Gino Fano

Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sé

Rendiconti Circ. Mat. Palermo, Vol. **10** (1896), p. 1–15

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1896_5>

MEMORIE E COMUNICAZIONI

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CON UN GRUPPO CONTINUO TRANSITIVO DI TRASFORMAZIONI PROJETTIVE IN SÈ.

Nota di **Gino Fano**, in Roma.

Adunanza dell'11 agosto 1895.

1. I risultati ottenuti dal sig. Enriques sulla riduzione dei gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano a tre tipi determinati (gruppi di omografie, gruppi di trasformazioni quadratiche con due punti fissi, gruppi di Jonquières) (*), assieme ad alcune semplici considerazioni sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè, conducono subito al teorema (**):

Ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè, si può riferire birazionalmente a un piano, a una quadrica di S_3, o a un cono razionale normale di un certo spazio S_{n+1}, per modo che il gruppo considerato di trasformazioni projettive dia luogo rispettivamente a un gruppo di

(*) Rend. R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1° sem., p. 468 e seg.

(**) Cfr. una mia Nota inserta nei Rend. cit., vol. IV, 1° sem., p. 325.

omografie piane, oppure a un gruppo di trasformazioni projettive dello spazio S_3 o S_{n+1} che muti in sè quella certa quadrica o quel cono razionale normale.

Io mi propongo ora di mostrare come questo stesso teorema possa stabilirsi senza ricorrere al risultato contenuto nella Nota cit. del sig. Enriques, ma solo servendosi (per un certo caso) di un teorema generale del sig. Lie, già dimostrato per gruppi a un numero qualunque di variabili (*). In seguito vedremo anche come da questi risultati sulle superficie algebriche seguano facilmente quelli del sig. Enriques sui gruppi Cremoniani nel piano. Questi ultimi risultati verranno così dimostrati nuovamente, per una via meno diretta di quella (unica) fin qui conosciuta (**), ma nella quale si vedrà applicato un concetto semplicissimo, che potrebbe anche servire nelle ricerche analoghe per lo spazio S_3 e per spazi superiori qualunque: *La riduzione di tutti i possibili gruppi di trasformazioni birazionali (Cremoniane) di uno spazio qualunque S_k a certi tipi determinati si può ricondurre alla determinazione delle diverse varietà (o tipi di varietà) M_k, appartenenti a spazi S_i dove $i \geq k$, che ammettono gruppi continui di trasformazioni projettive in sè.* Ben inteso che la questione, lungi dall'essere risolta, non sarebbe così che *trasformata*, e non è per pura trasformazione che le difficoltà si vincono; ma certe questioni si possono a volte studiare più facilmente quando siano messe sotto una determinata forma, che non sotto un'altra, e non è escludibile che questo possa forse esserne un esempio (***).

La considerazione che mettiamo a base di tutto il nostro ragionamento è la seguente. Se una superficie algebrica appartenente a uno spazio qualsiasi ammette un gruppo continuo transitivo (****) ∞^k $(k \geq 2)$ di trasformazioni projettive in sè, vi sarà sempre in questo gruppo

---

(*) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 631.

(**) Cfr. Enriques, l. c.

(***) Perchè appunto il metodo diretto ed elegante del sig. Enriques non si può certo estendere, per il momento, nemmeno allo spazio S_3.

(****) Per gruppo *transitivo* rispetto a una superficie (o varietà) qualunque intendiamo un gruppo tale, che per mezzo di una opportuna operazione di esso si possa passare da un punto generico di questa superficie (o varietà) ad ogni altro punto generico di essa.

un sottogruppo ∞^{k-2} le cui operazioni lasceranno fisso un punto assegnato ad arbitrio sopra quella superficie (*). Questo sottogruppo subordinerà nella serie ∞^1 delle direzioni uscenti da quel punto sulla superficie (ossia nel fascio delle tangenti alla stessa superficie in quel punto) un gruppo projettivo al più ∞^{k-2}, ma eventualmente anche di dimensione minore (e certo minore anzi, quando sia $k-2 \geqq 4$, ossia $k \geqq 6$). Prescindendo dal valore particolare di k (che supporremo per ora soltanto $\geqq 3$, riservandoci trattare alla fine e a parte il caso di $k = 2$), noi distingueremo e studieremo separatamente i casi in cui quest'ultimo gruppo è quello ∞^3 di tutte le possibili projettività nel fascio delle tangenti, oppure è solo un gruppo ∞^2, o ∞^1, ovvero si compone soltanto di un numero finito di operazioni, e in particolare della sola trasformazione identica.

2. Cominciamo dal primo caso; e qui, per maggior chiarezza, riferiamoci a una qualunque rappresentazione piana della superficie proposta [che è certamente razionale (**)]; sicchè sul piano rappresentativo avremo, in corrispondenza al gruppo projettivo sulla superficie, un certo gruppo continuo G di trasformazioni birazionali (Cremoniane). Poichè le ∞^1 direzioni uscenti da un punto arbitrario del piano, supposto fisso questo punto, devono venir permutate fra loro secondo tutte le ∞^3 projettività nel loro fascio, ne segue senz'altro che il gruppo G sarà *primitivo* (***), e simile al gruppo ∞^8 di tutte le omografie piane, al gruppo ∞^6 di tutte le trasformazioni

(*) Queste operazioni saranno però in numero finito (e potranno anche ridursi alla sola trasformazione identica) nel caso $k = 2$.

(**) Cfr. un'altra mia Nota nei Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. IV, 1° sem., p. 153.

(***) Lie, op. cit., vol. III, pag. 32; Lie-Scheffers: *Vorlesungen über continuirliche Gruppen*, ecc., pag. 344. Infatti, se il gruppo G non fosse primitivo, esso dovrebbe trasformare in sè (per definizione) un certo sistema ∞^1 di curve $\varphi(x, y) =$ cost. (dove x, y sono coordinate non omogenee nel piano); e fissato allora un punto generico del piano come punto unito, risulterebbero unite anche le direzioni delle tangenti in questo punto alle curve del sistema che passano per il punto stesso (ciascuna di per sè, o almeno nel loro complesso); sicchè il gruppo subordinato nel fascio di queste direzioni non sarebbe più ∞^3.

lineari (ossia delle omografie con una retta fissa), oppure al gruppo ∞^5 lineare speciale [sottogruppo del precedente, ottenuto coll'imporre a un certo determinante di essere costantemente eguale all'unità (*)]. In altri termini, il nostro gruppo G dovrà contenere 8, 6 o 5 parametri (essenziali); e dovrà potersi ridurre con un opportuno cambiamento di variabili, ossia con un'opportuna trasformazione puntuale S, a uno dei tre gruppi projettivi testè menzionati (all'uno, all'altro, o al terzo, a seconda, naturalmente, del numero dei parametri). Indicata dunque con T una trasformazione qualunque del gruppo G, dovrà l'insieme di tutte le trasformazioni $S^{-1}TS$ coincidere con uno di quegli stessi tre gruppi projettivi.

Dico ora che questa trasformazione S deve anche essere una trasformazione Cremoniana, vale a dire che essa (ovvero la sua inversa, il che fa lo stesso) alle rette del piano fa corrispondere le ∞^2 curve razionali di una certa rete omaloidica (ossia curve razionali incontrantisi a due a due in un solo punto variabile). — Infatti, la trasformazione S^{-1} muta le rette del piano in curve di un certo sistema ∞^2 che deve essere unito rispetto al gruppo Cremoniano G, e al quale corrisponderà perciò sulla superficie data un sistema pure ∞^2 e unito rispetto al gruppo projettivo proposto. Imponendo a una curva generica di quest'ultimo sistema di essere unita, noi veniamo a staccare da questo gruppo projettivo, che è almeno ∞^5, un gruppo almeno ∞^3, che sulla curva stessa subordinerà un gruppo almeno ∞^2 di trasformazioni projettive (**). Questa curva generica ammette dunque almeno ∞^2 trasformazioni projettive in sè, ed è perciò algebrica e razionale (normale). La trasformazione S^{-1} fa dunque corrispondere alle rette del piano curve razionali. — Di più, due qua-

---

(*) Lie, op. cit., vol. I, p. 631; vol. III, p. 35; Lie-Scheffers, op. cit., p. 351, 359. — Il teorema dato a p. 631 del 1° vol. dell'op. cit. del sig. Lie è, come ho già detto (cfr. n° 1), più generale, e si riferisce ad ogni gruppo continuo transitivo di uno spazio qualunque S_n, nel quale le trasformazioni che lasciano fisso un punto generico operino sulle ∞^{n-1} direzioni uscenti da questo punto come le ∞^{n^2-1} projettività di uno spazio S_{n-1}.

(**) Appunto perchè nel gruppo lineare speciale del piano (che è il caso per noi più sfavorevole) vi è un sottogruppo ∞^3 che trasforma in sè una retta arbitraria, subordinando su di essa un gruppo ∞^2 di projettività.

lunque di queste curve piane, oppure le loro corrispondenti sulla superficie data, non possono incontrarsi che in un solo punto (variabile). Infatti, se si tratta di un gruppo ∞^8, noi possiamo domandare che in quel sistema ∞^2 siano unite due curve generiche, e quindi il punto (o i punti) di loro intersezione, restando pur sempre subordinato sopra ciascuna delle due curve un gruppo ∞^2 di trasformazioni birazionali (o projettive); non vi potrà quindi essere (sopra ciascuna curva) più di un punto unito fisso, ossia più di una intersezione coll'altra curva. Se si tratta invece di un gruppo ∞^6 o ∞^5, verrà nello stesso modo subordinato sopra ciascuna delle due curve un gruppo soltanto ∞^1, variabile entro un determinato gruppo ∞^2; sicchè dei *due* punti uniti (in generale distinti) di quel gruppo *uno solo* risulterà mobile sopra una qualunque delle due curve al variare dell'altra di esse, e questo solo sarà perciò una loro intersezione variabile.

E poichè una trasformazione Cremoniana, applicata al sistema rappresentativo di una superficie razionale, non fa che modificarne (in modo non essenziale) la rappresentazione piana, così concludiamo:

Se il gruppo proposto, nell'intorno di un punto generico della superficie data, supposto unito, subordina il gruppo ∞^3 di tutte le possibili trasformazioni projettive, la superficie stessa si potrà rappresentare birazionalmente su di un piano, in modo che quello stesso gruppo dia luogo sopra questo piano a un gruppo primitivo (almeno ∞^5) di trasformazioni PROJETTIVE.

3. Supponiamo ora che nell'intorno di un punto generico imposto come unito venga subordinato un gruppo ∞^2 di omografie, ovvero anche un gruppo ∞^1 di omografie paraboliche (ossia ad elementi uniti coincidenti), per modo che sempre vi sia una (ed una sola) direzione unita fissa uscente da quel punto. Rimane così individuato sulla superficie un sistema ∞^1 di curve, tale che per un punto qualunque di essa passa una ed una sola curva del sistema (*). Questo

(*) Sarebbero in sostanza le curve integrali di un'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$, essendo x, y coordinate sulla superficie o in un piano rappresentativo di essa, e φ simbolo di funzione univoca.

sistema ∞^1 o *fascio* di curve è anche unito rispetto a tutte le trasformazioni projettive della superficie in sè stessa, perchè, se una qualunque di queste trasformazioni muta un certo punto P della superficie in un altro punto P', essa dovrà anche trasformare il sottogruppo per cui è unito P in quello per cui è unito P', e quindi la direzione fissa uscente da P in quella pure fissa uscente da P'. Di più, ogni curva del fascio sarà trasformata in sè da un gruppo ∞^{k-1}, quindi almeno ∞^2, di omografie (supposto il gruppo complessivo ∞^k, e $k \geq 3$); queste curve saranno dunque algebriche e razionali. Se anche il gruppo ∞^k subordinasse sopra una curva generica del fascio, imposta come unita, un gruppo soltanto ∞^1 di trasformazioni projettive, questa curva generica sarebbe egualmente algebrica, perchè luogo di punti uniti per infinite omografie del gruppo ∞^k; ed essendo algebrica e con infinite trasformazioni projettive in sè, sarebbe ancora razionale (*). E sarà pure razionale il fascio stesso costituito da queste ∞^1 curve; perchè è tale, su di una superficie razionale (o in un piano), ogni sistema algebrico (**) ∞^1 di curve algebriche, quando per un punto qualunque della superficie passa in generale una sola curva del sistema.

Questo fascio ammetterà infinite direttrici—infinite curve cioè incontranti ogni curva di esso in un solo punto variabile — [come si

---

(*) Sopra questa curva generica il gruppo ∞^k deve certo subordinare un gruppo almeno ∞^1 di trasformazioni projettive; un gruppo tale cioè, che due punti qualunque (o almeno non particolari) di essa si possano sempre far corrispondere fra loro. Se A e B sono due punti così fatti, C un terzo punto qualunque della superficie, e se si indicano con S_a e S_b due trasformazioni contenute nel gruppo proposto, nelle quali C sia il punto omologo ad A o rispettivamente a B, è chiaro che la trasformazione $S_a S_b^{-1}$ apparterrà allo stesso gruppo, e muterà A in B.

(**) Si vede facilmente che il nostro sistema ∞^1 deve appunto essere algebrico. Infatti, se non lo fosse, e non fosse quindi esso stesso lineare, apparterrebbe però sempre a un determinato sistema lineare di dimensione minima i (≥ 2), il quale dovrebbe anche esser trasformato in sè dal gruppo proposto; sicchè sulle curve di esso questo gruppo opererebbe come un gruppo projettivo ∞^k sui punti di uno spazio S_i. Quel sistema ∞^1 sarebbe allora una *curva* unita di questo spazio, non contenuta in alcuno spazio inferiore; e per $k \geq 2$ questa curva è necessariamente algebrica.

vede subito ricorrendo a una qualsiasi rappresentazione piana della superficie, p. es. nell'ipotesi che alle curve di quel fascio corrispondano rette per un punto (*)].—Un sistema qualunque, ad es. un sistema lineare di queste direttrici (e in particolare un sistema lineare di dimensione zero, ossia una direttrice unica) verrà trasformato dalle operazioni del gruppo (in generale almeno) in infiniti altri sistemi, il cui insieme costituirà un sistema di curve invariante rispetto al gruppo stesso; e invariante sarà pure il sistema lineare *completo* che contiene quest'ultimo sistema ed ha lo stesso suo *grado* (nel quale cioè due curve generiche si segano ancora nello stesso numero di punti variabili, e non in un numero superiore). Fra i sistemi lineari completi così ottenuti prendiamone uno di dimensione minima, purchè $\geqq 3$ (**); e riferiamo birazionalmente la superficie data a un'altra le cui sezioni (iper)piane corrispondano precisamente alle curve di quel sistema lineare completo. [Questo riferimento è certo possibile, perchè in un sistema lineare completo e almeno ∞^2 di curve piane (o che almeno possiamo supporre tali) e razionali, il passaggio di una curva per un punto generico non porta mai di conseguenza il passaggio di essa per altri punti determinati]. La nuova superficie che così otterremo sarà una rigata razionale normale [*rigata*, perchè alle curve del fascio primitivo, incontrate in un solo punto variabile dalle curve che hanno per omologhe le attuali sezioni (iper)piane, corrisponderanno necessariamente rette sulla nuova superficie; *normale*, perchè il sistema lineare rappresentante la superficie si è supposto completo]; e su di essa il gruppo proposto determinerà ancora un gruppo di trasformazioni projettive.—Indicato con n l'ordine di questa rigata (con $n+1$ quindi la dimensione dello spazio cui essa appartiene) è chiaro, per le ipotesi fatte, che essa non potrà contenere alcun sistema lineare completo di direttrici la cui dimensione sia $\geqq 3$ e in pari tempo $\leqq n$. Ma, se la rigata non

---

(*) Cfr. Noether: *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., Bd. 3).

(**) Si potrebbe anche prendere, quando esistesse, un sistema lineare unito ∞^2, il quale, se completo, si ridurrebbe a una rete omaloidica, e potrebbe perciò riferirsi al sistema delle rette di un piano. Si troverebbe così direttamente (cfr. più avanti) il caso di un gruppo di omografie piane con un punto fisso.

è un cono, essa contiene certo un sistema lineare completo ∞^{n-1} (di grado $n-2$) di direttrici di ordine $n-1$ (segate dagli iperpiani condotti per una sua generatrice qualunque) (*); essa sarà dunque sempre un cono quando sia $n-1 \geqq 3$, ossia $n \geqq 4$. — Rimarrebbero i due casi $n=3$ e $n=2$. Ma per $n=2$ la rigata deve anche essere un cono (quadrico, di S_3); perchè, se fosse una quadrica non degenere, si avrebbero su di essa, per ogni punto imposto come unito, *due* direzioni fisse: quelle delle due generatrici uscenti da questo punto, e quindi le due corrispondenti sulla superficie data. Per $n=3$ invece si potrà avere anche la rigata cubica di S_4, con (una) direttrice rettilinea; e rappresentando questa rigata su di un piano in modo che alle sue sezioni corrispondano le coniche per un punto (in sostanza: projettandola su quel piano da una sua generatrice qualunque), il gruppo considerato darà luogo sul piano stesso a un gruppo di omografie con quel punto fisso (**).

Dunque: *In questo secondo caso la superficie data può riferirsi birazionalmente ad un cono razionale normale di un certo spazio, in modo che il gruppo corrispondente a quello dato risulti ancora costituito da sole trasformazioni projettive; oppure ad un piano (cono razionale normale di 1° ordine?), ottenendo su di questo piano un gruppo projettivo con un punto fisso* (***) (****).

(*) Cfr. ad es. Segre: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XIX (1884); nota a p. 8).

(**) Questo stesso ragionamento si può presentare in modo forse più semplice, ma non sostanzialmente diverso, partendo da un sistema lineare completo di direttrici del fascio considerato, il quale sia anche unito rispetto al gruppo proposto, ma di dimensione qualunque (purchè $\geqq 3$). Si giunge così a una rigata razionale normale, che non sarà in generale un cono, ma potrà ridursi ad esserlo mediante projezione dall'unica sua direttrice minima. (È facile vedere che di direttrici minime ve ne dovrà essere in questo caso una sola, e non tutto un fascio).

(***) Si osservi che il ragionamento qui esposto è basato unicamente sull'*esistenza sulla superficie di un fascio razionale di curve razionali, unito rispetto al gruppo che si considera*. Potremo dunque applicarlo anche in seguito, ogni qual volta risulti accertata l'esistenza sulla superficie di un fascio di curve così costituito.

(****) Incidentalmente troviamo anche questo teorema: *Se una superficie algebrica ammette un gruppo continuo transitivo (almeno ∞^3) di trasformazioni projet-*

4. Supponiamo ora che, imposto ad un punto generico della nostra superficie di essere unito, rimanga subordinato nel fascio delle relative tangenti un gruppo ∞^1 di omografie (in generale) non paraboliche. Questo gruppo potrà essere però *continuo* o *misto;* vale a dire vi potranno essere nel fascio due tangenti fisse (in generale) distinte, oppure queste ultime saranno fisse soltanto nel loro insieme, e potranno anche scambiarsi fra di loro. In ogni caso vi sarà sulla superficie un sistema ∞^1 di curve, unito rispetto al gruppo proposto, e tale che per ogni punto della superficie passino due curve di esso, in generale distinte; ma questo sistema potrà anche spezzarsi in due, tali che per ogni punto della superficie passi una curva dell'uno e una curva dell'altro sistema. Vedremo subito che questo spezzamento ha luogo sempre e solo quando le due tangenti considerate poc'anzi per un punto qualunque della superficie sono propriamente fisse (ciascuna di per sè).

Infatti, se quel certo sistema ∞^1 si spezza in due nel modo accennato, ciascuno di questi due dovrà risultare di per sè unito— quando il gruppo proposto ∞^k sia continuo —, perchè ogni operazione di questo gruppo dovrebbe certo o mutare in sè ciascuno dei due sistemi parziali, o scambiarli fra loro; ed è chiaro che non si potrebbe passare dall'un caso all'altro con continuità (come pure è chiaro che le operazioni che scambiano fra loro i due sistemi parziali non potrebbero costituire di per sè un gruppo). Essendo unito pertanto ciascuno di questi due sistemi, saranno anche unite le tangenti a ciascuna delle due curve che passano per un punto qualunque, imposto come unito.—Invece, se il sistema unito ∞^1 è unico (non si può cioè spezzare nel modo indicato), due curve generiche di esso dovranno sempre potersi trasformare l'una nell'altra, e in

---

tive in sè con un solo fascio unito, questo fascio deve ammettere una direttrice del pari unita (che può anche ridursi ad un punto).—Il teorema sussiste anche per i gruppi intransitivi, nei quali siano unite tutte le singole curve di quel fascio, fatta solo eccezione per i gruppi ∞^3 non integrabili, nel qual caso però esiste anche un secondo fascio unito, ma non composto, ben inteso, di curve unite [cfr. una mia Nota cit. nei Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. IV, 1º sem., nota (2) a p. 329].

modo che un punto generico dell'una si muti in un punto pure generico dell'altra. Se dunque a è una curva generica del sistema, P un punto generico di essa, b l'altra curva del sistema che passa per P, si dovrà poter trasformare a in b in modo che il punto P corrisponda a sè stesso. Le due tangenti a queste curve nel punto P si potranno dunque corrispondere in doppio modo (è chiaro che in una tale trasformazione anche la curva b avrebbe a sua volta per corrispondente la a).

Nell'un caso e nell'altro si vedrebbe facilmente (come nel n° prec.) che le curve del sistema (o di ciascuno dei due sistemi) ∞^1 sono algebriche e razionali; e così pure, se vi sono due sistemi distinti, che ciascuno dei due è ancora un fascio razionale. — In quest'ultima ipotesi, due curve qualunque appartenenti rispettivamente ai due fasci non potranno avere che un solo punto comune. Infatti, se ne avessero più d'uno, le curve di ciascun fascio determinerebbero sopra ogni curva dell'altro fascio un'involuzione (di grado > 1), che dovrebbe essere trasformata in sè da tutte le projettività subordinate dal gruppo proposto sopra questa stessa curva; tali projettività non potrebbero dunque costituire che un solo gruppo ∞^1. Imponendo pertanto a due curve generiche appartenenti rispettivamente ai due fasci di essere unite, noi verremmo a staccare dal gruppo dato un gruppo continuo almeno ∞^1, che sopra ciascuna delle due curve subordinerebbe trasformazioni projettive contenute a lor volta in determinati gruppi ∞^1, ma aventi ancora le intersezioni delle due curve come nuovi punti uniti; tali trasformazioni dovrebbero dunque tutte ridursi, per l'una e per l'altra curva, alla trasformazione identica, e darebbero perciò l'identità anche sull'intera superficie, il che è assurdo. — Noi potremo dunque in questo caso riferire birazionalmente la superficie data ad una quadrica, in modo che a quei due fasci di curve razionali sulla prima corrispondano rispettivamente i due sistemi di generatrici sulla seconda (basterà riferire projettivamente quei due fasci razionali rispettivamente a questi due sistemi). Le trasformazioni del gruppo proposto determineranno allora sulla quadrica trasformazioni birazionali che muteranno le generatrici in generatrici (e ciascun sistema di queste in sè stesso), e le sezioni piane (ossia le coniche) in curve direttrici di entrambi i sistemi di rette, e perciò ancora in coniche. Anche sulla quadrica queste trasformazioni risulteranno perciò *projettive* (e il gruppo sarà in questo caso al più ∞^6).

Se invece il sistema unito ∞^1 non si può spezzare in due fasci nel modo accennato, esso sarà però egualmente razionale, e il gruppo proposto sarà certo ∞^3 (sarà cioè precisamente $k = 3$). Infatti, siccome le curve del sistema non possono essere trasformate l'una nell'altra in più che ∞^3 modi diversi, se fosse $k > 3$, vi dovrebbe essere nel gruppo dato un sottogruppo continuo (almeno ∞^1) per il quale risultassero unite tutte le curve del sistema, e quindi ogni punto della superficie, il che non è possibile. Il gruppo sarà dunque certo ∞^3 (essendosi supposto $k \geq 3$), e trasformerà le curve del sistema ∞^1 l'una nell'altra in tutti gli ∞^3 modi possibili, sicchè il sistema stesso sarà anche razionale. Due curve qualunque di esso non avranno che un solo punto a comune; se no, sopra ciascuna curva si avrebbe un'involuzione (di grado > 1), che dovrebbe essere trasformata in sè da tutte le ∞^2 projettività per le quali questa curva è unita; e questo non può avvenire.—Riferiamo ora projettivamente le ∞^1 curve di questa serie razionale al sistema delle tangenti ad una conica; la superficie data risulterà così riferita birazionalmente al piano della conica stessa, assumendosi come corrispondente di un suo punto qualunque l'intersezione delle due tangenti alla conica che sono omologhe alle curve della serie ∞^1 passanti per il punto considerato. In questo piano il gruppo proposto determinerà un gruppo ∞^3 di trasformazioni birazionali che mutano in sè il sistema delle tangenti a una conica; e questo non può essere altro che il gruppo (anche ∞^3) delle trasformazioni *projettive* che mutano la stessa conica in sè medesima (*).

(*) Abbiamo così incontrato un primo esempio di questo fatto notevole, che a prima vista potrebbe forse sembrare strano: *In uno spazio S_r ($r \geq 2$), le trasformazioni di un gruppo continuo che lasciano fisso un punto assegnato ad arbitrio possono anche costituire un gruppo misto* (composto cioè di una *serie discreta di schiere continue*). Così avviene appunto nel caso delle omografie piane con una conica fissa. Imposto ad un punto qualunque (esterno alla conica) di essere unito, i punti di contatto delle tangenti condotte alla conica da questo stesso punto possono essere entrambi uniti, oppure si possono corrispondere in

5. Supponiamo infine che, imposto ad un punto generico di essere unito, rimanga subordinato nell'intorno di esso soltanto un gruppo finito di operazioni, o, eventualmente, la sola trasformazione identica. Allora un elemento lineare generico sulla data superficie assumerà, per effetto delle trasformazioni del gruppo, soltanto ∞^2 posizioni diverse (*), delle quali solo un certo numero finito n apparterranno a un punto arbitrario della superficie stessa. Questi ∞^2 elementi lineari formeranno un sistema ∞^1 di curve, unito rispetto al gruppo proposto, e tale che per un punto qualunque della superficie passeranno n curve di esso. Di sistemi uniti così fatti ne avremo anzi una semplice infinità, corrispondenti ad altrettanti gruppi di n direzioni (trasformabili l'una nell'altra) uscenti da un punto qualunque della nostra superficie. Ciascuno di questi sistemi si comporrà di curve razionali, e sarà esso stesso razionale; come pure sarà razionale la serie costituita dai vari sistemi ∞^1, perchè riferibile biunivocamente a quella dei gruppi di un'involuzione in una forma semplice. — Dico ora anzitutto che deve essere $n = 1$, vale a dire che ciascuno di questi sistemi ∞^1 di curve (uniti rispetto al gruppo proposto) deve essere un *fascio* (razionale) (in altri termini, che per ogni punto imposto come unito sulla data superficie devono sempre risultare unite tutte le direzioni che ne escono sulla superficie stessa). Infatti, se fosse $n = 2$, si potrebbe applicare ad uno qualunque di quei sistemi ∞^1 lo stesso ragionamento dell'ultimo capoverso del n° prec., giungendo così allo stesso risultato quivi ottenuto, mentre invece questo risultato è ora incompatibile colle nuove ipotesi fatte. E se fosse invece $n \geqq 3$, imposto ad un punto generico della nostra superficie di essere unito, risulterebbero anche unite, in ciascuno di quei sistemi ∞^1 (e per un gruppo continuo almeno ∞^1, poichè il gruppo proposto era almeno ∞^3) almeno *tre* curve diverse, e quindi ogni altra curva; sarebbe quindi unito ogni punto della superficie, e questo è anche assurdo. — Questi ∞^1 fasci uniti costituiranno in-

---

doppio modo. Si hanno così due schiere (continue) diverse, la seconda delle quali si compone di ∞^1 omologie armoniche aventi l'asse passante per il punto unito assegnato.

(*) Cfr. anche Lie, op. cit., vol. III, p. 60.

sieme un sistema (algebrico) ∞^2, anche unito rispetto al gruppo proposto, e che sarà precisamente un sistema *lineare*, perchè per due punti arbitrari della superficie passa sempre una sola curva di esso (*). Infatti, imponendo a uno di questi due punti di essere unito, noi possiamo staccare dal gruppo proposto almeno un sottogruppo continuo ∞^1, per il quale le curve del sistema passanti per quel primo punto risulteranno trajettorie; e di queste trajettorie per un altro punto generico della superficie non può passarne che una.— Infine due curve qualunque del sistema ∞^2 non potranno incontrarsi che in un solo punto variabile. Infatti, se così non fosse, le projettività subordinate sopra una curva qualunque del sistema ∞^2 dovrebbero trasformare in sè la serie ∞^1 segata sopra quest'ultima curva dalle rimanenti curve del sistema, e non potrebbero perciò costituire che un solo gruppo ∞^1; sicchè per infinite operazioni del gruppo proposto sarebbero uniti tutti i punti di questa stessa curva, quindi tutti i fasci (del sistema ∞^2) che contengono questa curva. Complessivamente dunque si avrebbero due diversi sistemi di ∞^1 fasci uniti, il che è assurdo.

Il nostro sistema ∞^2 sarà dunque una rete omaloidica, e si potrà perciò far corrispondere, in un'opportuna rappresentazione piana della superficie, al sistema delle rette del piano rappresentativo. In questo piano avremo allora un gruppo *projettivo* con infiniti fasci di rette uniti; dunque il gruppo ∞^3 delle omologie di dato asse (ad es. il gruppo di tutte le omotetie) (**).

6. Rimane il caso di una superficie con un gruppo semplicemente transitivo (ossia soltanto ∞^2) di trasformazioni projettive in sè. — Su di una tal superficie vi è sempre un fascio razionale di curve razionali, unito rispetto al gruppo ∞^2 proposto. Infatti, se quest'ultimo non si compone di operazioni a due a due permuta-

---

(*) Questa condizione è sufficiente per concluderne la linearità del sistema. Cfr. Enriques, Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 2° sem., pag. 3 e seg.

(**) Anche per un gruppo ∞^3 è dunque possibile che, imposto ad un punto generico di essere unito, risultino unite tutte le tangenti alla superficie in questo punto. Ma questi gruppi ∞^3 sono tutti riducibili al gruppo delle omotetie piane.

bili, le trajettorie di ogni suo sottogruppo ∞^1 sono curve algebriche, e quindi razionali (*); e fra questi sottogruppi ve n'è certo uno (ed uno solo) *eccezionale* (o *invariante*) (**), le cui trajettorie formeranno perciò un fascio unito (***), e a sua volta razionale. Se invece le operazioni del gruppo ∞^2 sono tutte permutabili (superficie W), ogni sottogruppo ∞^1 è eccezionale, e determina perciò un fascio di trajettorie unito rispetto all'intero gruppo ∞^2; e fra questi fasci uno almeno dovrà comporsi di curve algebriche e quindi razionali, e sarà esso stesso razionale. [Ciò è vero infatti per le superficie W dello spazio S_3, e quindi anche per quelle di spazi superiori, delle quali le prime possono considerarsi come projezioni (****)]. A questo fascio razionale di curve razionali che è unito rispetto all'intero gruppo ∞^2 possiamo applicare il ragionamento del n° 3, e giungeremo così allo stesso risultato enunciato alla fine di quel n°, senza escludere tuttavia in questo caso, per $n = 2$, la possibilità di riferire la superficie data ad una quadrica di S_3 (quando vi fosse su di essa un secondo fascio razionale di curve razionali, del pari unito).

In ogni caso dunque risulta verificato il teorema enunciato in principio di questa Nota. — In particolare, se il gruppo è almeno ∞^3, potremo sempre ridurci:

1° *Se il gruppo è primitivo: — Al gruppo ∞^8 di tutte le omografie piane, oppure a un gruppo di omografie con una (sola) retta e nessun punto unito (fisso);*

2° *Se il gruppo è primitivo*, e, in particolare, se per ogni punto generico imposto come unito risultano uniti

a) *una* direzione uscente da esso: — *A un gruppo di omografie*

(*) Cfr. una mia Nota inserta nei Rend. dell'Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. IV, 1° sem., pp. 154-55.

(**) Cfr. Lie, op. cit., vol. III, pag. 713.

(***) Questo particolare sottogruppo deve essere trasformato in sè da ogni operazione del gruppo complessivo ∞^2; queste operazioni lasceranno dunque invariato anche il sistema delle sue trajettorie.

(****) E anche se questa projezione risultasse multipla; perchè una curva in corrispondenza algebrica con una curva razionale è certo algebrica; e se è algebrica, e ammette infinite trasformazioni projettive in sè, è certo razionale.

sopra un cono razionale normale di un certo spazio, oppure a un gruppo di omografie piane con un (solo) punto unito fisso (e, forse, una o due rette unite fisse);

b) il sistema di due direzioni uscenti da esso e che si possono anche corrispondere in doppio modo: — *Al gruppo* ∞^3 *delle omografie piane con una conica fissa;*

c) due direzioni singole uscenti da esso: — *A un gruppo di omografie sopra una quadrica di* S_3;

d) tutte le direzioni uscenti da esso: — *Al gruppo* ∞^3 *delle omologie piane di dato asse.*

Sono particolarmente notevoli i casi 2, *b*) e 2, *d*) per la semplicità e determinatezza del risultato ottenuto. — In un'altra Nota mi riservo di applicare questi risultati ai gruppi di trasformazioni Cremoniane del piano.

Pegli (Riviera di Ponente), luglio 1895.

GINO FANO.