questi piani (non i fasci di rette ottenuti su di essi) risulteranno invarianti pel gruppo trasformato.

Concludiamo dunque:

Ogni gruppo cremoniano algebrico semplicemente intransitivo si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lasci invariati i piani d'un fascio.

12. *Gruppi transitivi imprimitivi, ∞^4 almeno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano algebrico Γ, ∞^4 almeno, transitivo, il quale lasci invariata una serie ∞^1 di superficie F. Dimostriamo anzitutto che, se tale serie non è composta di superficie algebriche, se ne può sempre costruire un'altra, composta di superficie algebriche, la quale pure costituisca un sistema d'imprimitività pel gruppo Γ: anzi la nuova serie che verrà costruita risulterà un fascio, se era un fascio la prima.

(*) *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, Bd. III.

Supponiamo dunque che le F non sieno algebriche.

Vi sono certo in Γ infinite trasformazioni, e, fra queste, ∞^1 costituenti un gruppo continuo algebrico, le quali lasciano fermo un punto generico P dello spazio, e quindi la superficie F (o ciascuna delle F) per questo punto. Vi è dunque sopra ogni F uno ed un solo fascio di curve algebriche razionali (traiettorie del gruppo ∞^1 considerato): invero, in ogni altro caso, o la F sarebbe luogo di punti uniti pel gruppo ottenuto fissando P, oppure sopra di essa si avrebbero, variando il punto P, fasci differenti di curve razionali; e in ambo i casi la F stessa dovrebbe essere algebrica.

Ora consideriamo gli infiniti fasci di curve algebriche C, appartenenti rispett. alle varie superficie F; essi danno luogo ad una congruenza (algebrica) di curve C, che sarà invariante pel gruppo Γ. Questa congruenza è certo del 1.° ordine, se la serie delle F è un fascio; e, ogni qual volta sia del 1.° ordine, essa è certo razionale, perchè le curve C incontreranno un piano generico secondo i gruppi di punti di una involuzione (*). Se invece la congruenza delle C è di ordine > 1, potremo pur sempre concludere che essa o è razionale (cioè riferibile ad un piano), oppure è riferibile (elemento per elemento) a una superficie rigata ellittica; ciò perchè, non potendo ora le C essere contemporaneamente fisse (cioè traiettorie) per nessun sottogruppo ∞^1 di Γ, esse verranno certo scambiate da questo gruppo (che è algebrico) in almeno ∞^4 (e basterebbe anzi in ∞^3) modi diversi (**).

Nel caso della rigata ellittica, alle generatrici di questa corrisponderanno ∞^1 fasci algebrici di curve C, e quindi ∞^1 superficie algebriche costituenti una serie invariante pel gruppo Γ.

Se invece la congruenza delle curve C è razionale, il gruppo Γ, in quanto opera sugli elementi (C) di questa congruenza, può essere rappresentato con un gruppo proiettivo che operi sui punti di una superficie (razionale) φ di un conveniente spazio S_n (riferita alla congruenza). Questo gruppo proiettivo dovrà scambiare tra loro ∞^1 linee trascendenti W su φ, corrispondenti agli ∞^1 fasci di curve C che appartengono alle singole F; di qui si trae facilmente che il detto gruppo proiettivo operante sui punti di φ è precisa-

(*) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Rend. Acc. dei Lincei, Ottobre 1893; Math. Ann., Bd. 44.

(**) Castelnuovo e Enriques, *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes;* Compt. Rend. de l'Ac. des Sc., 1895. Cfr. anche: *Sur quelques récents résultats*...; Math. Ann., Bd. 48, § 46.

mente ∞^2 e composto di operazioni permutabili, giacchè ognuna di quelle linee W (essendo trascendente) ammette solo ∞^1 trasformazioni proiettive in sè, e non può essere luogo di punti uniti per infinite proiettività che non lascino fermi anche tutti i punti di φ. Esisterà quindi su φ almeno un fascio invariante di curve razionali, corrispondentemente a un sottogruppo ∞^1 algebrico (certo esistente) del gruppo permutabile ∞^2 su φ. A questo fascio corrisponderà nella congruenza delle C una serie ∞^1 di superficie algebriche, composte ciascuna con ∞^1 C; e tale serie sarà invariante pel gruppo Γ. La serie stessa sarà un fascio se la congruenza delle C è del 1.° ordine, e quindi certo se era un fascio la serie delle F.

Dunque, in ogni caso, i gruppi cremoniani, algebrici, transitivi, ∞^4 algebrici meno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie, lasciano invariata anche una serie ∞^1 di superficie *algebriche* (come avviene anche pei gruppi intransitivi). Dovremo ora distinguere i due casi, in cui la serie nominata sia un *fascio*, oppure una *serie d'indice* > 1.

13. *Fascio invariante di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, il quale lasci invariato un fascio di superficie F.

Il gruppo Γ può essere supposto algebrico, giacchè in caso opposto basterebbe ampliarlo convenientemente. Similmente (per il § prec.) le superficie F possono supporsi algebriche, altrimenti basterebbe sostituire il fascio delle F con un altro fascio invariante di superficie algebriche.

Esiste in Γ un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme (tre e quindi) tutte le F; e se la sua dimensione è > 1, si potrà sempre costruire in esso un sottogruppo ∞^1 pure algebrico. Si avrà così su ogni F *un* fascio di curve C algebriche, razionali, traiettorie di quel sottogruppo ∞^1.

Di qui si trae (cfr. i §§ 10, 11) la possibilità di trasformare il fascio delle F in un fascio di piani, riferendo le C di ciascun fascio su una F alle rette di un fascio nel corrispondente piano.

Concludiamo:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3 *il quale lasci invariato un fascio di superficie si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariato un fascio di piani.*

14. *Serie invariante di superficie d'indice* > 1. Il gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, ammetta invece un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 di superficie F, d'indice > 1. Tanto il gruppo Γ come le superficie F pos-

sono supporsi algebrici. In Γ esiste un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme tutte le F, ed ha quindi come traiettorie le curve C, loro mutue intersezioni. Le curve C costituiscono dunque una congruenza (del 1.° ordine) di curve razionali, riducibile ad una stella di rette (cfr. il § 7): tale congruenza è evidentemente invariante pel gruppo Γ.

Concludiamo perciò:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3, *il quale lasci invariata una serie* ∞^1 *di superficie d'indice* > 1, *si può trasformare birazionalmente in un gruppo che lascia invariata una stella di rette*

Analisi dei casi residui.

15. Quali casi irriducibili ai precedenti restano ancora da esaminare? Abbiamo esaurita dapprima la classificazione dei gruppi primitivi.

Fra i gruppi imprimitivi abbiamo già considerati quelli (una o due volte) intransitivi, e quelli integrabili; due categorie nelle quali rientrano in particolare i gruppi ∞^1 e ∞^2.

Non abbiamo detto nulla dei gruppi ∞^3 transitivi semplici (cioè non integrabili).

Passando ai gruppi imprimitivi di dimensione > 3, abbiamo considerato quelli pei quali si ha una serie invariante ∞^1 di superficie.

Dobbiamo invece ancora considerare i gruppi (transitivi) imprimitivi, ∞^4 almeno, che scambiano tra loro le curve di una congruenza invariante. Si possono tuttavia lasciare da parte quei casi in cui, esistendo anche una serie ∞^1 invariante di superficie, il gruppo rientrerebbe in un caso già esaminato.

Possiamo dunque limitarci a considerare i gruppi dotati di una congruenza invariante, i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo (quindi, come vedremo, in almeno ∞^5 modi diversi). Segue da ciò che la congruenza in questione dovrà essere del 1.° ordine (cioè per ogni punto dello spazio passerà una sola curva di essa). Invero si abbia per un gruppo una congruenza di curve invariante, d'ordine > 1. Fissata una curva C della congruenza, resterà fissa la superficie luogo di tutte le C che si appoggiano ad essa: se, per comodità d'intuizione, si trasporta il gruppo che opera sulle C in un piano, facendo corrispondere i punti di questo piano agli elementi (C) della congruenza, avremo nel piano un gruppo tale che, fissando un punto, resta pure fissa una linea variabile con esso: è noto che tale proprietà spetta soltanto ai gruppi imprimitivi. E poichè d'altra parte ogni gruppo primitivo di trasformazioni puntuali del piano è almeno ∞^5 (*), così vediamo appunto che le curve C della congruenza invariante dovranno pure venir scambiate in almeno ∞^5 modi diversi.

Dunque, riassumendo le conclusioni precedenti, i casi non riducibili a quelli già trattati e che perciò dobbiamo ancora esaminare sono i seguenti:

a) gruppi semplici transitivi ∞^3 (algebrici);

b) gruppi transitivi, imprimitivi, che lasciano invariata una congruenza di curve del 1.° ordine, scambiando gli elementi (curve) di questa congruenza in modo primitivo (∞^5 almeno).

Esamineremo dapprima il secondo di questi casi, lasciando per ultime le considerazioni relative ai gruppi ∞^3, le quali più si allontanano dall'ordine di idee seguito fin qui.

Gruppi transitivi che posseggono una congruenza invariante del 1.° ordine i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo.

16. Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, le curve C della congruenza invariante e la congruenza stessa χ sono algebriche.

Lo possiamo vedere così.

Fissando un punto generico P dello spazio si stacca dal gruppo proposto G (che è almeno ∞^5) un sottogruppo *algebrico* (almeno ∞^2) Γ, pel quale resta ferma la curva C della congruenza χ che contiene P stesso. Se i punti della C vengono ancora scambiati in almeno ∞^1 modi dalle trasformazioni di Γ, la C è algebrica e razionale [§ 3, lemmi *a*) *b*)].

Se invece tutti i punti della C risultano già fissi per lo stesso sottogruppo Γ (o pel gruppo continuo massimo che vi è contenuto due volte, se Γ è un gruppo misto) la C è ancora algebrica, oppure è contenuta in *una* superficie algebrica F passante per P, di cui tutti i punti risulteranno uniti quando sia fisso P [§ 3, lemma *d*)].

In questa seconda ipotesi, la curva C della congruenza χ che passa per un punto qualunque di F, essendo luogo di punti uniti pel medesimo sotto-

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 35.

gruppo Γ del gruppo proposto G, dovrà appartenere tutta ad F. Se ne trae quindi l'esistenza di un fascio invariante di superficie F, ciascuna delle quali conterrebbe infinite curve C della congruenza proposta; e ciò contraddice alla premessa che il nostro gruppo G debba operare sulla detta congruenza in modo primitivo.

Le curve C della congruenza invariante χ sono dunque algebriche, e anzi razionali, perchè ciascuna di esse è fissa per un sottogruppo di G che deve scambiarne i punti almeno in ∞^1 modi (G essendo transitivo).

L'algebricità della congruenza segue poi immediatamente dal fatto che una curva algebrica, per effetto delle trasformazioni d'un gruppo cremoniano algebrico, deve descrivere un sistema algebrico. La congruenza, essendo del 1.° ordine, sarà anche razionale [per la razionalità delle involuzioni piane (*)], ciò che d'altronde si vedrebbe qui direttamentè.

Vogliamo ora dimostrare che si può trasformare birazionalmente la congruenza delle curve C in una stella di rette. Sappiamo che perciò occorre (e basta) stabilire l'esistenza di una superficie algebrica unisecante le C.

Considerato un piano α, i cui punti vengano riferiti agli elementi (C) della congruenza, sappiamo che si può rappresentare su questo piano il gruppo primitivo che opera sulle C mediante (**):

a) il gruppo proiettivo totale ∞^8;

b) o il gruppo proiettivo ∞^6 che lascia ferma una retta;

c) o il gruppo proiettivo speciale ∞^5 che lascia ferma una retta (ed è sottogruppo invariante del precedente).

La corrispondenza tra la congruenza delle C e il piano α, che serve a stabilire questa rappresentazione, è birazionale (***).

Indichiamo con G' il gruppo proiettivo [appartenente al tipo *a*) *b*) o *c*)] che opera sul piano α considerato.

Il gruppo G' e il nostro gruppo cremoniano G saranno isomorfi; ma può ben darsi che questo isomorfismo non sia oloedrico, che cioè all'identità in G' corrispondano in G infinite operazioni, formanti un sottogruppo invariante, che sarebbe però algebrico e due volte intransitivo. Esso permetterebbe quindi

---

(*) Castelnuovo, lav. cit.; Rend. Acc. dei Lincei, Ottobre 1893; Mathem. Ann., Bd. 44.

(**) Lie, op. cit., Bd. III, s. 35.

(***) Cfr. Fano, *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè stesse.* Rend. Circ. Matem. di Palermo; tom. X, pag. 1 e seg.

di costruire una unisecante delle curve C (sue traiettorie), e di ridurre così la congruenza di esse ad una stella di rette (§ 8).

Possiamo dunque supporre che fra G' e G interceda un isomorfismo oloedrico (in senso gruppale), pel quale ad ogni trasformazione di G' (in particolare all'identità) corrisponda *una* o un numero discreto di trasformazioni in G.

Il gruppo G sarà quindi esso stesso ∞^5, o ∞^6, o ∞^8.

Senza preoccuparci tuttavia della sua dimensione, noi distingueremo, rispetto a G, tre casi diversi, da un altro punto di vista:

1) Fissando una curva C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa curva in soli ∞^1 modi.

Il gruppo che si ha sulla C (continuo o misto che sia) possiede una coppia unita di punti. Se questa, per ogni C, risultasse costituita da due punti coincidenti, sarebbe senz'altro costruito razionalmente sopra ogni C *un* punto, che è quanto ci occorre.

Possiamo dunque escludere questo caso, e limitarci a mostrare che la coppia unita che si ha sopra una C tenuta ferma, o è comune a tutte le C, o descrive al variare della C stessa una superficie riducibile, composta di due altre unisecanti la congruenza; cosicchè in ogni caso la congruenza delle C risulterà riducibile ad una stella di rette.

Facciamo la dimostrazione per assurdo; supponiamo cioè che la coppia unita di una C descriva una curva K o una superficie F irriducibile (bisecante le C). La K o la F costituiranno in ogni caso un luogo invariante pel gruppo G.

Nel 1.° caso, considerando le infinite superficie generate dalle C che escono da uno stesso punto generico di K, si ottiene subito pel gruppo G un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 invariante di superficie; e questo è un caso che a noi non occorre esaminare.

Nel 2.° caso il gruppo G opera sulla superficie F in modo primitivo, e lascia invariante su di essa una serie ∞^2 di coppie di punti (la serie delle coppie unite considerate sulle C). Ora la F è razionale (perchè G subordina su di essa — come nella congruenza delle C — almeno ∞^5 trasformazioni diverse) (*); perciò si dovrebbe ottenere sopra un piano rappresentativo di essa un gruppo cremoniano primitivo il quale lasci invariante una serie ∞^2 di coppie di punti (sia cioè tale che, fissato un punto generico, risulti fisso di conseguenza qualche altro punto o gruppo di punti variabile col primo). D'altra

(*) Castelnuovo e Enriques, l. c.

parte i gruppi cremoniani primitivi del piano si riducono ai tipi *a*) *b*) *c*) sopra enumerati, pei quali non è invariante alcuna serie ∞^2 di coppie di punti; ecco dunque l'assurdo, da cui scaturisce la riducibilità della F che dovevasi dimostrare.

Nell'ipotesi 1) la congruenza delle C è dunque certo riducibile a una stella di rette.

2) Fissando una C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa C in ∞^2 modi.

Allora il gruppo (binario) ∞^2 delle trasformazioni sulla C, lascia fisso *un* punto della curva (*), e questo punto, al variare della stessa C, ci darà il luogo (algebrico) unisecante le curve della congruenza, che occorre per ridurre la congruenza stessa ad una stella di rette.

3) Fissando una C si ha un sottogruppo di G che opera sui punti della C in modo ∞^3.

Allora ci possiamo ridurre al caso precedente staccando da G un conveniente sottogruppo.

Consideriamo perciò ancora il gruppo G' operante proiettivamente nel piano α. Possiamo supporre che G' appartenga ad uno dei tipi *b*) o *c*); se no basterebbe staccare da G' (e conseguentemente da G) il sottogruppo che si ottiene fissando una retta del piano α.

Supponendo dunque che G' appartenga al tipo *b*) o *c*), ossia possegga una retta unita, imponiamo su questa uno, o due, o tre punti uniti fissi; staccheremo così da G', e quindi da G, dei sottogruppi le cui dimensioni andranno decrescendo da 5 (o 4) in giù. Fra questi sottogruppi, arrestandoci a tempo, ne troveremo certo uno tale, che le trasformazioni di esso che lasciano ferma una C operino sopra questa in modo ∞^2, e lascino quindi fermo *un* punto della C stessa; punto che verrà così razionalmente individuato.

Riassumendo pertanto i risultati dell'analisi fatta, concludiamo: *Ogni gruppo cremoniano algebrico che lascia invariata una congruenza del 1.° ordine scambiando le curve di essa in modo primitivo, può essere ricondotto birazionalmente ad un gruppo che scambi (del pari primitivamente) le rette di una stella invariante,* e operi anzi *proiettivamente* su questa stella. Quest'ultima parte segue immediatamente dalla riducibilità, più volte ricordata, dei gruppi primitivi di trasformazioni birazionali del piano (o della stella) a gruppi proiettivi.

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 17.

Gruppi semplici, transitivi ∞^3.

17. *Generalità.* Si abbia un gruppo cremoniano $\infty^3\,\Gamma$, algebrico, transitivo, semplice.

Si considerino due punti generici A e B dello spazio. Vi sarà *una*, oppure un numero finito ($\geqq 2$) di trasformazioni di Γ che fanno corrispondere B ad A, secondochè, fissando il punto A per le trasformazioni di Γ, si ottiene l'identità soltanto, oppure un gruppo finito d'ordine > 1.

Riferiamoci al 1.° caso. Tenendo fisso il punto A e facendo variare B, i punti dello spazio vengono a corrispondere biunivocamente alle trasformazioni del gruppo. Pensiamo queste trasformazioni una prima volta come *elementi (punti)* di una varietà (razionale) V_3, una seconda volta come *operazioni*, le quali agiscano per moltiplicazione (in un dato senso) sulle trasformazioni stesse concepite come elementi di V_3, e producano quindi sugli elementi (o punti) di questa varietà un certo gruppo transitivo $\overline{\Gamma}$.

Abbiamo allora in V_3 quella che si può chiamare la *rappresentazione canonica* del gruppo. Veramente si ottengono in V_3 due rappresentazioni canoniche *coniugate* (e quindi due gruppi *coniugati*) secondo il senso fissato per la moltiplicazione innanzi considerata; ma è indifferente assumere l'una o l'altra di esse. — Se poi in un modo qualunque si riferisce birazionalmente la V_3 allo spazio (S_3), si ottiene una rappresentazione canonica del gruppo Γ nello spazio; e questo ci fornisce un *tipo*, a cui il gruppo stesso può essere ricondotto con una trasformazione cremoniana.

Supponiamo invece che abbia luogo il 2.° caso, cioè che un punto generico dello spazio venga trasformato in sè stesso da un numero finito $n > 1$ di operazioni del gruppo Γ. Tenendo ancora fermo A e facendo variare B, si otterrà allora una corrispondenza (n, 1) (razionale in un solo senso) fra la varietà V_3, i cui elementi sono le trasformazioni di Γ, e lo spazio S_3. Ai punti dello spazio vengono ora a corrispondere biunivocamente non più i singoli punti di V_3, bensì i gruppi di punti di una involuzione (razionale) su questa varietà; involuzione che sarà invariante rispetto al gruppo $\overline{\Gamma}$. Ciascun gruppo (P) di questa involuzione resta fisso per un gruppo finito di operazioni contenute in $\overline{\Gamma}$ (corrispondenti alle operazioni di Γ che lasciano fermo un punto di S_3). Questo gruppo finito opera transitivamente sui punti di (P) stesso; e applicando a (P) le ∞^3 operazioni di $\overline{\Gamma}$, si genera appunto l'involuzione considerata. Sui gruppi di punti di questa involuzione [che sono i trasformati di (P)] il gruppo $\bar{\Gamma}$ opera come Γ operava a sua volta sui punti dello spazio S_3. Riferendo pertanto in un altro modo qualunque — che converrà poi scegliere opportunatamente — gli elementi (gruppi) della stessa involuzione ai punti dello spazio S_3, si otterrà anche per questo caso un *tipo*, a cui il gruppo cremoniano Γ potrà essere birazionalmente ricondotto.

Le considerazioni svolte fin qui mostrano che il problema della determinazione dei gruppi cremoniani (algebrici, transitivi, semplici) ∞^3 si può spezzare in due parti distinte:

1) in primo luogo dovremo assegnare le diverse rappresentazioni canoniche (birazionalmente distinte) di questi gruppi (cfr. § 18). Ciò equivale a determinare quei gruppi nei quali un punto generico dello spazio risulta fisso per la sola trasformazione identica;

2) in secondo luogo, sopra ciascuna delle varietà V_3 corrispondenti alle nominate rappresentazioni canoniche, dovremo costruire tutte le possibili involuzioni invarianti (§ 19). E per questo dovremo prender le mosse dall'esame dei vari sottogruppi finiti di ciascun gruppo canonico (in quanto ogni gruppo di una di quelle involuzioni si potrà generare con uno di questi sottogruppi finiti).

18. *Rappresentazioni canoniche.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, algebrico, semplice, ∞^3. Come abbiamo detto innanzi, pensiamo le trasformazioni di esso una prima volta come *elementi* (punti) di una varietà (algebrica) V_3, una seconda volta come *operazioni* che agiscono per moltiplicazione sulle trasformazioni stesse pensate come elementi di V_3, e producono quindi su questa varietà le ∞^3 trasformazioni di un gruppo transitivo $\bar{\Gamma}$ (sicchè in $\bar{\Gamma}$ stesso esisterà *una* trasformazione nella quale si corrispondono due punti generici di V_3).

La composizione gruppale di Γ, e quindi di $\bar{\Gamma}$, è (come per ogni gruppo semplice ∞^3) quella stessa del gruppo proiettivo binario (*). Segue da ciò che in Γ (o in $\bar{\Gamma}$) una trasformazione generica è permutabile con ∞^1 soltanto, e perciò tutti i sottogruppi ∞^1 di Γ sono algebrici e razionali; essi vengono rappresentati su V_3 dalle linee razionali C di una congruenza del 1.° ordine. In Γ esistono pure ∞^1 sottogruppi a due dimensioni, algebrici e razionali anche questi, perchè contenenti infiniti sottogruppi ∞^1 algebrici; essi danno

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 714-16.

luogo su V_3 ad ∞^1 superficie razionali F, che si segano due a due secondo curve C.

Tutte le curve C e tutte le superficie F su V_3 hanno almeno un punto base comune: il punto che rappresenta la trasformazione identica di Γ. Ma può darsi che le C e le F abbiano più d'uno, diciamo n punti comuni (certo in numero finito): questi punti rappresenteranno allora le trasformazioni di un sottogruppo finito G_n, invariante entro Γ, e comune a tutti i sottogruppi ∞^1 e ∞^2 di Γ stesso. Si può anzi dir subito che G_n dovrà essere un gruppo ciclico, appunto perchè contenuto (invariantivamente) in gruppi cremoniani algebrici, continui, semplicemente infiniti.

Dopo esser dunque partiti dalla considerazione che i nostri gruppi ∞^3 (Γ) sono oloedricamente isomorfi (in senso gruppale) al gruppo proiettivo binario, vediamo ora che sotto l'aspetto algebrico essi possono tuttavia differirne per la presenza di un sottogruppo ciclico invariante di ordine $n > 1$, il quale non compare invece (com'è noto) nel gruppo proiettivo binario. Ove pertanto un tal sottogruppo sia effettivamente contenuto in Γ, è chiaro ch'esso dovrà corrispondere, nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo binario ∞^3, alla sola trasformazione identica di quest'ultimo. Perciò i gruppi cremoniani semplici ∞^3 si distingueranno in due *specie*, secondochè contengono o no un sottogruppo ciclico invariante (di ordine > 1); vale a dire, secondochè la corrispondenza d'isomorfismo che intercede fra essi ed il gruppo proiettivo binario è una corrispondenza birazionale — e perciò $[1, 1]$ —, oppure una corrispondenza $[n, 1]$ razionale in un senso solo. Esaminando più da vicino questo secondo caso, vedremo fra poco che esso può presentarsi soltanto per $n = 2$; saranno dunque due soli i gruppi canonici (birazionalmente distinti) di cui andiamo ora in cerca.

Ciò premesso, proponiamoci di trovare effettivamente, per i gruppi di prima e di seconda specie così definiti, le rappresentazioni canoniche cui alludevamo alla fine del prec. § 17.

a) *Gruppi della 1.ª specie.* Riprendiamo la considerazione della varietà V_3 e del gruppo $\overline{\Gamma}$ su di essa, e facciamo operare le ∞^3 trasformazioni di questo gruppo sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Si otterranno così (da ciascuna F ∞^1, e quindi) in tutto ∞^2 superficie, che si segheranno due a due secondo curve razionali, e tre a tre in *un* punto. Questo sistema ∞^2 di superficie è dunque certo quadratico, e sarà perciò contenuto in un sistema ∞^3 lineare, anzi omaloidico; esso e quest'ultimo saranno invarianti pel gruppo $\overline{\Gamma}$.

Riferendo ora proiettivamente il detto sistema omaloidico (∞^3) di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3, ci procureremo in S_3 un gruppo *proiettivo* trasformato di $\overline{\Gamma}$ (e di Γ). Ma di gruppi proiettivi semplici ∞^3 *transitivi* si hanno in S_3 due tipi soltanto (*): il gruppo ∞^3 di una cubica gobba, ed il gruppo delle omografie (biassiali) che lasciano ferma una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa. Fra questi due, è anche chiaro che il gruppo proiettivo dianzi ottenuto in S_3 sarà precisamente del secondo tipo, perchè in questo caso soltanto vi è una sola trasformazione del gruppo che fa corrispondere fra loro due punti generici di S_3.

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani algebrici, semplici, ∞^3, della 1.ª specie, ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie (biassiali) dello spazio S_3, che lasciano fissa una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa (**).

Quindi: *Il detto gruppo proiettivo è il tipo a cui può ricondursi birazionalmente ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 1ª specie, nel quale non esista alcuna trasformazione non identica che lasci fisso un punto generico.*

b) Gruppi della 2.ª specie (in cui si ha un G_n ciclico invariante). Ritorniamo alla solita rappresentazione canonica su V_3; e, come nel caso precedente, facciamo agire le operazioni di $\overline{\Gamma}$ sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Otteniamo ancora ∞^2 superficie che si segano due a due secondo curve razionali, e tre a tre in gruppi di n punti. Questi gruppi di n punti (T, $T\pi$, $T\pi^2, \ldots$ $T\pi^{n-1}$) nascono, per effetto delle operazioni T di $\overline{\Gamma}$, dal gruppo-base $G_n(1, \pi, \pi^2, \ldots \pi^{n-1})$ delle superficie F e delle curve C, e formano un'involuzione *ciclica* I_n: la stessa involuzione che si ottiene facendo agire sui punti (T) di V_3 le operazioni del gruppo ciclico G_n concepite, non più come trasformazioni di $\overline{\Gamma}$, ma come trasformazioni del gruppo coniugato (ossia per moltiplicazione a destra invece che a sinistra) (cfr. § 17). Sugli elementi (gruppi) della I_n il gruppo $\overline{\Gamma}$ opererà come il gruppo canonico di 1.ª specie operava nel caso *a*) sui punti di V_3.

(*) Cfr. p. e. Fano, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè*. Memorie della R. Accad. di Torino, ser. II, tom. XLVI; v. in part. § 5.

(**) Questo stesso gruppo ci darà dunque la rappresentazione canonica (su S_3) del gruppo proiettivo binario; cosa che può anche verificarsi direttamente (cfr. Fano, l. c.).

Il nostro sistema ∞^2 di superficie risulterà contenuto, come nel caso precedente, in un sistema lineare ∞^3 invariante rispetto a $\overline{\Gamma}$, di cui due superficie si segheranno ancora secondo una curva razionale, ma tre superficie avranno a comune tutto un gruppo di n punti dell'involuzione ciclica I_n.

Riferiamo ancora proiettivamente questo sistema lineare ∞^3 di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3. La V_3 si trasformerà in uno spazio S_3 multiplo (n^{plo}), nel quale al gruppo $\overline{\Gamma}$ corrisponderà un gruppo proiettivo; e, poichè la I_n è un'involuzione *ciclica*, così (per una nota proprietà delle equazioni abeliane in cui le radici formano un unico periodo) il detto spazio multiplo sarà del tipo:

$$x \qquad y \qquad z \qquad \sqrt[n]{f(x\,y\,z)}$$

dove f è un certo polinomio. Infine, poichè alle rette dello spazio multiplo S_3 corrispondono su V_3 curve *razionali*, segue da una nota formula di ZEUTHEN che il polimonio f dovrà essere di 2.° grado. In conclusione dunque la V_3 viene rappresentata sopra uno spazio n^{plo} (ciclico):

$$x \qquad y \qquad z \qquad \sqrt[n]{f(x\,y\,z)}$$

avente la *quadrica* di diramazione:

$$f\,(x\,y\,z) = 0\,;$$

in modo che alle ∞^3 trasformazioni del gruppo $\overline{\Gamma}$ su V_3 corrispondono in questo spazio multiplo certe ∞^3 trasformazioni proiettive (formanti un gruppo semplice, transitivo), le quali dovranno lasciar ferma la superficie di diramazione. Ma, se $n > 2$, la superficie di diramazione totale si compone, oltrechè della quadrica $f = 0$, anche del piano all'infinito (contato $n - 2$ volte); e quindi non esiste nessun gruppo proiettivo, transitivo, ∞^3, che la lasci invariata. Si trae di qui che deve essere $n = 2$, come avevamo preannunziato.

Ora, se $n = 2$, la V_3 viene ad esser così rappresentata sullo spazio *doppio* con quadrica di diramazione:

$$x \qquad y \qquad z \qquad \sqrt{f(x\,y\,z)}\,;$$

il quale a sua volta nasce per proiezione (da un punto esterno A) della quadrica Q_3 di S_4, che ha per equazione:

$$u^2 = f(x\,y\,z).$$

Di più, alle trasformazioni proiettive dello spazio (doppio) $u = 0$ che lasciano invariata la quadrica $f(x\,y\,z) = 0$ corrispondono le trasformazioni proiettive di Q_3 che mutano in sè stesso lo spazio $u = 0$. Noi potremo dunque assumere addirittura la stessa quadrica Q_3 come varietà canonica V_3 pei gruppi di 2.ª specie, intendendo che il gruppo $\overline{\Gamma}$ operante sopra tale varietà sia un gruppo proiettivo di S_4, che lasci fermo, insieme alla quadrica considerata, lo spazio $u = 0$, e quindi anche il polo (A) di esso. Nello spazio $u = 0$ si avrà un gruppo proiettivo ∞^3 (di 1.ª specie) subordinato di $\overline{\Gamma}$ e in corrispondenza [1, 2] con $\overline{\Gamma}$ stesso, il quale lascerà invariata la sezione Q_2 di Q_3; questo gruppo proiettivo (e però anche $\overline{\Gamma}$) dovrà pure lasciar ferme tutte le generatrici di uno dei due sistemi sopra Q_2 [cfr. il caso a)].

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani ∞^3 della 2.ª specie ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie di S_4 che lascia invariata una quadrica (non specializzata):

$$u^2 = f_2(x\,y\,z);$$

una sua sezione iperpiana (quindi anche il relativo polo), *e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra tale sezione.*

Questi gruppi posseggono un sottogruppo invariante G_2 e sono in corrispondenza d'isomorfismo [2, 1] *col gruppo proiettivo binario.*

Il gruppo proiettivo (canonico) della Q_3 è notoriamente equivalente ad un gruppo conforme di S_3, al quale si può ridurre proiettando Q_3 da un suo punto sopra un S_3, e ponendo successivamente in questo spazio un'opportuna proiettività (reale o no). Da questa osservazione si trae che:

Ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 2.ª specie, nel quale non esista, all'infuori dell'identità, nessuna trasformazione che lasci fisso un punto generico, si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo conforme, il quale muti in sè stessa una sfera e ciascuna delle sue generatrici (immaginarie) di un determinato sistema.

Osservazione. Data l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 coi gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n $(n \geqq 3)$ che trasformano in sè stesse varietà razionali a 3 dimensioni, si può domandare di porre in relazione i risultati precedenti, e particolarmente quello relativo alla possibile esistenza, entro un gruppo semplice ∞^3, di un sottogruppo invariante G_2, con quanto è già noto relativamente ai gruppi proiettivi ∞^3. Si deve anzi avere così un nuovo modo di giungere alle stesse proposizioni gruppali già stabilite (salvo poi compiere la ricerca delle rappresentazioni canoniche dei nostri gruppi). — Or bene, nessuna difficoltà si oppone a tale procedimento. Infatti un noto teorema di Study (*) dà il modo di costruire tutti i gruppi proiettivi semplici ∞^3 di un S_n; scrivendo le equazioni di tali gruppi (**), si vede che vi compariscono quattro parametri a, b, c, d legati dalla relazione $ad - bc = 1$, la quale risulta in particolare soddisfatta quando si ponga

$$b = c = 0, \qquad a = d = \pm 1.$$

Per $a = d = +1$ si ha in ogni caso (nel gruppo ∞^3) l'identità, mentre per $a = d = -1$ si ha ancora l'identità oppure un'involuzione invariante, secondochè le dimensioni degli spazi minori che sono fissi pel gruppo (secondo il teorema di Study) hanno o non hanno tutte la stessa parità.

19. *Involuzioni invarianti per gruppi canonici.* Passiamo ora alla seconda parte del compito che ci siamo assegnato alla fine del § 17; proponiamoci cioè di costruire per i gruppi di 1.ª e 2.ª specie (di cui già abbiamo date le rappresentazioni canoniche) le diverse involuzioni invarianti, che si ottengono partendo dai loro sottogruppi finiti. Questi sottogruppi si possono considerare *a priori* come noti, perchè devono corrispondere in isomorfismo oloedrico, o tutt'al più emiedrico (nel caso di un gruppo di 2.ª specie) ai gruppi finiti di proiettività binarie, ed è noto che questi ultimi sono ciclici o diedrici, oppure appartengono ai tre tipi che prendono il nome dai poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro).

a) Nel caso dei gruppi di 1.ª specie l'isomorfismo di cui si tratta sarà certo oloedrico; pertanto, tenendo presenti le considerazioni svolte da principio (n.° 17), avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 1.ª specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico devono formare un gruppo finito oloedricamente isomorfo ad un gruppo binario ciclico o diedrico, o ad uno dei gruppi dei poliedri regolari.

E tutti questi casi possono effettivamente presentarsi.

Consideriamo infatti il gruppo proiettivo canonico di 1.ª specie in S_3, del quale sappiamo che lascia fissa una quadrica Q_2 e le sue generatrici di un determinato sistema T. In questo gruppo Γ esistono sottogruppi finiti oleodricamente isomorfi ad un qualunque gruppo binario finito G: basta prendere

(*) Cfr. Lie, op. cit., Bd. III, s. 785. Cfr. anche Fano, Mem. cit. (Acc. di Torino), § 2.
(**) Fano, Mem. cit., § 3.

infatti quelle trasformazioni di Γ che subordinano operazioni di un tal gruppo binario nella schiera ∞^1 di generatrici di Q_2 che è coniugata a T. Il sottogruppo (finito) di Γ così ottenuto dà luogo (in infiniti modi) ad un insieme di punti (P), il quale, per effetto delle omografie del gruppo complessivo Γ, genera un'involuzione (razionale) invariante rispetto a Γ stesso. Basta ora riferire gli elementi (gruppi) dell'involuzione ai punti dello spazio (S_3), per ottenere in questo un gruppo cremoniano (di 1.ª specie), nel quale le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico formino un gruppo finito oloedricamente isomorfo a G.

b) Passiamo ora ai gruppi di 2.ª specie, e consideriamo perciò di nuovo il gruppo proiettivo Γ' di S_4 che lascia invariata una quadrica Q_3, uno spazio S_3 $(u=0)$ col polo A e la quadrica sezione Q_2, nonchè tutte le generatrici di un determinato sistema T sopra Q_2.

Anche qui, ogni gruppo proiettivo finito, il quale operi sulla schiera ∞^1 delle generatrici di Q_2 coniugata a T, può considerarsi come subordinato di un gruppo proiettivo finito G (ad esso oloedricamente isomorfo) dello spazio $S_3\,(u=0)$, per il quale sieno fissi la quadrica Q_2 e il sistema T su di essa. A quest'ultimo gruppo corrisponderà (in isomorfismo emiedrico) un sottogruppo finito di G' di Γ', *contenente il sottogruppo invariante* G_2 *di* Γ' *stesso, e quindi* (l'operazione non identica di questo G_2, ossia) *l'omologia armonica* I *di centro* A *e spazio* $u=0$. Se ora costruiamo su Q_3 un insieme generico di punti (P'), invariante rispetto a G', e su cui G' operi transitivamente, questo insieme risulterà costituito da un certo numero di coppie dell'involuzione (omologia armonica) I; e applicando a quest'insieme di punti tutte le trasformazioni di Γ', ne dedurremo una certa involuzione, composta mediante la I, la quale sarà invariante rispetto a Γ'. Ora, è chiaro che sugli elementi (gruppi) di questa involuzione Γ' opererà, non già come un gruppo di 2.ª specie, ma come un gruppo di 1.ª specie; infatti, poichè l'involuzione stessa è composta mediante la I, così l'*operazione* I lascerà fermi tutti i gruppi di essa, opererà cioè sul sistema di questi gruppi come la trasformazione identica, *privando* (per così dire) il gruppo ∞^3 subordinatovi da Γ' del proprio G_2 invariante.

Se si vuole dunque ottenere su Q_3 un'involuzione invariante rispetto a Γ', sulla quale Γ' stesso operi come un gruppo di 2.ª specie, bisognerà costruire l'insieme (P') *partendo da un sottogruppo finito* G' *di* Γ' *il quale non contenga la trasformazione involutoria* I. Abbiamo così una vera *limitazione* nella scelta del gruppo finito G' (entro Γ'); limitazione che ha per iscopo di eliminare fin d' ora tutti quei casi, nei quali si ricadrebbe in un gruppo di 1.ª specie.

È anche facile constatare l'effettiva esistenza di gruppi finiti G' non contenenti l'operazione I; tali sono invero tutti i sottogruppi ciclici di Γ' d'ordine dispari (i quali non contengono addirittura nessuna operazione involutoria). Ma si può anche aggiungere che è questo il solo caso possibile; e ciò si desume facilmente dal fatto che « G' deve contenere la trasformazione I ogni qualvolta contiene un'operazione (ciclica) a periodo pari ».

Quest' ultima proprietà si stabilisce subito nel modo seguente. Sia π una operazione ciclica a periodo $2n$ contenuta in G. La π^n sarà un'involuzione; e, come tale, se non coincide colla I, dovrà subordinare un'involuzione anche nello spazio S_3 fisso ($u=0$). Quest'ultima involuzione (di S_3) lascerà fissa tutte le rette di una congruenza lineare, avente per direttrici due generatrici u, v del sistema coniugato a T sulla quadrica Q_2; per conseguenza la π^n lascerà invariate le infinite coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle u, v. Ora, sopra ciascuna di queste coniche la π^n subordina l'involuzione avente come punti doppi le intersezioni colle stesse u, v; questa involuzione non potrà dunque differire da quella che ha per centro di collineazione A, che viene cioè subordinata sulle stesse coniche dalla I. Sarà perciò in ogni caso $\pi^n \equiv I$; ossia la I starà nel gruppo G', come si voleva dimostrare.

Ora, se il sottogruppo finito G' di Γ' (su Q_3) non contiene la I, esso è *oloedricamente* isomorfo al gruppo G subordinato nello S_3 fisso, e quindi anche ad un certo gruppo proiettivo binario; siccome poi G' non deve contenere alcuna operazione a periodo pari, così questo gruppo binario, e quindi G' stesso, non potranno essere altro che gruppi ciclici di ordine dispari.

Pertanto, tenendo presenti le osservazioni già svolte precedentemente, avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) della 2.ª specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico dovranno in ogni caso formare un sottogruppo ciclico d'ordine dispari ($\geqq 1$).

20. *Classificazione dei gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici*, ecc.). Ecco ora come si delinea lo schema dello studio dei nostri gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici, semplici, transitivi):

1.° gruppi di 1.ª o 2.ª specie del *tipo ciclico*, cioè gruppi nei quali, fissando un punto generico, si ha un gruppo finito ciclico (§ 21). (Pei gruppi di 2.ª specie è solo possibile il caso del gruppo ciclico d'ordine dispari);

2.° gruppi di 1.ª specie:

α) del *tipo diedrico* (§ 23);

β) del *tipo tetraedrico* (§ 25);

γ) del *tipo ottaedrico* (§ 26);

δ) del *tipo icosaedrico* (§ 27).

Cominceremo dal 1.° caso, e esamineremo poi separatamente il gruppo del tipo diedrico, e i gruppi del tipo di ciascuno dei poliedri regolari (tutti di 1.ª specie).

21. *Caso ciclico. Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo ciclico (sia esso di 1.ª o di 2.ª specie) può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

a) Cominciamo col dimostrare la proposizione pei gruppi di 1.ª specie. Riferiamoci perciò alla loro rappresentazione canonica, data dal gruppo proiettivo Γ di S_3 che lascia ferma una quadrica Q_2 e tutte le generatrici di un sistema T sopra di essa. Bisogna ora costruire nel modo più generale un'involuzione I_n invariante rispetto a Γ, il cui gruppo generico (P) risulti generato da un sottogruppo finito ciclico di Γ stesso. E poichè Γ si può considerare come ottenuto dal gruppo cremoniano proposto mediante una trasformazione $[1, n]$ (razionale in un solo senso) la quale faccia corrispondere ai punti di S_3 i gruppi della nominata involuzione I_n, *tutto si ridurrà a far vedere che, costruita l'involuzione* I_n, *esiste nello spazio* (S_3) *della quadrica* Q_2 *una congruenza del 1.° ordine di curve razionali, invariante rispetto al gruppo* Γ, *con varietà unisecante, e appartenente a quell'involuzione* (tale cioè, che la curva della congruenza passante per un punto generico contenga sempre anche gli $n-1$ punti coniugati di questo).

Ora, noi possiamo procurarci subito, e in modo assai semplice, una congruenza lineare di *rette* soddisfacente alle condizioni richieste (ossia invariante, e appartenente all'involuzione I_n: l'esistenza di superficie unisecanti è in questo caso evidente).

Infatti ogni gruppo di punti (P) generato da un sottogruppo ciclico di Γ appartiene ad una retta a, la quale si appoggia a due generatrici (distinte) u, v del sistema T; e questa retta a [che contiene già ∞^1 gruppi di punti trasformati di (P)] descrive, per effetto delle varie omografie di Γ, l'intera congruenza lineare di direttrici u e v.

Questa congruenza lineare sarà dunque invariante rispetto a Γ; inoltre ogni retta di essa conterrà (come la a) infiniti gruppi di punti trasformati di (P), cioè infiniti gruppi dell'involuzione I_n, sicchè appunto quella congruenza apparterrà a questa involuzione.

b) Passiamo al caso dei gruppi di 2.ª specie, e riprendiamo perciò il gruppo proiettivo Γ' di S_4, che lascia invariata una quadrica Q_3, la sua sezione Q_2 con uno spazio S_3, e le generatrici di *un* sistema T sopra Q_2. Ricordiamo pure che questo gruppo Γ' risulta isomorfo (in corrispondenza [2, 1]) col gruppo Γ (canonico di 1.ª specie) che ne viene subordinato nello S_3 fisso.

Consideriamo su Q_3 una involuzione I'_n invariante rispetto a Γ', generata partendo da un gruppo ciclico, d'ordine dispari, (P'): proiettando sullo S_3 fisso dal polo A di questo spazio, avremo anche in S_3 una involuzione I_n invariante rispetto a Γ [generata dal gruppo (P) proiezione di (P')]. Ora noi abbiamo veduto come si possa costruire in S_3 una congruenza lineare di rette, di direttrici u, v, invariante rispetto a Γ, e appartenente alla I_n. Una tale congruenza verrà proiettata da A su Q_3 secondo una congruenza di coniche, pure del 1.° ordine, appartenente alla I'_n e invariante rispetto a Γ': la congruenza delle coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle rette (unisecanti) u e v.

L'esistenza di una siffatta congruenza relativa all'involuzione I'_n su Q_3 permette di ritenere stabilito anche pei gruppi di 2.ª specie lo stesso teorema enunciato al principio di questo §, in forza delle medesime (ovvie) osservazioni che abbiamo fatte pei gruppi di 1.ª specie.

22. *Discussione dei casi ulteriori.* La discussione del caso diedrico e dei casi dei poliedri regolari (relativi soltanto, come sappiamo, a gruppi di 1.ª specie) si esaurirà più speditamente ricorrendo a più convenienti rappresentazioni canoniche, che equivalgono d'altronde (e devono equivalere) a quella data innanzi (§ 18).

Abbiamo veduto che i gruppi di 1.ª specie sono birazionalmente isomorfi al gruppo proiettivo binario. E quest'ultimo si può a sua volta rappresentare sul gruppo Γ delle omografie che trasformano in sè una curva razionale normale di un ordine qualunque n, appartenente ad uno spazio S_n.

Supponiamo ora che si abbia in S_3 un gruppo cremoniano ∞^3, tale che le operazioni di esso che lasciano fermo un punto generico M formino un certo gruppo finito G.

A G corrisponderà in Γ un gruppo oloedricamente isomorfo G', le cui omografie lasceranno invariata la curva C_n, nonchè determinati gruppi di punti sopra questa. Per una conveniente scelta dell'ordine n, potremo dunque supporre che rimanga fisso sulla curva precisamente un gruppo di n punti, ossia il gruppo (P) sezione di essa con un certo iperpiano α. Indichiamo con A il polo di α rispetto alla C_n; anche A sarà fisso per le operazioni di G'. Ora le ∞^3 omografie di Γ porteranno (P) in certi ∞^3 gruppi di punti su C_n, ed A nei punti di una varietà (razionale) V_3. Noi potremo riferire questa varietà allo spazio S_3 da cui siamo partiti, assumendo anzitutto come omologhi il punto A (che è fisso per G') e il punto M (fisso per G); e facendo poi corrispondere fra loro due altri punti qualunque A' (di V_3) e M' (di S_3) quando A e M si possono portare rispett. in essi con operazioni che a lor volta si corrispondono nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo cremoniano proposto. Questa corrispondenza fra lo spazio S_3 e la varietà V_3 trasforma evidentemente il gruppo cremoniano proposto nel gruppo proiettivo subordinato da Γ su V_3; epperò questo secondo gruppo sarà equivalente al primo ogni qualvolta la corrispondenza veduta fra V_3 e S_3 sia birazionale (ossia univoca in ambo i sensi). Quando questa condizione sia soddisfatta, è chiaro che una qualunque (ulteriore) rappresentazione spaziale di V_3 ci darà in S_3 un *tipo* a cui potrà ricondursi il gruppo ∞^3 proposto.

Ora, una volta scelto il punto A invariante rispetto a G' (e sceltolo pure ad arbitrio, se ve n'è più d'uno invariante per questo stesso gruppo), è chiaro che ad ogni punto M' di S_3 corrisponderà su V_3 un solo punto A'; ma perchè anche, inversamente, ad ogni punto A' corrisponda un solo M' (in particolare dunque ad A il solo punto M), è necessario (e sufficiente) che A — e con esso il gruppo (P) su C_n — non risultino fissi per nessuna trasformazione di Γ che sia fuori di G'. Questa condizione è però soddisfatta per ogni insieme (P) di $n\,(>2)$ punti di C_n invariante rispetto a un gruppo G' diedrico o del tipo di uno dei poliedri regolari (fatta solo eccezione per $n=6$ nel caso tetraedrico); non importerà dunque tenerne conto (nel caso tetraedrico faremo $n=4$). Essa non potrebbe però rendersi soddisfatta nel caso ciclico, donde appunto la necessità di trattare questo caso a parte (come abbiamo fatto).

Pertanto, dato il gruppo finito G e supposto che il suo corrispondente nel campo binario lasci fermo un insieme di n elementi, converrà scegliere una curva razionale normale avente precisamente l'ordine n, e su questa tra gli ∞^n gruppi di n punti (sezioni iperpiane) prenderne uno (P) che sia invariante (soltanto) rispetto a G (omologo di G in Γ). Considerando poi il polo A di questa sezione iperpiana, applicheremo ad A stesso tutte le ∞^3 omografie che lasciano fissa la C_n, ottenendo così una varietà (razionale) V_3, che cercheremo di rappresentare sopra S_3 nel modo più opportuno. Il gruppo che così verrà a corrispondere a Γ sarà il *tipo* cercato (a cui potrà ricondursi il gruppo proposto).

23. *Caso diedrico. Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo diedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

Per dimostrare questo teorema, cominciamo col costruire, nel modo indicato innanzi, un gruppo proiettivo equivalente al gruppo cremoniano proposto. E dimostriamo precisamente che, se un punto generico di S_3 risulta fisso per un gruppo diedrico G_{2n} d'ordine $2n (> 4)$, possiamo ridurci al gruppo proiettivo che le ∞^3 omografie di S_n trasformanti in sè stessa una data C_n (razionale, normale) subordinano sulla varietà V_3 delle corde di questa curva. Infatti, sopra la C_n ogni G_{2n} diedrico lascia fissi due gruppi di n punti, che sempre appartengono ad una (stessa) involuzione g_n^1 (ciclica) dotata di due punti n^{pli}. L'iperpiano determinato da uno qualunque di quei gruppi di n punti (su C_n) appartiene dunque al fascio di due iperpiani osculatori; e il polo di esso sarà perciò un punto di una corda della C_n.

Con ciò il teorema enunciato può ritenersi dimostrato, perchè la V_3 delle corde di C_n può appunto rappresentarsi sopra S_3 in modo che alle corde stesse corrispondano le rette di una stella (che sarà invariante rispetto al gruppo ∞^3).

In particolare per $n = 3$, si trova anche come tipo il gruppo proiettivo ∞^3 di una cubica gobba.

La dimostrazione precedente cade in difetto per $n = 2$, ma anche in questo caso si può costruire una congruenza del 1.° ordine invariante e con superficie unisecante. Basta procedere nel modo che brevemente accenniamo.

Poichè un G_4 diedrico in una forma di 1.ª specie è costituito dalle quattro proiettività che mutano in sè stessa una quaderna di elementi (non armonica, nè equiarmonica, e senza elementi multipli), così siamo condotti, in questo caso, a rappresentare il gruppo proposto (di S_3) sul gruppo proiettivo Γ di una C_4 razionale normale in S_4, facendo corrispondere birazionalmente ai punti dello spazio S_3 i punti di una varietà V_3 (del 6.° ordine) generata per effetto delle operazioni del gruppo Γ da un punto generico di S_4.

Ora affermiamo che vi sono sulla V_3 *tre* congruenze di coniche, ciascuna delle quali è del primo ordine, e invariante rispetto a Γ.

Consideriamo sulla V_3 un punto generico P; il suo iperpiano polare segherà la C_4 in quattro punti $A\ B\ C\ D$. Separiamo i quattro punti in due coppie, p. e. nelle coppie $A\,B$, $C\,D$, e costruiamo su C_4 la coppia $M\,N$ che le separa armonicamente entrambe. È facile verificare che il punto P apparterrà al piano proiettante $M\,N$ dal punto O intersezione dei due piani osculatori alla C_4 rispett. in M e in N. Questo piano $M\,N\,O$ resta fermo per ∞^1 omografie di Γ, le quali subordinano su di esso un gruppo del pari ∞^1 avente come traiettorie delle coniche (mutuamente tangenti nei due punti M e N); vi sarà quindi nel piano stesso una conica (traiettoria del gruppo) passante per P e giacente sulla V_3. Siccome la quaderna $A\,B\,C\,D$ può essere divisa in coppie in tre modi diversi, così si ottengono per P *tre* coniche giacenti su V_3; e per separarle occorre l'introduzione di una irrazionalità cubica. Ma una volta separate le tre coniche passanti per un (particolare) punto P di V_3, si possono separare *razionalmente* le tre coniche passanti per ogni altro punto, giacchè ognuna di queste proviene da *una* di quelle che contengono P, per effetto di ∞^1 omografie di Γ. Si avranno dunque sulla V_3 tre congruenze del 1.° ordine di coniche, invarianti rispetto a Γ.

Resta da costruire per ciascuna di esse una superficie unisecante.

A tal fine, fissata l'attenzione sopra una (χ) delle nominate congruenze, si consideri il sottogruppo ∞^2 Γ_1 di Γ ottenuto fissando un certo punto H di C_4. Una conica generica γ di χ è mutata in sè stessa da una sola operazione (non identica) di Γ_1, cioè dall'involuzione che scambia i punti comuni a γ e alla C_4 ed ha H come punto doppio; tale involuzione lascia fermi *due* punti R, S, su γ. Ora, per effetto delle ∞^2 operazioni di Γ_1, ciascuno dei due punti R, S, descrive una diversa superficie irriducibile giacente su V_3, la quale incontra in *un* punto (di contatto) le coniche di χ. Ognuna delle due superficie così ottenute ci fornisce la varietà unisecante della congruenza, di cui andavamo in cerca.

24. *Irriducibilità dei casi ulteriori.* Da quanto precede risulta che ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) nel quale le operazioni che lasciano fermo un punto formano un gruppo ciclico o diedrico (incluso il caso della sola identità) si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.

Una tale riduzione non è più possibile nei casi ulteriori; si dimostra infatti che *un gruppo cremoniano* ∞^3 (Γ) *corrispondente ad uno dei tre gruppi dei poliedri regolari non lascia invariata alcuna congruenza (algebrica, di curve razionali) del 1.° ordine.*

Infatti, supposto che sia invariante una congruenza siffatta, le trasformazioni del gruppo Γ che lasciano fermo un punto generico P dovranno anche lasciar ferma *la* curva di quella congruenza che passa per questo punto. Queste stesse trasformazioni saranno dunque contenute nel gruppo (algebrico) ∞^1, continuo o misto, formato da tutte le trasformazioni di Γ che lasciano ferma la curva considerata (per P). Il gruppo delle trasformazioni di Γ che lasciano fermo P risulta quindi contenuto (come sottogruppo finito) in un gruppo ∞^1, e perciò deve essere ciclico o diedrico, contro l'ipotesi.

Osservazione. Il ragionamento precedente non esclude che per un gruppo ∞^3 di uno dei tipi dei poliedri regolari si abbia una congruenza invariante d'ordine $h > 1$; ma esso prova altresì che in tal caso il gruppo G_n (d'ordine $n = 12, 24, 60$) ottenuto col fissare un punto generico di S_3 deve contenere un sottogruppo ciclico o diedrico d'ordine $\frac{n}{h}$. Si trae di qui che l'ordine di una qualsiasi congruenza invariante per il gruppo considerato è $\geqq 3$ nei primi due casi (tetraedrico e ottaedrico), e $\geqq 6$ nel caso icosaedrico. Questi valori minimi (3, 3, 6) sono effettivamente raggiunti.

Accertato così che i gruppi ∞^3 corrispondenti ai casi dei poliedri regolari non si possono ridurre (come gli altri gruppi ∞^3) ad avere una stella invariante di rette, converrà cercare anzitutto se è possibile ricondurli a qualcuno degli altri tipi di gruppi che ci si sono già presentati (gruppi con un fascio invariante di piani, gruppi proiettivi e conformi).

Possiamo però vedere subito che *i gruppi ∞^3 corrispondenti ai tre casi dei poliedri regolari non posseggono alcun fascio invariante di superficie* (algebriche), e però non possono certo ridursi ad avere un fascio invariante di piani.

Infatti, nell'ipotesi contraria, ogni superficie del fascio invariante sarebbe fissa per un sottogruppo ∞^2 Γ_1 del gruppo proposto (Γ). In Γ_1 sarebbe a sua volta contenuto *un* sottogruppo invariante ∞^1, il quale determinerebbe sulla superficie un fascio di traiettorie razionali. Ora questo fascio, per effetto delle ∞^3 operazioni del gruppo totale Γ, descriverebbe (come si vede facilmente) una congruenza del 1.° ordine, invariante rispetto a Γ; e noi abbiamo già riconosciuto che una tale congruenza non può esistere.

Dunque *i nostri gruppi ∞^3 residui non sono riducibili (birazionalmente) a gruppi di Jonquières generalizzati.* Potranno essi ridursi a gruppi proiettivi o conformi (dello spazio S_3)? È facile rispondere alla domanda, perchè i gruppi ∞^3 (semplici) proiettivi e conformi dello spazio S_3 (questi ultimi equivalenti a gruppi proiettivi di una quadrica non specializzata in S_4) sono completamente noti (*). Dalla enumerazione di essi risulta subito che

(*) FANO, Mem, cit. (Acc. di Torino), §§ 5, 6.

nessun gruppo proiettivo semplice di S_3 corrisponde (nel senso fissato) ad uno dei tre casi dei poliedri regolari. Si trova invece un gruppo conforme (e precisamente un gruppo che lascia invariata una quartica di 2.ª specie) come corrispondente al caso tetraedrico; questo gruppo costituisce anzi, come vedremo fra poco, il tipo più generale relativo al detto caso. Ma neppure tra i gruppi conformi non si ha alcun gruppo semplice ∞^3 corrispondente ad uno dei casi dell'ottaedro o dell'icosaedro. Concludiamo perciò che *i gruppi cremoniani* (algebrici, semplici, transitivi) ∞^3 *del tipo ottaedrico ed icosaedrico si staccano in modo essenziale da tutti gli altri gruppi cremoniani primitivi ed imprimitivi*, in quanto essi (soltanto) sono irriducibili a gruppi di Jonquières generalizzati, oppure a gruppi proiettivi o conformi.

25. *Caso tetraedrico. Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo tetraedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo conforme che lascia invariata una quartica di 2.ª specie.*

Per ottenere questa riduzione, costruiamo nel modo già indicato (§ 22) un gruppo proiettivo equivalente al gruppo proposto.

Poichè si hanno in una forma di 1.ª specie delle *quaderne* di punti (*equianarmoniche*) invarianti rispetto ad un gruppo proiettivo tetraedrico G_{12} (e non per altre trasformazioni proiettive), possiamo riferirci ad una curva C_4 razionale normale in S_4. Su questa curva le ∞^3 quaderne equianarmoniche determinano iperpiani (S_3), i cui poli hanno per luogo la quadrica fondamentale della polarità rispetto alla C_4 stessa. Questo fatto si può considerare come noto; e si può anche verificare facilmente in modo diretto, ricordando che la condizione perchè una forma binaria biquadratica risulti equianarmonica è data dall'annullarsi del suo invariante quadratico.

Del resto l'ordine della varietà luogo dei poli delle quaderne equianarmoniche su C_4 può essere valutato *a priori* col procedimento seguente, che ci servirà anche negli altri casi.

Anzitutto l'ordine (x) di questa varietà di punti equivale alla classe dell'inviluppo degli iperpiani polari. Ora, se applichiamo ad un S_{n-1} qualunque di S_n le ∞^3 trasformazioni proiettive che lasciano fissa una data C_n, abbiamo un inviluppo di iperpiani (S_{n-1}) la cui classe è data in generale dal numero degli elementi (S_{n-1}) che passano per 3 punti qualunque di S_n, in particolare per 3 punti di C_n. E questo numero vale

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)}{s},$$

designando con s il numero delle trasformazioni del gruppo che lasciano fermo lo spazio S_{n-1} considerato da principio. Nel nostro caso si ottiene dunque (essendo $n = 4$, $s = 12$):

$$x = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{12} = 2. \qquad \text{c. d. d.}$$

Il gruppo cremoniano proposto, equivalendo ad un gruppo proiettivo di una quadrica di S_4 (contenente una C_4 fissa), sarà anche equivalente ad un gruppo conforme di S_3, come afferma l'enunciato.

26. *Caso ottaedrico.* Poichè ogni gruppo ottaedrico (G_{24}) in una forma di 1.ª specie trasforma in sè *un* insieme di *sei* elementi ripartibili in tre coppie mutuamente armoniche, così potremo ora riferirci ad una C_6 razionale normale di S_6, e considerare su questa le ∞^3 sezioni iperpiane costituite da terne di coppie due a due armoniche: il gruppo cremoniano proposto sarà equivalente al gruppo che le ∞^3 proiettività di S_6 che lasciano fissa la C_6 subordinano sulla varietà V_3 luogo dei poli di quegli ∞^3 iperpiani (S_5).

Poichè il gruppo ottaedrico contiene 24 operazioni, l'ordine della varietà V_3, valutato col procedimento del § prec., sarà:

$$x = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{24} = 5.$$

La teoria delle forme binarie ci dà il modo di scrivere le equazioni della detta V_3 e di assegnarne quindi la rappresentazione in S_3, costruendo così un tipo del nostro gruppo cremoniano (*).

(*) Così dovremo poi fare nel caso icosaedrico. Qui, valendosi delle condizioni perchè una forma binaria sestica sia ottaedrica — sia cioè covariante sestico T di una e quindi di ∞^1 forme biquadratiche — (Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* pagine 440, 447), si troverebbe che la nostra V_3^5 è intersezione di cinque quadriche:

$$x_0\, x_4 - 4\, x_1\, x_3 + 3\, x_2^2 = 0 \qquad x_2\, x_6 - 4\, x_1\, x_5 + 3\, x_2^2 = 0$$

$$x_0\, x_5 - 3\, x_1\, x_4 + 2\, x_2\, x_3 = 0 \qquad x_1\, x_6 - 3\, x_2\, x_5 + 2\, x_3\, x_4 = 0$$

$$x_0\, x_6 - 9\, x_2\, x_4 + 8\, x_3^2 = 0,$$

e può rappresentarsi su S_3 (per proiezione da un piano osculatore alla C^6) col sistema lineare ∞^6 di superficie cubiche:

$$k_0\, x_0^3 + x_0^2\, (k_1\, x_1 + k_2\, x_2 + k_3\, x_3)$$

$$+ k_4\, x_0\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)$$

$$+ k_5\, (12\, x_1^2\, x_3 - 9\, x_1\, x_2^2 - 2\, x_0\, x_2\, x_3) + k_6\, (36\, x_1\, x_2\, x_3 - 27\, x_2^3 - 8\, x_0\, x_3^2) = 0.$$

Ma poichè la V_3 è del 5.° ordine e su di essa non può esistere alcun fascio (invariante) di piani (§ 24), essa avrà le curve sezioni (cogli S_4) ellittiche, e rientrerà quindi in una categoria di varietà già studiata (*). Così potremo concludere *a priori* che la V_3 dovrà venire proiettata univocamente sopra uno spazio S_3 da una sua conica (certo esistente) (**), e che in questa rappresentazione le immagini delle superficie sezioni iperpiane della V_3 saranno superficie cubiche. Ora, vi sono in S_3 più tipi di sistemi lineari ∞^6 di superficie cubiche, ad intersezioni ellittiche, capaci di rappresentare una V_3 del 5.° ordine di S_6; ma fra questi tipi ve n'è uno solo cui corrisponde una V_3 non contenente una congruenza del 1.° ordine di rette. Siccome la nostra V_3 non può contenere una siffatta congruenza, che certo risulterebbe invariante pel gruppo proiettivo ∞^3 — (§ 24) —, così concludiamo che la rappresentazione della V_3 deve precisamente condurre a quel tal caso, cioè al caso di un sistema lineare di superficie cubiche definito da una quartica base di 2.ª specie.

Si trae di qui, che: *Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo ottaedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni cubiche caratterizzato dal trasformare in sè stesso il sistema lineare delle superficie di 3.° ordine passanti per una quartica di 2.ª specie.*

Osservazione. Sopra la nostra V_3 di S_6 esiste una congruenza di rette del *3.° ordine* invariante rispetto al gruppo proiettivo considerato; essa viene rappresentata in S_3 dalla congruenza delle corde della quartica fondamentale, che è a sua volta invariante pel gruppo cubico di S_3.

Le rette di quella congruenza del 3.° ordine su V_3 contengono rispett. i poli dei gruppi delle ∞^2 involuzioni I_6^1 di forme ottaedriche, del tipo $x_1 x_2 (k_1 x_1^4 + k_2 x_2^4)$, sulla curva C^6. La congruenza è del 3.° ordine, corrispondentemente al fatto analitico che ogni forma ottaedrica può ridursi al tipo $x_1 x_2 (k_1 x_1^4 + k_2 x_2^4)$ — o anche $x_1 x_2 (x_1^4 + x_2^4)$ — in tre modi diversi (scegliendo cioè una qualunque delle tre coppie armoniche che ne sono parte come coppia di riferimento $x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* Rend. Accad. dei Lincei, 1894 (pag. 481 e 536). Cfr. anche Mathem. Annalen, Bd. 46.

(**) Quando la V_3 si proietti da un piano osculatore alla C^6 [cfr. la nota (*), a pagina precedente], questa conica si riduce a una retta (tangente alla C^6) contata due volte.

27. *Caso icosaedrico.* Poichè ogni gruppo icosaedrico (G_{60}) in una forma di 1.ª specie è definito dal trasformare in sè stesso un certo gruppo di 12 elementi di questa forma, potremo riferirci in questo caso alla curva C_{12} razionale normale di S_{12}. Dovremo considerare le ∞^3 sezioni iperpiane di essa che costituiscono gruppi *icosaedrici* (cioè invarianti per gruppi proiettivi icosaedrici sulla C_{12}), e la varietà V_3 luogo dei poli di questi iperpiani.

Il gruppo cremoniano proposto dovrà operare nello spazio come il gruppo proiettivo della C_{12} opera sopra questa V_3.

L'*ordine della* V_3, valutato secondo la formola del § 25, è:

$$x = \frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10}{60} = 22.$$

Della V^{3}_{22} possiamo scrivere le equazioni, mediante la teoria delle forme binarie. Valendoci di queste equazioni dimostreremo che:

La V_3 *viene proiettata univocamente* (sopra uno spazio S_3) *da ogni* S_8 *osculatore alla* C_{12}. *Le immagini delle sue sezioni iperpiane risultano superficie del 7.º ordine componenti un sistema lineare* ∞^{12}.

Ne dedurremo quindi che il gruppo cremoniano proposto si può ridurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del 7.º ordine, che lascia invariato il detto sistema lineare.

Rappresentata la nostra C_{12} colle equazioni parametriche ($i = 0, 1, 2, \ldots, 12$)

$$x_i = \lambda^{12-i} \mu^i,$$

è noto che ogni punto (x) dello spazio S_{12} ha come iperpiano polare rispetto a questa curva l'iperpiano di coordinate

$$\xi_i = (-1)^i \binom{12}{i} x_{12-i},$$

il quale sega la C_{12} nei 12 punti rappresentati dall'equazione

$$\sum_i (-1)^i \binom{12}{i} x_i \,.\, \lambda^i \mu^{12-i} = 0.$$

I punti della nostra V^3_{22} sono i poli degli iperpiani le cui sezioni con C_{12} costituiscono gruppi icosaedrici. Ora le condizioni perchè sia icosaedrico il gruppo di 12 punti (di C_{12}) rappresentato dall'ultima equazione, ovvero (cambiando λ in $-\lambda$) dalla:

$$f(\lambda, \mu) \equiv \sum \binom{12}{i} x_i \lambda^i \mu^{12-i} = 0. \tag{1}$$

sono espresse simbolicamente da

$$(ff)^4 \equiv 0,$$

e portano alle 17 equazioni (*)

$$\left.\begin{array}{c}\sum_\lambda \binom{8}{\lambda}\binom{8}{\rho-\lambda}\left\{x_\lambda\, x_{\rho+4-\lambda} - 4\, x_{\lambda+1}\, x_{\rho+3-\lambda} + 3\, x_{\lambda+2}\, x_{\rho+2-\lambda}\right\} = 0 \\ (\rho = 0,\ 1,\ 2,\dots,\ 16),\end{array}\right\} \qquad (2)$$

dove la somma va estesa a quei valori di λ (zero incluso) che sono $\leq \rho$ e ≤ 8, e tali ancora che $\rho - \lambda \leq 8$.

Si può dunque affermare che *le 17 equazioni* (2) *rappresentano la* V_3^{22}, la quale (in particolare) riesce intersezione parziale delle 9 quadriche (le cui equazioni sono ottenute dalla (2) per $\rho = 0,\ 1,\dots,\ 8$):

$$\left.\begin{array}{l}
x_0 x_4 - 4\, x_1 x_3 + 3\, x_2^2 = 0 \\
x_0 x_5 - 3\, x_1 x_4 + 2\, x_2 x_3 = 0 \\
7\, x_0 x_6 - 12\, x_1 x_5 - 15\, x_2 x_4 + 20\, x_3^2 = 0 \\
x_0 x_7 - 6\, x_2 x_5 + 5\, x_3 x_4 = 0 \\
5\, x_0 x_8 + 12\, x_1 x_7 - 42\, x_2 x_6 - 20\, x_3 x_5 + 45\, x_4^2 = 0 \\
x_0 x_9 + 6\, x_1 x_8 - 6\, x_2 x_7 - 28\, x_3 x_6 + 27\, x_4 x_5 = 0 \\
x_0 x_{10} + 12\, x_1 x_9 + 12\, x_2 x_8 - 76\, x_3 x_7 - 21\, x_4 x_6 + 72\, x_5^2 = 0 \\
x_0 x_{11} + 24 x_1 x_{10} + 90\, x_2 x_9 - 130\, x_3 x_8 - 405\, x_4 x_7 + 420\, x_5 x_6 = 0 \\
x_0 x_{12} + 60\, x_1 x_{11} + 534\, x_2 x_{10} + 380\, x_3 x_9 - 3195 x_4 x_8 - 720\, x_5 x_7 + 2940 x_6^2 = 0.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Si consideri ora lo spazio (S_8) $\sum$ di equazioni: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, osculatore alla C_{12} nel punto $x_0 = \cdots = x_{11} = 0$. Vedremo facilmente che l'intersezione delle 9 quadriche (3) (esclusa la parte che sta nell'iperpiano $x_0 = 0$) viene proiettata univocamente da $\sum$; ne seguirà che tale intersezione (residua) è irriducibile e quindi, contenendo la V_3^{22}, coincide con questa. La stessa V_3^{22} risulterà perciò proiettata univocamente (da $\sum$, e quindi) da ogni S_8 osculatore a C_{12}.

Un S_9 generico passante per $\sum$ si rappresenta con equazioni del tipo

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3},$$

dove le a sono certe costanti. Ora, queste equazioni, congiunte alle (3), danno un sistema che è soddisfatto da un solo gruppo di valori dei mutui rapporti delle x_i ($x_0 \neq 0$), poichè dalle stesse (3) seguono (per $x_0 \neq 0$) le $x_4,\ x_5,\dots,\ x_{12}$

(*) GORDAN-KERSCHENSTEINER, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Bd. II, s. 212.

espresse razionalmente mediante x_0, x_1, x_2, x_3. La varietà intersezione delle nove quadriche (3) è dunque incontrata da un S_9 generico passante per Σ in *un* (solo) punto esterno allo spazio $x_0 = 0$. Escludendo pertanto da questa varietà la parte di essa (certo esistente) che è contenuta in $x_0 = 0$, dovrà restare una varietà a tre dimensioni proiettata univocamente da Σ, ad es. sullo S_3 fondamentale opposto ($x_4 = \cdots = x_{12} = 0$). Questa parte sarà appunto, come già abbiamo notato, la nostra V_3^{22}.

La corrispondenza biunivoca che così risulta stabilita fra la varietà V_3^{22} e lo spazio S_3 ($x_4 = \cdots = x_{12} = 0$) sul quale l'abbiamo proiettata (da Σ) sarà rappresentata dalle stesse equazioni che, in forza delle (3), esprimono le $x_4, \ldots, x_{12}$ mediante x_0, x_1, x_2, x_3; vale a dire ogni punto di questo S_3 sarà proiezione di quel punto di V_{22}^3 (completamente individuato, finchè $x_0 \neq 0$) che ha le stesse x_0, x_1, x_2, x_3, e per cui le $x_4, \ldots, x_{12}$ sono così definite:

$$x_4 = \frac{1}{x_0} \left\{ 4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2 \right\}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_0^2} \left\{ 3\, x_1\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 2\, x_0\, x_2\, x_3 \right\}$$

$$x_6 = \frac{1}{7\, x_0^3} \left\{ 36\, x_1^2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) + 9\, x_0\, x_2\, (4\, x_1\, x_3 - 5\, x_2^2) - 20\, x_0^2\, x_3^2 \right\}$$

$$x_7 = \frac{1}{x_0^3} \left\{ 18\, x_1\, x_2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - x_0\, x_3\, (20\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) \right\}$$

$$x_8 = \frac{1}{x_0^3} \left\{ -3\, (4\, x_1\, x_3 - 15\, x_2^2)\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 32\, x_0\, x_2\, x_3^2 \right\}$$

$$x_9 = \frac{1}{x_0^4} \left\{ -27\, x_1\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 108\, x_0\, x_2\, x_3\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 80\, x_0^2\, x_3^3 \right\}$$

$$\begin{aligned} x_{10} = \frac{1}{x_0^5} \Big\{ & -216\, x_1^2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 225\, x_0\, x_2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & + 288\, x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 8\, x_0^2\, x_3^2\, (100\, x_1\, x_3 - 63\, x_2^2) \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} = \frac{1}{x_0^6} \Big\{ & -1296\, x_1^3\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 1620\, x_0\, x_1\, x_2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & + 1728\, x_0\, x_1^2\, x_2\, x_3\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) + 285\, x_2^0\, x_3\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & - 2400\, x_0^2\, x_1\, x_3^2\, (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 576\, x_0^2\, x_1\, x_2^2\, x_3^2 + 640\, x_0^3\, x_2\, x_3^3 \Big\} \end{aligned}$$

$$x_{12} = \frac{1}{x_0^6} \Big\{ - 7776\, x_1^2\, x_2 (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2$$

$$- 3375\, x_0 (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^3 + 15120\, x_0\, x_1\, x_3 (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)^2$$

$$+ 10368\, x_0\, x_1\, x_2^2\, x_3 (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2)$$

$$- 16128\, x_0^2\, x_2\, x_3^2 (4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2) - 4608\, x_0^2\, x_1\, x_2\, x_3^3$$

$$+ 6400\, x_0^3\, x_3^4 \Big\}.$$

Ciò posto, è pur chiaro che il sistema lineare rappresentativo della V_3^{22} si otterrà ponendo nell'equazione lineare generale:

$$\sum k_i\, x_i = 0,$$

in luogo di $x_1, \ldots, x_{12}$ le loro espressioni mediante x_0, x_1, x_2, x_3. Moltiplicando ancora tutti i termini dell'equazione per la potenza massima x_0^6 che compare a denominatore, e ponendo per brevità:

$$f = 4\, x_1\, x_3 - 3\, x_2^2,$$

avremo:

$$k_0\, x_0^7 + x_0^6 \Big\{ k_1\, x_1 + k_2\, x_2 + k_3\, x_3 \Big\}$$

$$+ k_4\, x_0^5\, f + k_5\, x_0^4 \Big\{ 3\, x_1\, f - 2\, x_0\, x_2\, x_3 \Big\}$$

$$+ x_0^3 \Big\{ k_6 \Big[36\, x_1^2\, f + 9\, x_0\, x_2 (f - 2\, x_2^2) - 20\, x_0^2\, x_3^2 \Big]$$

$$+ k_7 \Big[18\, x_1\, x_2\, f - x_0\, x_3 (5\, f + 12\, x_2^2) \Big]$$

$$+ k_8 \Big[3\, f (12\, x_2^2 - f) - 32\, x_0\, x_2\, x_3^2 \Big] \Big\}$$

$$+ k_9\, x_0^2 \Big\{ - 27\, x_1\, f^2 + 108\, x_0\, x_2\, x_3\, f - 80\, x_0^2\, x_3^3 \Big\}$$

$$+ k_{10}\, x_0 \Big\{ - 216\, x_1^2\, f^2 + 9\, x_0\, x_2\, f (25\, f + 32\, x_1\, x_3) - 8\, x_0^2\, x_3^2 (25\, f + 12\, x_2^2) \Big\}$$

$$+ k_{11} \Big\{ - 1296\, x_1^3\, f^2 + 108\, x_0\, x_1\, x_2\, f (15\, f + 16\, x_1\, x_3)$$

$$- 9\, x_0^2\, x_3 (35\, f^2 + 200\, x_2^2\, f + 64\, x_1\, x_2^2\, x_3) + 640\, x_0^3\, x_2\, x_3^3 \Big\}$$

$$+ k_{12} \Big\{ - 7776\, x_1^2\, x_2\, f^2 + 27\, x_0\, f (- 125\, f^2 + 560\, x_1\, x_3\, f + 384\, x_1\, x_2^2\, x_3)$$

$$- 2304\, x_0^2\, x_2\, x_3^2 (7\, f + 2\, x_1\, x_3) + 6400\, x_0^3\, x_3^4 \Big\} = 0.$$

Alle sezioni iperpiane della varietà V_3^{22} corrispondono dunque superficie del 7.° ordine aventi a comune una conica doppia $x_0 = f = 0$ e una retta (semplice) $x_0 = x_1 = 0$ tangente a questa conica; lungo questa retta tutte le superficie del sistema sono toccate dallo stesso piano $x_0 = 0$. L'intersezione loro con questo piano, all'infuori di quella conica e di questa retta (ciascuna contata due volte), comprende una retta variabile del fascio $x_0 = x_1 + \lambda x_2 = 0$.

Il punto fondamentale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ è triplo per tutte queste superficie, e il relativo cono tangente si riduce al piano $x_0 = 0$ contato tre volte.

Concludiamo dunque: *Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo icosaedrico si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del 7.° ordine che lasciano invariato un sistema lineare ∞^{12} di superficie d'ordine 7, le quali si toccano convenientemente nei punti di una curva base costituita da una conica doppia e da una retta semplice* (tangente alla conica in un punto che è triplo per quelle superficie).

Il gruppo tipico contiene entro di sè un gruppo proiettivo ∞^2 che lascia invariata una cubica gobba ed un punto di essa. Questa circostanza permetterebbe di andare più innanzi nello studio del gruppo.

Bologna-Roma, Maggio 1897.