Gino Fano

Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé

Memorie R. Acc. Sci. Torino, Serie II, Vol. **46** (1896), p. 187–218

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1896_3>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE

CON

UN GRUPPO CONTINUO NON INTEGRABILE

DI

TRASFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ

MEMORIA

DI

GINO FANO

Approvata nell'Adunanza del 12 Aprile 1896.

---

§ 1.

Considerazioni generali.

1. Questa Memoria ha per iscopo di portare un nuovo contributo alla teoria delle varietà algebriche a un numero qualunque di dimensioni e appartenenti a uno spazio qualsiasi, le quali ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè stesse. — Poco meno che ovvio è ancora il caso delle *curve* algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè (*Curve W*, secondo la denominazione usata dai Sigg. Klein e Lie (1)), essendo queste curve tutte *razionali*, e anzi *razionali normali* (di ordine r in S_r) nel caso di un gruppo almeno ∞^2 di trasformazioni proiettive, mentre quelle che ammettono solo un gruppo ∞^1 di tali trasformazioni si possono ottenere come *proiezioni* di curve razionali normali da spazi aventi rispetto a queste determinate posizioni (2). — Il caso successivo delle *superficie* (o varietà ∞^2) presenta già difficoltà sensibilmente maggiori; ma anch'esso si può ritenere ormai come esaurito, grazie ai risultati ottenuti dal Sig. Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 190-196, e: " Leipz. Ber. ", anno 1895, fasc. II, pag. 209-247) e dal Sig. Enriques (" Atti del R. Ist. Veneto ", ser. 7ª, vol. IV e V), e a quelle ulteriori estensioni ed osservazioni varie, anche per spazi qualunque, che sono contenute in

---

(1) " Compt. Rend. ", t. LXX, pp. 1224 e seg.; " Math. Ann. ", Bd. IV, pp. 50-84.

(2) Cfr. Klein-Lie, l. c.; Loria, " Giornale di Mat. ", vol. XXVI, e " Rend. di Palermo ", t. II (1888); come pure una mia Nota nei " Rend. dell'Acc. dei Lincei ", ser. 5ª, vol. IV, 1° sem., pp. 51 e seg.

talune mie Note (" Rend. della R. Acc. dei Lincei ", serie 5ª, vol. IV, 1° sem., p. 149-156 ; " Rend. di Palermo ", t. X, pp. 1-15 e 16-29). — In questo lavoro io passo quindi allo studio delle varietà algebriche a *tre* dimensioni (M_3) con infinite trasformazioni proiettive in sè, e mi occuperò più specialmente di quelle fra esse che sono contenute in uno spazio a quattro dimensioni (S_4), che sono cioè rappresentabili con un'unica equazione algebrica intera fra cinque variabili omogenee. In particolare mi propongo ora di determinare quali varietà M_3 dello spazio S_4 ammettano un gruppo *transitivo* (quindi almeno ∞^3) di trasformazioni proiettive in sè (un gruppo tale cioè, che con un'opportuna operazione di esso si possa sempre passare da un punto generico della varietà M_3 ad ogni altro) (1).

2. Ma i metodi che sono seguiti nelle ricerche sulle superficie con ∞^2 o più trasformazioni proiettive in sè non potrebbero forse riescire altrettanto utili nel caso attuale. Nella determinazione dei gruppi proiettivi ∞^2 dello spazio S_3 il Sig. Enriques aveva già dovuta escludere (per evitare una soverchia complicazione) la considerazione dei gruppi composti esclusivamente di omografie con punti uniti multipli. Io ho mostrato più tardi (" Rend. Acc. dei Lincei ", vol. e Nota cit.; " Rend. di Palermo ", t. X, p. 23 e seg.) che anche la considerazione di questi ultimi gruppi non conduce ad altre superficie algebriche, all'infuori di quelle già studiate dal Sig. Enriques, e di talune *superficie W* (vale a dire superficie con ∞^2 trasformazioni proiettive *permutabili*) che a lui pure si erano presentate per altra via. Ma se noi volessimo ora incominciare, seguendo una via analoga a questa, lo studio dei gruppi proiettivi ∞^3 dello spazio S_4, ci troveremmo ben presto davanti a un numero assai grande di casi da esaminare ; e ciò anche senza tener conto della maggiore complicazione prodotta sia dalla presenza di punti uniti multipli, dalla cui considerazione è per lo meno assai dubbio se qui si potrebbe ancora prescindere ; sia dal fatto che un punto unito variabile potrebbe qui descrivere un'intera superficie, e non soltanto una curva. — Si avverta pure che la determinazione di *tutte* le superficie di S_3 con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, accennata appena dal Sig. Lie nel 3° vol. della sua *Theorie der Transformationsgruppen*, è stata ora completamente eseguita da lui stesso in una Nota (già cit.) inserta nel 2° fasc. dei " Leipziger Berichte " dell'anno 1895 ; ma anche il metodo seguìto da quest'illustre scienziato, benchè immediatamente estendibile e di riescita sicura, presenta pur sempre taluni inconvenienti ; esso si riduce, fra le altre, a un puro e lunghissimo lavoro di calcolo, e non permette nemmeno di fissare la propria attenzione sopra alcun concetto un po' generale, al quale si possa informare tutta la trattazione ; vantaggio quest'ultimo non disprezzabile, che, per altra via, e almeno in parte, noi non disperiamo forse di raggiungere. — E nella determinazione delle superficie con almeno ∞^3 trasformazioni proiettive in sè, è fondamentale, tanto per il Sig. Lie, quanto per il Sig. Enriques, la considerazione delle linee asintotiche sulle superficie stesse ; consi-

(1) È questo infatti il caso più interessante. In ogni altro caso la varietà M_3 non sarebbe che un aggregato di ∞^1 superficie o di ∞^2 curve (razionali le une e le altre), ciascuna delle quali sarebbe di per sè unita rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo proposto.

derazione che si potrebbe fors' anche estendere alle varietà M_3 di S_4, assumendo come analoghe alle asintotiche le curve determinate dalle direzioni delle tangenti quadripunte, ma che non riescirebbe probabilmente altrettanto utile. Si osservi ad es. (nel caso in cui tali linee siano rette) che mentre una superficie la quale contenga due diversi sistemi ∞^1 di rette è necessariamente una quadrica di S_3 (ovvero un piano), non è noto invece che sussista una proprietà analoga, o almeno altrettanto semplice, per una varietà M_3 contenente un egual numero di sistemi ∞^2 di rette.

3. Noi prenderemo quindi le mosse, in queste ricerche, da considerazioni affatto diverse; e precisamente da alcune considerazioni (dovute pure al Sig. LIE) sulla *composizione* dei gruppi continui. Sarà per noi fondamentale la distinzione di questi gruppi in *integrabili* e *non integrabili.*

Si chiama *integrabile* (1) ogni gruppo continuo ∞^r (G_r), nel quale esista tutta una serie di sottogruppi G_i ($i = r-1,\ r-2, \ldots 2,\ 1$), dipendenti ciascuno da un numero di parametri essenziali eguale all'indice i, e tali che ciascuno di essi sia contenuto come *sottogruppo invariante* nel gruppo precedente G_{i+1} (e in particolare G_{r-1} entro G_r). — Allora si può anche dimostrare (2) che la stessa serie di sottogruppi G_i, o eventualmente un'altra serie analoga, deve anche esser tale che ogni sottogruppo G_i risulti invariante non solo entro G_{i+1}, ma entro ogni gruppo G_{i+k} (dove $1 \leq k \leq r-i$), e in particolare entro G_r.

I gruppi *non integrabili* saranno pertanto quelli in cui non esiste alcuna serie di sottogruppi G_i aventi la proprietà ora indicata.

Un gruppo continuo *non integrabile* deve contenere almeno *tre* parametri (essenziali). I gruppi non integrabili più semplici ne contengono appunto tre soli; e in essi si possono sempre trovare tre trasformazioni infinitesime indipendenti $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, per le quali si abbia:

$$(X_1 X_2) = X_1 f \qquad (X_1 X_3) = 2X_2 f \qquad (X_2 X_3) = X_3 f \text{ (3).}$$

Questi gruppi ∞^3 sono *semplici* (nel senso della teoria dei gruppi), non contengono cioè alcun *sottogruppo invariante.* Ne dà un esempio notissimo il gruppo ∞^3 delle proiettività in una forma semplice (ad es. sulla punteggiata).

Un teorema che caratterizza ancor più la distinzione fra gruppi integrabili e non integrabili è il seguente, dovuto al Sig. ENGEL (4):

Un gruppo continuo è integrabile sempre e solo quando non contiene alcun sottogruppo ∞^3 *semplice* (avente cioè la composizione testè indicata). I gruppi *non inte-*

---

(1) LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 679; LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen.....*, p. 537. La denominazione di *gruppo integrabile* fu usata per la prima volta dal sig. LIE nel 1889 (" Leipz. Ber. "); ma il concetto di un tal gruppo risale ai primi lavori dello stesso A. sulla teoria generale dei gruppi continui (1874).

(2) LIE-SCHEFFERS, l. c., p. 537.

(3) LIE, Op. cit., vol. III, pp. 713-714; LIE-SCHEFFERS, Op. cit., p. 572.

(4) *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie*, II, " Leipz. Ber. ", anno 1887, p. 89; LIE, Op. cit., vol. III, p. 757.

grabili saranno dunque quelli e quelli soli che contengono (almeno) un sottogruppo ∞^3 così costituito (o hanno essi stessi questa composizione, se sono precisamente ∞^3).

4. Passando adesso dal campo puramente astratto in cui finora siamo rimasti a quello concreto (e che a noi più interessa) dei *gruppi continui proiettivi,* troviamo quest'altro teorema, che è anche notevole (¹):

Ogni gruppo proiettivo integrabile di uno spazio qualunque S_r *ammette almeno un punto unito fisso, una retta unita passante per questo punto, un piano unito per questa retta,* ecc. *e infine un iperpiano* (S_{r-1}) *unito fisso contenente questi vari spazi minori.* In generale, per ogni S_k unito fisso ($0 \leq k \leq r - 2$) passa un S_{k+1} del pari unito (e vi è sempre almeno un punto, ossia un S_0 unito, quindi un S_1, ecc.). — L'inversa di questo teorema è pur vera e quasi evidente.

Quanto ai gruppi proiettivi non integrabili, importerà anzitutto studiare quelli ∞^3, perchè questi entrano appunto come sottogruppi in tutti gli altri. E anche per questi gruppi ∞^3 si ha un teorema generale, del quale ci occuperemo nel prossimo §.

Quello che è stato detto finora ci sembra intanto sufficiente per giustificare la divisione che intendiamo fare della nostra ricerca in due parti: Varietà M_3 di S_4 con gruppi *integrabili* — e varietà con gruppi *non integrabili* di trasformazioni proiettive in sè. Le due questioni parziali verranno studiate con metodi e per vie affatto diverse l'una dall'altra.

Il caso dei gruppi *non integrabili* si rivelerà come molto più semplice ed elegante, nonchè breve a trattarsi, e perciò appunto intendiamo dedicare ad esso questo primo lavoro. Avremo così occasione di occuparci anche di questioni relative a particolari rappresentazioni geometriche delle forme e dei sistemi di forme binarie; questioni che si collegano al così detto *Principio di trasporto* di Hesse (²). In generale, vedremo che la ricerca di tutte le varietà algebriche M_k di uno spazio qualunque S_r con un gruppo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè, si può ricondurre a quella dei sistemi di *relazioni invariantive* (rispetto a sostituzioni lineari) tra i coefficienti di una o più forme binarie, e in particolare la ricerca delle M_{r-1} di S_r a quella degli invarianti (nel senso ordinario) di una forma binaria di grado r e degli invarianti simultanei di due o più forme di gradi inferiori (e precisamente di gradi tali che, aumentati ciascuno di un'unità, diano per somma $r + 1$). — Si avverta pure che i gruppi (proiettivi) non integrabili sono anche i più importanti (si potrebbe anzi dire, i soli importanti) quando si voglia tener d'occhio l'applicazione che se ne può fare alla classificazione di talune categorie di equazioni differenziali, ad es. delle equazioni differenziali lineari omogenee (con una sola variabile indipendente), considerando questi stessi gruppi proiettivi, ovvero quelli corrispondenti di sostituzioni lineari omogenee, come *gruppi di razionalità* di altrettante equazioni

(¹) Lie, Op. cit., vol. I, p. 589; vol. III, p. 681; Lie-Scheffers, Op. cit., p. 532.

(²) " Journ. de Crelle ", Bd. 66, pp. 15-21 (1866). Cfr. anche il § 5 dell'opuscolo (*Programmschrift*) del Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872), ristampato nel vol. XLIII dei " Math. Ann. ", e tradotto in italiano nel vol. XVII degli " Annali di Mat. ".

differenziali lineari, secondo le idee svolte in varî lavori del Sig. PICARD (1) e nella Dissertazione del Sig. VESSIOT (2). Ogni qual volta infatti il gruppo di razionalità è *integrabile,* l'equazione differenziale lineare corrispondente risulta *integrabile per quadrature* (3). È in ciò precisamente, e in proprietà analoghe di altre equazioni differenziali (con trasformazioni infinitesime in sè), che sta la ragione del nome di *gruppo integrabile* (4).

Delle varietà di S_4 con un gruppo integrabile di trasformazioni proiettive in sè conto occuparmi in un altro lavoro, esponendovi, in parte almeno, i risultati che ho già ottenuti. Fra le varietà M_3 con almeno ∞^4 trasformazioni proiettive in sè (che corrisponderebbero in certo qual modo alle superficie di S_3 con ∞^3 trasformazioni così fatte) se ne troveranno alcune geometricamente interessanti. Delle M_3 di S_4 con sole ∞^3 trasformazioni proiettive in sè ho determinati pure tutti i diversi tipi; ma dubito assai che l'esposizione completa di questi ultimi possa anche riescire utile e interessante.

§ 2.

I gruppi proiettivi semplici tre volte infiniti.

5. In questo § mi propongo di determinare i diversi tipi di gruppi proiettivi semplici ∞^3 di uno spazio qualunque S_r. Poichè ogni gruppo non integrabile deve contenere (almeno) un sottogruppo ∞^3 così costituito, è chiaro che le varietà invarianti rispetto a gruppi proiettivi non integrabili saranno anche tutte invarianti rispetto a qualche gruppo (proiettivo) semplice ∞^3.

Si può riconoscere facilmente (5) che *i soli gruppi proiettivi semplici* ∞^3 *di uno spazio* S_r, *i quali non mutano in sè nessuno spazio minore* S_k $(0 \leq k \leq r-1)$ *contenuto in* S_r *medesimo, sono quelli che trasformano in sè una determinata curva razionale normale* (*di ordine* r) *di quest'ultimo spazio.* — Un tal gruppo contiene infatti ∞^1 sottogruppi ∞^2 fra loro equivalenti *(gleichberechtigt)*, ciascuno dei quali (essendo integrabile) deve ammettere almeno un punto unito fisso. Questo punto varierà però al variare del sottogruppo ∞^2 che si considera (essendosi escluso per ipotesi che vi sia in S_r uno spazio minore S_k, e in particolare un S_0 unito fisso), e assumerà così ∞^1 posizioni diverse, luogo delle quali sarà una certa curva C unita rispetto all'intero gruppo ∞^3. Questa curva *apparterrà* allo spazio S_r (non sarà cioè contenuta in uno spazio inferiore), e ogni trasformazione non identica di quel gruppo ∞^3 subordinerà su di essa una trasformazione (proiettiva) anche non identica. La curva C ammet-

---

(1) " Compt. Rend. ", 1883; " Ann. de Toulouse ", 1887; " Compt. Rend. ", sedute dell'8 ott. 1894 e del 2 dicembre 1895.

(2) " Ann. de l'Éc. Norm. Sup. ", t. IX (1892).

(3) Cfr. VESSIOT, l. c., p. 241. A quest'ordine di idee si riferiscono anche talune mie Note inserte nei " Rend. dell'Acc. dei Lincei " dell'anno 1895 (serie 5ª, vol. IV, 1° sem.).

(4) LIE, Op. cit., vol. III, p. 709.

(5) Cfr. ad es. LIE, Op. cit., vol. III, pp. 187, 758, 785.

terà dunque essa stessa ∞^3 trasformazioni proiettive in sè, e sarà perciò appunto una curva razionale normale (di ordine r).

Viceversa, è anche noto che *ogni curva razionale normale di uno spazio* S_r *determina un gruppo (semplice)* ∞^3 *di trasformazioni proiettive di questo spazio, rispetto al quale è unita la curva stessa, ma non è unito nessun punto o spazio minore qualsiasi contenuto in* S_r.

6. Ma si può dire anche di più; si può dimostrare cioè, che *se in un gruppo proiettivo semplice* ∞^3 *di* S_r *vi sono spazi inferiori uniti, i minimi fra questi spazi* — quelli cioè dentro i quali nessuno spazio minore è del pari unito — *devono essere* (com'è chiaro) *a due a due indipendenti, e devono formare un sistema* APPARTENENTE ALLO SPAZIO S_r; vale a dire, *devono esistere sempre* m (≥ 2) *spazi uniti indipendenti di dimensioni* h_1, h_2, ... h_m $(0 \leq h_i \leq r-1)$ *tali che:*

$$\sum_i (h_i + 1) = r + 1.$$

In particolare dunque, se vi è un S_{r-1} unito, vi dovrà anche essere un punto unito (fisso) esterno a questo spazio (iperpiano); se vi è un S_{r-2} unito, vi sarà anche una retta unita non incidente a questo S_{r-2} (1), e così via dicendo. — In ciascuno spazio unito minimo S_{h_i} (per $h_i \geq 1$) verrà poi subordinato un gruppo ∞^3 con una curva razionale normale (di ordine h_i) unita; curva che, per $h_i = 1$, sarà la stessa retta $S_{h_i} \equiv S_1$.

Questo teorema si trova già enunciato nel 3° vol. della *Theorie der Transformationsgruppen* del Sig. LIE (p. 785), ma non vi è dimostrato; è detto soltanto che la (prima) dimostrazione datane da STUDY non era forse del tutto soddisfacente, ma è stata poi completata da ENGEL con opportuni sviluppi analitici (analoghi a quelli di cui è fatto uso a pp. 736 e 758 del vol. stesso). — Io ho cercato di darne un'altra dimostrazione (geometrica), che è quella appunto che forma l'oggetto principale di questo § (2). La dimostrazione è divisa in tre parti. Nella prima parte (n° 6) verrà in certo qual modo invertito il teorema del n° 5, o, per dir meglio, verrà esaminata

---

(1) Anche se vi fossero, fuori dell'S_{r-2}, *due* diversi *punti* uniti, vi sarebbe pur sempre una retta unita — la loro congiungente —; ma non potrebbero su di questa essere uniti (per l'intero gruppo) soltanto quei due punti, perchè se no, imponendo a un terzo e quindi ad ogni punto della stessa congiungente di essere del pari unito, si verrebbe a staccare dal gruppo proposto un sottogruppo invariante ∞^2, il che nel nostro caso non può avvenire. Potrebbero però essere uniti, per l'intero gruppo ∞^3, tutti i punti di quella retta; ma l'S_{r-2} unito sarebbe allora asse di un fascio di S_{r-1} uniti, e noi potremmo limitarci allo studio delle trasformazioni subordinate entro ciascuno di questi spazi.

(2) Non mi nascondo certo le difficoltà che la lettura di questa dimostrazione sarà per presentare. Ma la necessità di rimuovere fin d'ora talune obbiezioni che si sarebbero poi potute avanzare, e il desiderio di non introdurre possibilmente nel teorema nessuna restrizione (nemmeno quella ad es. dell'algebricità del gruppo) non mi hanno permesso di essere più breve, nè forse permetterebbero di rendere la lettura stessa tanto facile e chiara quanto sarebbe desiderabile. Il lettore che non volesse troppo stancarsi, e coloro soprattutto che non avessero molta famigliarità coi concetti e coi ragionamenti di cui dovrò valermi, potranno accettare il teorema come dimostrato altrove, e passare senz'altro al § 3.

una certa ipotesi che risulterà possibile nel solo caso del gruppo ∞^3 con una C^r razionale normale fissa. Esclusa pertanto quest'ipotesi, nella seconda parte (n° 8) verrà studiato il caso più semplice fra gli altri previsti dal teorema generale già enunciato (il caso cioè di due soli spazi minori fissi, un S_k e un S_{r-k-1}), e stabilito il teorema stesso per questo caso particolare. Nella terza parte infine (n° 9) si dedurrà dal teorema particolare del n° 8 la dimostrazione generale richiesta.

7. Anzitutto, nel caso di un gruppo proiettivo ∞^3 con una curva razionale normale unita, è noto (cfr. anche quanto è detto al n° 5) che ogni sottogruppo ∞^2 ammette un solo punto unito fisso, che sta su quella curva; e questo stesso punto, contato $r+1$ volta, è anche il solo punto unito per il gruppo *parabolico* ∞^1 contenuto come sottogruppo invariante in quel gruppo ∞^2. Ma noi possiamo anche dimostrare, inversamente (e sarà questa la prima delle tre parti), che:

Se un sottogruppo parabolico ∞^1 di un gruppo proiettivo semplice ∞^3 di S_r ammette un solo punto unito $(r+1)^{plo}$ *(sicchè le relative traiettorie saranno curve razionali normali di ordine* r [1]*), allora:*

1° *Il gruppo ∞^2 che contiene questo gruppo parabolico come sottogruppo invariante si compone appunto delle omografie che lasciano fissa una certa C^r razionale normale, e un punto sopra questa curva* [2];

2° *Il gruppo complessivo ∞^3 si compone a sua volta di tutte le omografie che mutano in sè una certa curva razionale normale dello spazio S_r.*

Poichè ogni sottogruppo parabolico ∞^1 del gruppo ∞^3 proposto è contenuto come sottogruppo invariante in *un* determinato sottogruppo ∞^2 dello stesso gruppo ∞^3, così, nel nostro caso, avendo uno (e quindi ciascuno) di quei sottogruppi parabolici un solo punto unito P (variabile però eventualmente da un sottogruppo all'altro), questo punto sarà ogni volta unito anche per tutte le operazioni del sottogruppo ∞^2 (G_2) in cui quel gruppo parabolico è contenuto; e altrettanto si dica dei vari S_k $(k=1, 2, \dots r-1)$ uniti uscenti da quel punto. In particolare, sulla retta unita p che passa per P il gruppo G_2 dovrà subordinare il gruppo anche ∞^2 di tutte le omografie per cui è unito P (e non soltanto il gruppo parabolico ∞^1 per cui P è punto unito doppio) perchè se no, imponendo a uno e quindi ad ogni altro punto della stessa retta di essere unito, si troverebbe in G_2 un sottogruppo ∞^1 invariante diverso da quello prima considerato, il che non è possibile. Nel piano unito Π per p verrà allora subordinato un gruppo, sempre ∞^2, con una conica fissa passante per P e ivi tangente alla p; ciò risulta ad es. osservando che in questo piano deve essere unito per tutto G_2 il fascio delle coniche che sono traiettorie per il sottogruppo parabolico (invariante) di G_2 stesso; fascio che si compone di coniche aventi in P un contatto di 3° ordine, colla retta p come tangente comune; e che, se in questo fascio la retta (doppia) p, che ne è la sola conica degenere, fosse anche la sola conica unita per tutto G_2, si avrebbe un

---

(1) Cfr. ad es., per $r=3$, la Mem. del Prof. Pittarelli negli " Ann. di Mat. ", ser. 2ª, t. XXII (§ 2, n° 5, pp. 24-25); e analogamente si vedrebbe la cosa per r qualunque.

(2) Questa parte del teorema sussiste indipendentemente dall'essere o no considerato il precedente gruppo ∞^1 come sottogruppo parabolico di un gruppo ∞^3.

gruppo ∞^2 di proiettività permutabili col punto unito *triplo* P [1]. Basterà quindi ora dimostrare che, ammesso che un gruppo G_2, del tipo di quello che ora stiamo considerando, subordini sempre nell'unico S_k unito fisso ($k = 2, 3, \ldots$) un gruppo ∞^2 con una C^k unita, esso dovrà anche subordinare nell'S_{k+1} unito per questo S_k un gruppo ∞^2 con una C^{k+1} unita; essendo infatti quell'ipotesi riconosciuta vera per $k = 2$, ne seguirà la proprietà analoga per $k = 3, 4, \ldots r$. — Ora, il gruppo G_2, come lascia fissa (per ipotesi) una C^k di S_k, lascerà anche fisso un cono razionale normale Γ^k di S_{k+1}, col vertice in P (perchè le rette — o gli S_k — di S_{k+1} uscenti da P si possono considerare come punti di un nuovo spazio Σ_k, sui quali G_2 dovrà operare come sui punti dell'S_k unito prima considerato). Questo cono sarà luogo di ∞^1 curve C^{k+1}, traiettorie del sottogruppo parabolico ∞^1; e le tangenti a queste stesse curve nei punti di una generatrice variabile del cono Γ^k formeranno sempre fascio attorno a un punto variabile della curva C^k [2]. Per un sottogruppo ∞^1 generico di G_2 è unito un punto di C^k (distinto da P) colla corrispondente generatrice di Γ^k (distinta da p); se anche sopra questa generatrice vi fosse un nuovo punto unito distinto da P, la nostra asserzione risulterebbe senz'altro verificata, perchè il luogo di questo ulteriore punto unito, esterno ad S_k, non potrebbe essere altro che una C^{k+1} passante per P e unita per l'intero gruppo G_2. — Potrebbe però nascere il sospetto che sopra questa generatrice unita variabile fosse sempre subordinato un gruppo parabolico ∞^1 con P come punto unito doppio; ma è facile vedere che le ∞^2 operazioni così risultanti non formerebbero un gruppo. Supposto infatti che ne formino uno, è chiaro che tali operazioni si dovrebbero poter ottenere tutte moltiplicando fra loro due sottogruppi ∞^1 comunque scelti in quel gruppo, ad es. il sottogruppo parabolico, e un altro qualsiasi; e questi due sottogruppi si potrebbero rappresentare rispett. (in coordinate $u_0, u_1, \ldots u_{k+1}$ di spazi S_k) con equazioni del tipo:

$$\begin{aligned}
u'_0 &= u_0 \\
u'_1 &= u_1 + \alpha u_0 \\
u'_2 &= u_2 + 2\alpha u_1 + \alpha^2 u_0 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
u'_{k+1} &= u_{k+1} + (k+1)\alpha u_k + \ldots\ldots + \alpha^{k+1} u_0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
u'_0 &= u_0 \\
u'_1 &= \rho u_1 \\
&\ldots\ldots \\
u'_k &= \rho^k u_k \\
u'_{k+1} &= u_{k+1} + \log\rho \,.\, u_0 .
\end{aligned}$$

Si avrebbero dunque le equazioni complessive:

---

(1) Ciò segue immediatamente dalle equazioni semplicissime di questi gruppi, ed è pure confermato dalla determinazione completa, fatta dal sig. Lie, dei vari gruppi proiettivi del piano (e in particolare di quelli ∞^2) (cfr. ad es. Lie, Op. cit., vol. III, p. 107; Lie-Scheffers, Op. cit., pp. 288-291).

(2) Si osservi che i piani tangenti al cono Γ^k devono incontrare lo spazio S_k secondo le generatrici di un cono Γ^{k-1}, del pari unito, che sarà quello appunto che da P proietta la curva unita C^k. Ciascuno di questi piani contiene una tangente di ciascuna delle C^{k+1} considerate di sopra, e una generatrice di ciascuno dei due coni Γ^k e Γ^{k-1}; e se quelle tangenti non formassero fascio attorno a un punto di quest'ultima generatrice, esse punteggerebbero proiettivamente queste stesse generatrici con P come punto unito; formerebbero dunque fascio intorno a un nuovo punto di quel piano, il che non è possibile.

$$
\begin{aligned}
u'_0 &= u_0 \\
u'_1 &= \rho(u_1 + \alpha u_0) \\
u'_2 &= \rho^2(u_2 + 2\alpha u_1 + \alpha^2 u_0) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u'_k &= \rho^k(u_k + k\alpha u_{k-1} + \ldots\ldots + \alpha^k u_0) \\
u'_{k+1} &= u_{k+1} + (k+1)\alpha u_k + \ldots\ldots + (\alpha^{k+1} + \log\rho) u_0
\end{aligned}
$$

le quali rappresentano bensì una schiera ∞^2 di omografie, ma a cui non compete la proprietà di gruppo (¹).

Rimane così stabilito il n° 1 di questa prima parte della dimostrazione complessiva. Ammesso ora che, nel gruppo complessivo ∞^3, uno e quindi ciascun sottogruppo ∞^2 lasci fissa una certa C^r razionale normale, faremo vedere che questa curva non può variare da un sottogruppo ∞^2 all'altro, ed è quindi unita per l'intero gruppo ∞^3. — Supposto infatti che varii, essa assumerà in tutto ∞^1 posizioni diverse, ciascuna delle quali sarà a sua volta unita per un nuovo sottogruppo ∞^2 con un (solo) punto unito fisso P posto su di essa. Due qualunque di queste ∞^1 curve C^r saranno poi contemporaneamente unite per il sottogruppo ∞^1 comune ai corrispondenti gruppi ∞^2 — saranno cioè *traiettorie* per questo sottogruppo ∞^1 —, e avranno quindi a comune i due punti uniti (distinti) che questo sottogruppo ammette sopra di esse, nonchè i vari spazi osculatori ad esse in questi stessi punti (²). Ma, tenendo fissa una di queste due curve, e facendo variare l'altra, questa coppia di punti uniti deve sempre comprendere il punto unito P relativo alla C^r fissa; dunque il punto P relativo a una C^r qualunque deve stare anche su tutte le rimanenti. E siccome questo punto non può essere fisso per l'intero gruppo ∞^3, perchè se no le ∞^1 curve C^r dovrebbero avervi a comune tutti i loro spazi S_i osculatori ($i = 1, 2, \ldots r-1$), di modo che anche questi spazi risulterebbero fissi, e perciò il gruppo ∞^3 sarebbe integrabile, così si conclude che le ∞^1 posizioni del punto variabile P costituiranno una curva, colla quale tutte le diverse C^r dovranno coincidere; sicchè queste coincideranno anche fra loro, come appunto si voleva dimostrare.

8. Veniamo alla seconda parte della dimostrazione complessiva. Faremo vedere ora che: *Se un gruppo proiettivo semplice* ∞^3 *di* S_r *lascia fisso uno spazio* S_k $(0 \leq k < r)$, *ma non, entro* S_k, *uno spazio minore (sicchè entro l'*S_k *stesso, quando sia* $k > 1$, *verrà*

(¹) Ciò è confermato anche, per $k+1=3$, dalla determinazione eseguita recentemente dal sig. LIE di tutti gruppi proiettivi ∞^2 di S_3, e in particolare di quelli che lasciano fissa una conica (C^k di S_k, in S_{k+1}) (Nota cit. dei " Leipz. Ber. ", 1895, cap. I, § 1). A parte il gruppo ∞^2 con una cubica fissa e un punto unito fisso sopra questa (nel qual caso la conica unita sta nel piano osculatore alla cubica in questo punto), vi deve sempre essere una retta fissa, incontrante la conica, ma non contenuta nel piano di essa; e su questa retta deve esservi (oltre all'intersezione colla conica) un secondo punto unito fisso, che può essere distinto dal primo (gruppo di 4ª specie di ENRIQUES, Mem. cit.), oppure anche infinitamente vicino ad esso.

(²) Ciò è chiaro geometricamente, e si può anche dedurre dalle equazioni del gruppo, che sono riducibili alla forma $x'_i = \rho^i x_i$ $(i = 0, 1, \ldots r)$, dove ρ è il parametro.

subordinato un gruppo pure ∞^3 *con una* C^k *unita), e non lascia nemmeno fisso, entro* S_r, *un* $S_{k'}$ $(k < k' < r)$ *passante per quell'* S_k, *esso lascerà fisso un* S_{r-k-1} *non incidente allo spazio* S_k, *e subordinerà in questo* S_{r-k-1} *(se* $r - k - 1 \geq 2$*) un gruppo* ∞^3 *con una* C^{r-k-1} *unita.*

È questo, come si vede subito, il caso più semplice fra quelli previsti dal teorema generale del n° 6 (quando solo si escluda il caso ovvio della C^r razionale normale unita). Di qui seguirà poi facilmente la dimostrazione per il caso generale.

Possiamo supporre $k \geq \frac{r-1}{2}$; se così non fosse, sarebbe certo $r - k - 1 > \frac{r-1}{2}$, e noi potremmo quindi ridurci a quell'ipotesi trasformando la questione per dualità, considerando cioè gli S_{r-1} di S_r come punti di un nuovo spazio Σ_r, nel quale sarebbe unito uno spazio minore Σ_{r-k-1}. — In ogni caso, il gruppo ∞^3 proposto opererà sugli ∞^{r-k-1} spazi S_{k+1} (o S_{r-1}) passanti per l'S_k unito (che indicheremo con α) come sui punti di un S_{r-k-1}, nel quale si abbia una C^{r-k-1} unita. Vi sarà quindi una serie ∞^1 unita (Γ) di tali spazi S_{k+1}, la quale avrà a comune $r - k - 1$ di questi stessi spazi con un S_{r-1} generico passante per α; ciascuno di questi ∞^1 spazi S_{k+1} sarà unito per tutto un sottogruppo ∞^2 (G_2) del gruppo proposto, mentre per un sottogruppo ∞^1 saranno uniti due di quegli spazi, in generale distinti, più altri $r - k - 2$ spazi S_{k+1} passanti pure per α, ma non appartenenti alla serie Γ; tutti però coincidenti in uno stesso S_{k+1} di questa serie, se il sottogruppo è parabolico. (Nel caso estremo $k = r - 1$ questa forma fondamentale di spazi S_{k+1} si riduce al solo spazio S_r; ma il ragionamento che segue è applicabile anche a questo caso). — Ciascun sottogruppo G_2 ammetterà un punto unito fisso P sulla curva unita C^k di $S_k \equiv \alpha$, e una retta unita pure fissa per questo punto, che sarà la tangente alla stessa C^k. Ma è facile riconoscere ch' esso dovrà anche ammettere una seconda retta unita fissa p passante per P e non contenuta in α. Infatti il sottogruppo parabolico ∞^1 contenuto in questo gruppo G_2 deve ammettere, oltre a P, almeno un secondo punto unito P′ (fuori di α, ma nell'unico S_{k+1} unito passante per α), perchè si tratta ora di un gruppo complessivo ∞^3 che non è certo quello di una C^r razionale normale, sicchè appunto P non può essere, per quel sottogruppo parabolico, il solo punto unito (cfr. n° 7). Oltre a P′ non può essere unito, per lo stesso gruppo parabolico, nessun altro punto P″ esterno alla retta PP′, perchè se no si avrebbero o due S_{k+1} uniti per α (gli spazi αP′ e αP″), oppure un secondo punto unito (distinto da P) in α stesso; casi entrambi da escludersi. Sarà però unito, sempre per quel gruppo parabolico ∞^1, ogni punto della retta PP′, perchè se no P′, come punto unito isolato per un sottogruppo invariante, sarebbe certo unito per tutto G_2, e gli altri punti della retta PP′ sarebbero a loro volta uniti per un sottogruppo invariante di G_2 diverso da quello prima considerato, il che è assurdo [1]. Questa retta PP′ sarà appunto la retta p richiesta; *essa è luogo di (tutti i) punti uniti* (entro lo spazio αP) *per il sottogruppo parabolico (invariante) di* G_2 (e teniamo nota in particolare di questo fatto), ed è pure unita, benchè in generale non più luogo di

[1] Più generalmente, si può riconoscere in modo analogo che i punti uniti fissi di un gruppo continuo ∞^i, il quale sia *unico* sottogruppo invariante ad i parametri entro un gruppo ∞^{i+1}, devono formare uno spazio S_k unico; vale a dire, se due punti distinti sono uniti per un tal gruppo, lo saranno anche tutti quelli della loro congiungente.

punti uniti, per le rimanenti operazioni di G_2 stesso. — Al variare del sottogruppo G_2, ossia del punto P sulla curva C^k, questa retta p descriverà una rigata razionale avente la C^k stessa per direttrice (semplice). Da un S_{r-1} generico per α questa rigata verrà ancora incontrata secondo $r-k-1$ generatrici, perchè tanti appunto sono gli S_{k+1} della serie Γ contenuti in quell'S_{r-1}, e ciascuno di questi contiene a sua volta una ed una sola retta p; la rigata sarà dunque di ordine $r-1$, e perciò *normale*. Il gruppo ∞^3 proposto dovrà evidentemente trasformare in sè questa rigata, lasciandone anche fissa la direttrice C^k contenuta nello spazio α. Ora, se k è precisamente $=\frac{r-1}{2}$, vi sarà sulla rigata tutto un fascio di direttrici (minime) di questo stesso ordine $\frac{r-1}{2}$; sicchè il gruppo proposto, essendo privo di sottogruppi invarianti, e dovendo d'altra parte trasformare in sè questo fascio di direttrici e (almeno) una curva di esso fascio, trasformerà in sè anche ciascuna delle rimanenti curve di esso ([1]). Avremo dunque in tutto, non solo due, ma infiniti spazi $S_{\frac{r-1}{2}}$ uniti, non incontrantisi a due a due, e in ciascuno di essi una $C^{\frac{r-1}{2}}$ del pari unita. Il teorema è dunque in questo caso dimostrato, essendo $r-k-1=k=\frac{r-1}{2}$.

Invece, se $k>\frac{r-1}{2}$, la rigata ammetterà certo qualche direttrice di ordine inferiore a k. Ma essa non potrà più ammettere in questo caso un fascio di direttrici minime di ordine $\frac{r-1}{2}$ ([2]), perchè se no per un sottogruppo ∞^1 qualunque, sarebbero unite, oltre alla C^k, due generatrici p e due direttrici $C^{\frac{r-1}{2}}$; le une e le altre infinitamente vicine se questo sottogruppo è parabolico; e l'unica generatrice unita non sarebbe allora più luogo di punti uniti per lo stesso sottogruppo, come noi abbiamo invece supposto che fosse ([3]). — Vi sarà dunque una direttrice minima unica, di ordine $<\frac{r-1}{2}$; questa sarà evidentemente unita per il gruppo ∞^3 proposto, e il suo ordine sarà precisamente $=r-k-1$ (non inferiore, perchè se no non potrebbero esistere sulla rigata direttrici di ordine k ([4]); non superiore, perchè se no lo spazio di essa dovrebbe certo incontrare α, determinandovi così uno spazio minore unito). Anche in questo secondo caso è dunque vero il teorema enunciato.

([1]) Se così non fosse, imponendo a queste altre curve di essere anche unite, si staccherebbe dal gruppo ∞^3 un sottogruppo *invariante* almeno ∞^1.

([2]) Si aggiunga anzi che, quand'anche la nostra rigata potesse ammettere un tal fascio di direttrici minime, ciò potrebbe avvenire soltanto per $k=\frac{r+1}{2}$; se no la C^k incontrerebbe le singole $C^{\frac{r-1}{2}}$ in più di un punto (cfr. SEGRE, *Sulle rigate razionali.....*, n° 5; " Atti dell'Acc. di Torino ", vol. XIX), e si avrebbe quindi su di essa un'involuzione unita rispetto all'intero gruppo ∞^3, il che è assurdo.

([3]) La dimostrazione si potrebbe però completare facilmente anche in questo caso, senza tener conto del fatto che le generatrici p devono essere luoghi di punti uniti per i singoli sottogruppi parabolici. — Il caso più semplice di un gruppo ∞^3 di questo tipo è quello di una quadrica di S_3 con una conica fissa su di essa (ossia il gruppo proiettivo ∞^3 che trasforma in sè stessa una quadrica di S_3, e lascia fisso anche un punto non contenuto in questa quadrica).

([4]) Ovvero, se vogliamo, perchè si avrebbe in S_r uno spazio minore unito contenente S_k, il che si è escluso.

9. Da questo secondo teorema (n° 8) segue facilmente il teorema generale enunciato al principio del n° 6. Si abbia in S_r un gruppo proiettivo semplice ∞^3 con un numero qualunque di spazi minori uniti. Fra questi, prendiamone uno S_k di dimensione minima; poi lo spazio unito $S_{k'}$ di dimensione minima fra quelli che contengono S_k (sicchè per S_k non passeranno spazi uniti di dimensione $< k'$ e contenuti in $S_{k'}$) [1]; poi lo spazio unito $S_{k''}$ di dimensione minima fra quelli che passano per $S_{k'}$, e così di seguito, finchè non si arrivi a uno spazio non contenuto in altro più ampio e del pari unito, all'infuori di S_r stesso. — Poichè gli spazi $S_k \equiv S_{h_1}$ e $S_{k'}$ si trovano nelle stesse condizioni degli S_k ed S_r al n° prec., avremo in $S_{k'}$ anche un $S_{k'-k-1} \equiv S_{h_2}$ unito non incidente a S_{h_1} (e dentro di esso, se $h_2 \geq 2$, una C^{h_2} unita) [2]. Si considerino ora gli S_{k+1} di $S_{k''}$ passanti per $S_k \equiv S_{h_1}$. Questi si possono ritenere come punti di uno spazio $\Sigma_{k''-k-1}$, nel quale è unito lo spazio minore $\Sigma_{k'-k-1}$ formato da quegli S_{k+1} che, passando sempre per S_k, stanno anche in $S_{k'}$. Per questo $\Sigma_{k'-k-1}$ non passa, entro $\Sigma_{k''-k-1}$, nessun altro spazio unito più ampio (se no vi sarebbe uno spazio unito per $S_{k'}$ inferiore a $S_{k''}$); vi sarà dunque, in $\Sigma_{k''-k-1}$, un nuovo spazio unito $\Sigma_{k''-k'-1}$ costituito da un sistema $\infty^{k''-k'-1}$ di spazi S_{k+1} per S_k. Questi S_{k+1} saranno contenuti in un $S_{k+k''-k'}$ unito per S_k, il quale si trova ancora, rispetto ad S_k stesso, nelle condizioni richieste dal teorema del n° 8, e conterrà perciò un $S_{k''-k'-1} \equiv S_{h_3}$ del pari unito e non incidente a $S_{h_1} \equiv S_k$. Nello spazio $S_{k''}$ abbiamo dunque trovati *tre* spazi uniti S_{h_1}, S_{h_2}, S_{h_3}, a due a due indipendenti, e tali che:

$$(h_1 + 1) + (h_2 + 1) + (h_3 + 1) = k'' + 1.$$

E così si può continuare, finchè non si sia esaurita la serie degli spazi $S_{k^{(i)}}$ (considerando dapprima il sistema degli $S_{k'+1}$ per $S_{k'}$ entro $S_{k'''}$, ecc.).

Resterebbe solo a dire qualche parola sul caso in cui vi siano in S_r almeno due e quindi infiniti punti uniti fissi. (È chiaro che, se vi sono $k+1$ punti uniti fissi indipendenti, l'S_k da essi individuato sarà anche tutto composto di punti uniti [3]). Allora, supposto che sia $S_{k'}$ (e sarà certo $k' \geq k+2$) lo spazio unito minimo (entro S_r) contenente questo $S_k \equiv \alpha$ di punti uniti, dico che in $S_{k'}$ vi sarà egualmente un $S_{k'-k-1}$ unito (non incontrante α). — Infatti ogni sottogruppo G_2 del gruppo ∞^3 proposto ammette un S_{k+1} unito fisso passante per α, e in questo spazio vi è certo almeno una retta unita fissa non contenuta in α. (Ciò è evidente se il gruppo G_2 subordina in S_{k+1} un gruppo soltanto ∞^1 di operazioni (omologie) diverse; che se poi esso vi subordina un gruppo anche ∞^2 di omologie, queste omologie non potranno essere tutte permutabili, e quindi speciali, sicchè sarà unita la retta luogo dei centri, esterna appunto ad α). Variando il sottogruppo G_2, e quindi lo spazio S_{k+1}, varierà questa retta unita, ma in modo da passare sempre per lo stesso punto di α; essa

---

(1) È questa, in sostanza, la sola condizione veramente necessaria per la dimostrazione; l'ipotesi della *dimensione minima* si introduce soltanto per fissare maggiormente le idee, e facilitare il linguaggio.

(2) Anzi, se $k' = 2k+1$ (ad es. se $k = 0$, $k' = 1$), avremo entro $S_{k'}$ infiniti $S_k \equiv S_{h_1} \equiv S_{h_2}$ uniti.

(3) Cfr. la nota (1) al n° 6. — Questo caso si è implicitamente escluso finora, perchè appunto il ragionamento del n° 8 suppone che lo spazio S_k non sia luogo di punti nè inviluppo di S_{r-1} uniti.

descriverà dunque un cono razionale normale, il cui spazio non potrà incontrare α che nel solo vertice del cono stesso, e sarà perciò un $S_{k'-k}$ (non uno spazio inferiore, se no per α passerebbe uno spazio unito inferiore a $S_{k'}$). Questo $S_{k'-k}$ sarà pure unito rispetto all'intero gruppo ∞^3; e poichè esso contiene uno (ed un solo) punto unito fisso, esso dovrà anche contenere (n° 8) un $S_{k'-k-1}$ unito, non passante per quel punto, e quindi non incidente ad α; ed era appunto l'esistenza di un tale spazio entro $S_{k'}$ quella che si voleva dimostrare.

10. Con quest'ultima osservazione, il teorema generale del n° 6 rimane completamente dimostrato, anche nel caso di infiniti punti (e quindi infiniti spazi minori) uniti fissi. Possiamo anche enunciarlo dicendo:

Ogni gruppo proiettivo semplice ∞^3 *di uno spazio* S_r *trasforma in sè un certo numero di curve razionali normali di ordine* $\leq r$, *che appartengono a spazi fra loro indipendenti, e i cui ordini aumentati ciascuno di un'unità dànno per somma* $r+1$. — Delle varie curve unite, qualcuna può anche ridursi ad un punto (ordine *zero*) — ma se ciò avviene per k curve, lo spazio S_{k-1} di questi punti è luogo di punti uniti fissi per tutto il gruppo ∞^3 —; e un numero qualunque $\left(\text{purchè naturalmente} \leq \frac{r+1}{2}\right)$ può esser costituito da rette. Il solo caso di una curva unica è quello della curva razionale normale di ordine r.

In particolare, da questo stesso teorema segue anche immediatamente che: *Un sottogruppo* ∞^1 *generico* (e precisamente: *non parabolico*) *di un gruppo proiettivo semplice* ∞^3 *di* S_r *ammette sempre* $r+1$ *punti uniti distinti e indipendenti* (senza escludere naturalmente con ciò che vi possano anche essere infiniti punti uniti; solo che fra questi ve ne dovranno sempre essere $r+1$ indipendenti). Un gruppo proiettivo ∞^1 con punti uniti multipli non può essere sottogruppo generico di un gruppo semplice ∞^3: può esserne sottogruppo parabolico, ma solo se i suoi punti uniti formano uno spazio S_k unico (si riducono cioè, se in numero finito, a un solo punto $(r+1)^{\text{plo}}$) (¹).

Con questo teorema risultano dunque determinati tutti i diversi tipi di gruppi proiettivi semplici ∞^3 di uno spazio qualunque S_r; sono, in sostanza, le estensioni più ovvie e più naturali dei gruppi ∞^2 a *punti uniti in generale distinti*, e composti di operazioni non tutte permutabili; gruppi già conosciuti per $r=3$ (²), e facilmente prevedibili per r qualunque (³). Da questi ultimi si possono ottenere i primi, conservando come curve unite certe curve luoghi di punti uniti variabili (e precisamente, in ciascun sistema di curve unite con un punto a comune, quella di ordine più elevato) e, eventualmente, uno o più punti uniti fissi (in quest'ultimo caso si avranno però infiniti punti uniti fissi per il gruppo ∞^3).

(¹) Questa proprietà avrà forse la sua importanza anche per tutti i gruppi proiettivi *non integrabili*; ma è bene avvertire che l'operazione (o il sottogruppo ∞^1) più generale di un tal gruppo può non esser contenuto in alcun sottogruppo semplice ∞^3 del gruppo medesimo. Ciò avviene ad es. in un gruppo ∞^4 non integrabile, contenendo quest'ultimo un solo sottogruppo semplice ∞^3 (cfr. Lie, Op. cit., vol. III, p. 723; Lie-Scheffers, Op. cit., p. 574).

(²) Cfr. Enriques, Mem. cit. degli " Atti dell'Ist. Ven. ", ser. 7ª, vol. IV, pp. 1605 e seg.

(³) Cfr. anche quanto è detto in una mia Nota inserta nei " Rend. dell'Acc. dei Lincei ", ser. 5ª, vol. IV, 1° sem., p. 323.

§ 3.

Equazioni di un gruppo proiettivo semplice ∞^3. Collegamento colla teoria delle forme binarie.

11. Consideriamo un gruppo proiettivo semplice ∞^3 di uno spazio qualunque S_r, e supponiamo (in seguito a quanto è stato dimostrato nel § prec.) che si abbia tutta una serie di spazi minori uniti S_{h_i} $(i = 1, 2, \ldots m; \ m \geq 1)$, a due a due indipendenti, tali che:

$$\sum_{i=1}^{i=m} (h_i + 1) = r + 1;$$

e entro ciascuno di questi spazi si abbia ancora (ogni qualvolta $h_i \geq 2$) una curva razionale normale unita, dell'ordine corrispondente h_i (per $m = 1$ si avrebbe dunque in S_r una sola curva unita di ordine r). — Fra queste varie curve (e rette, per $h_i = 1$) unite (in quanto ve ne siano almeno due distinte) risulterà determinata una proiettività nella quale si corrisponderanno sempre, sulle curve stesse, i singoli punti uniti di un medesimo sottogruppo ∞^2 contenuto nel gruppo proposto [1]. Noi potremo quindi rappresentare analiticamente queste curve in funzione razionale di un parametro $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ (o di due parametri omogenei ξ_1, ξ_2), in modo che i punti omologhi nella proiettività ora considerata, vale a dire i punti che risultano uniti per un medesimo sottogruppo ∞^2, corrispondano sempre a uno stesso valore del parametro $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ (ossia a valori proporzionali, o anche addirittura eguali di ξ_1 e ξ_2). Con un'opportuna scelta del sistema di coordinate, si vede facilmente che per le singole curve C^{h_1}, $C^{h_2}, \ldots$ si avranno le equazioni parametriche seguenti:

$$
\begin{array}{ll}
 & x_0 = \xi_1^{h_1};\ x_1 = \xi_1^{h_1-1}\xi_2;\ \ldots\ x_{h_1} = \xi_2^{h_1};\ y_0 = \ldots = y_{h_2} = z_0 = \ldots = z_{h_3} = \ldots = 0 \\
(1) & y_0 = \xi_1^{h_2};\ y_1 = \xi_1^{h_2-1}\xi_2;\ \ldots\ y_{h_2} = \xi_2^{h_2};\ x_0 = \ldots = x_{h_1} = z_0 = \ldots = z_{h_3} = \ldots = 0 \\
 & \cdot\ \cdot \quad [2]
\end{array}
$$

Per effetto di una qualunque trasformazione del nostro gruppo ∞^3 il parametro $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ risulterà assoggettato esso pure a una trasformazione proiettiva (ossia li-

---

(1) È chiaro infatti che ciascuno di questi sottogruppi ammetterà, sopra ogni curva C^{h_i}, uno ed un solo punto unito fisso.

(2) Gli spazi S_{h_1}, $S_{h_2}, \ldots$ delle varie curve si sono assunti tutti come spazi fondamentali del sistema di coordinate; per i punti del primo di essi sono in generale diverse da zero le $h_1 + 1$ coordinate che si sono indicate con lettere x; per i punti del secondo le $h_2 + 1$ coordinate y, e così via. Nel caso di una sola curva fissa di ordine r si avrà per questa curva l'analoga rappresentazione:

$$x_0 = \xi^r{}_1;\ x_1 = \xi^{r-1}{}_1\,\xi_2;\ \ldots\ x_r = \xi^r{}_2.$$

neare fratta); in altri termini, i parametri omogenei ξ_1, ξ_2 subiranno una sostituzione lineare omogenea:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \xi'_1 &= a\xi_1 + b\xi_2 \\ \xi'_2 &= c\xi_1 + d\xi_2 \end{aligned}$$

il cui determinante $ad - bc$ è diverso da zero (per una trasformazione non degenere) e può supporsi addirittura $= 1$. — Viceversa, ogni sostituzione lineare di questi due parametri determina sopra ogni curva C^{h_i} una trasformazione proiettiva, che si può estendere a tutto lo spazio cui la curva appartiene, e risulta anzi già completamente determinata per questo spazio. Nello spazio S_{h_1} p. e., le equazioni di questa proiettività si otterrebbero esprimendo per mezzo delle (2) le

$$x'_0 = \xi'^{h_1}_1;\; x'_1 = \xi'^{h_1-1}_1 \xi'_2;\; \ldots\ldots\; x'_{h_1} = \xi'^{h_1}_2$$

in funzione lineare omogenea delle $\xi_1^{h_1}$, $\xi_1^{h_1-1}\xi_2, \ldots$, e introducendo in luogo di queste potenze e prodotti di potenze le stesse $x_0, x_1, \ldots$ secondo le (1). — Quanto allo spazio complessivo S_r, le equazioni della proiettività più generale fra quelle che nei singoli spazi uniti $S_{h_1}, \ldots$ subordinano le trasformazioni testè considerate si otterranno aggiungendo nelle espressioni di ogni gruppo di coordinate *omonime* (indicate cioè da noi con una stessa lettera) un medesimo fattore arbitrario (variabile da gruppo a gruppo di coordinate); sicchè in tutto si avranno m nuovi parametri, dei quali saranno però *essenziali* soltanto i mutui rapporti. Queste proiettività di S_r formeranno perciò complessivamente un gruppo ∞^{m+2}, dal quale, imponendo a due qualunque degli m nuovi parametri omogenei di essere eguali fra loro, si staccheranno altrettanti sottogruppi *invarianti* ∞^{m+1}. Siccome noi vogliamo estrarne un gruppo ∞^3 privo di sottogruppi invarianti, questo gruppo ∞^3 dovrà essere a sua volta contenuto in ciascuno di quei gruppi ∞^{m+1}; vale a dire gli stessi m parametri dovranno essere tutti eguali fra loro, e si potranno addirittura porre tutti eguali all'unità (il che equivale a non averli nemmeno introdotti). Ma così facendo non rimane più che un solo gruppo ∞^3; sarà dunque questo il gruppo che noi andiamo cercando; e potremo perciò concludere:

Le stesse equazioni ottenute separatamente per i singoli spazi S_{h_i}, *vale a dire le:*

$$(3)\qquad \begin{aligned} x'_0 &= a^{h_1}x_0 + h_1 a^{h_1-1} b x_1 + \tbinom{h_1}{2} a^{h_1-2} b^2 x_2 + \ldots + b^{h_1} x_{h_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_0 &= a^{h_2}y_0 + h_2 a^{h_2-1} b y_1 + \tbinom{h_2}{2} a^{h_2-2} b^2 y_2 + \ldots + b^{h_2} y_{h_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

rappresentano già, prese insieme, il gruppo ∞^3 *da considerarsi in* S_r, *quando si interpretino ancora le* a, b, c, d *come parametri variabili, ma legati dalla relazione* $\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1$, *e riducibili perciò a tre soli distinti.*

12. D'altra parte è anche facile verificare che, se noi consideriamo il sistema di forme binarie (nelle variabili ξ_1, ξ_2):

$$f_x = x_0 \xi_1^{h_1} + h_1 x_1 \xi_1^{h_1-1}\xi_2 + \binom{h_1}{2} x_2 \xi_1^{h_1-2}\xi_2^2 + \dots + x_{h_1}\xi_2^{h_1}$$

$$f_y = y_0 \xi_1^{h_2} + h_2 y_1 \xi_1^{h_2-1}\xi_2 + \binom{h_2}{2} y_2 \xi_1^{h_2-2}\xi_2^2 + \dots + y_{h_2}\xi_2^{h_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e assoggettiamo le variabili stesse al solito gruppo ∞^3 di sostituzioni unimodulari (2), che possiamo anche rappresentare così:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= a\xi'_1 + c\xi'_2 \\ \xi_2 &= b\xi'_1 + d\xi'_2 \end{aligned} \qquad (ad - bc = 1)$$

i coefficienti $x_0, \dots$ $y_0, \dots$ subiranno corrispondentemente un gruppo ∞^3 di sostituzioni lineari rispett. identiche a quelle testè considerate (equazioni (3)). — Ora, ogni varietà algebrica M_{r-1} dello spazio S_r la quale sia trasformata in sè da questo gruppo proiettivo si rappresenterà analiticamente eguagliando a zero una certa funzione razionale intera omogenea delle $x, y, z, \dots$, la quale, per effetto delle trasformazioni (3), non potrà alterarsi che per un fattore costante, dipendente dalle sole a, b, c, d. Data pertanto la nuova interpretazione di cui è suscettibile il gruppo rappresentato dalle equazioni (3), l'algebra ci insegna che questo fattore costante sarà necessariamente una potenza del determinante $ad - bc$ [1] (e sarà quindi nel nostro caso addirittura eguale all'unità); e quella funzione delle $x, y, z, \dots$ non sarà altro che un *invariante* delle forme $f_x, f_y, \dots$ (nel senso della teoria delle forme algebriche). Concludiamo perciò:

Ogni varietà (algebrica) M_{r-1} *dello spazio* S_r, *la quale sia trasformata in sè da tutte le operazioni del gruppo proiettivo* ∞^3 *che si considera* (gruppo le cui equazioni sarebbero date dalle (3)), *sarà rappresentata analiticamente dall'annullarsi di un invariante simultaneo delle forme binarie* f_x, f_y, ... (senza escludere, ben inteso, il caso di un invariante di alcune soltanto di queste forme; solo che allora la M_{r-1} sarebbe evidentemente un cono).

E perciò: *La ricerca di tutte le varietà algebriche* M_{r-1} *di uno spazio* S_r, *le quali ammettono un gruppo semplice* ∞^3 — o, più generalmente, *un gruppo* NON INTEGRABILE — *di trasformazioni proiettive in sè, è ricondotta a quella degli invarianti dei vari sistemi di forme binarie di gradi* $h_1, h_2, \dots h_m$ *tali che sia:*

$$(h_1 + 1) + (h_2 + 1) + \dots + (h_m + 1) = r + 1 \text{ [2]}.$$

[1] Cfr. ad es. STUDY, *Methoden zur Theorie der ternären Formen* (Leipzig, 1889), pp. 7, 31.

[2] Quando una delle h_i fosse nulla, si deve intendere la forma corrispondente (di grado zero) come ridotta a un unico coefficiente, da considerarsi a sua volta come (unico) invariante di questa forma.

Non si può dire però (ed è bene notarlo) che la ricerca di tutte le varietà invarianti rispetto a un tal gruppo (anche di quelle di dimensione inferiore a $r-1$) sia ricondotta alla ricerca degli *invarianti* e *sistemi di invarianti* del sistema di forme considerato. Vi sono infatti delle relazioni fra i coefficienti di queste forme che si possono ancora chiamare, nel loro complesso, invariantive, ma che non si possono esprimere coll'annullarsi di un certo numero, anche sovrabbondante, di invarianti, ma solo mediante opportune equazioni tra i coefficienti di taluni *covarianti* ([1]). In ogni modo però siamo ricondotti anche in questo caso ad un problema di teoria delle forme algebriche.

13. Il teorema enunciato testè mette in luce in tutta la sua generalità un legame notevolissimo fra la questione che noi ci siamo proposti di studiare, e che può presentarsi sotto forma puramente geometrica, e la teoria delle forme binarie, in quanto precisamente le nostre ricerche geometriche si possono ricondurre al problema principale che è oggetto di quest'ultima teoria. — Nel caso di una sola forma binaria di grado r — ossia di una sola curva fissa in S_r, la quale sarà precisamente una curva razionale normale di ordine r — il legame osservato rientra sostanzialmente nella nota rappresentazione dei gruppi di r elementi di una forma semplice mediante i punti di uno spazio S_r; rappresentazione che, nel caso più semplice di $r=2$, fu già studiata da Hesse (" Journ. de Crelle ", Bd. 66), e della cui possibilità per r qualunque è fatto cenno nel *Programma* già cit. del Klein (§ 5).

Più recentemente, questa stessa rappresentazione compare nelle *Vorlesungen über continuirliche Gruppen...* di Lie-Scheffers, fra le diverse applicazioni della teoria dei gruppi continui (p. 718 e seg.). Anche lì si tratta di mettere in relazione problemi relativi a quest'ultima teoria colla teoria delle forme binarie; ma, prescindendo anche dal fatto che la parte analitica della questione, l'*equivalenza* cioè di due o più forme binarie, vi è sempre messa maggiormente in evidenza, è bene notare che lo scopo propostosi dall'A. è quello di applicare *i metodi generali di Lie per formazione degli invarianti di un dato gruppo continuo di trasformazioni* al caso particolare del gruppo di sostituzioni lineari a cui risultano assoggettati i coefficienti di una forma binaria corrispondentemente al gruppo ∞^3 di sostituzioni unimodulari delle variabili. Si tratta insomma di formare effettivamente questi invarianti per una nuova via. — A noi invece interessa soprattutto il lato geometrico della questione, e quindi, più che la formazione dei vari invarianti (che in molti casi sono già noti da lungo tempo), l'opportuna interpretazione geometrica delle equazioni che si hanno eguagliando questi invarianti a zero. — Nell'op. di Lie-Scheffers è anche considerato un caso di sistema di due forme (e precisamente di due forme quadratiche), ma senza alcun cenno di rappresentazione geometrica; rappresentazione che condurrebbe, dal nostro punto di vista, a un gruppo proiettivo ∞^3 dello spazio S_5 con due coniche fisse (in piani non incidenti).

([1]) Cfr. ad es. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872); pp. 91, 163.

§ 4.

Varietà invarianti rispetto al gruppo di una C^r razionale normale. Curve e superficie invarianti rispetto a un gruppo proiettivo semplice ∞^3 qualsiasi.

14. Per il caso di un gruppo proiettivo ∞^3 di S_r il quale trasformi in sè una curva razionale normale di ordine r, possiamo ancora aggiungere qualche osservazione d'indole generale [1].

Da quanto abbiamo detto risulta intanto che la ricerca delle M_{r-1} invarianti rispetto a un tal gruppo è ricondotta a quella degli invarianti di una forma binaria di grado r. È noto che fra questi invarianti (per $r \geq 3$) se ne possono trovare $r-2$ (razionali, interi) distinti fra loro, e tali che i rapporti fra opportune potenze di essi siano *invarianti assoluti* di quella stessa forma (fra i quali ultimi $r-3$ saranno indipendenti) [2]. Se con $A_1, A_2, \ldots A_{r-2}$ indichiamo quegli $r-2$ invarianti (relativi), e con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-2}$ un gruppo di esponenti (interi, positivi) tali che le $A_i^{\alpha_i}$ siano tutte funzioni di uno stesso grado nei coefficienti della forma primitiva, epperò i loro mutui rapporti risultino invarianti assoluti di questa forma, è chiaro che in uno spazio S_r, nel quale quei coefficienti $x_0, x_1, \ldots x_r$ si assumano come coordinate proiettive omogenee, ogni varietà del sistema lineare ∞^{r-3}:

$$k_1 A_1^{\alpha_1} + k_2 A^{\alpha_2} + \ldots\ldots + k_{r-2} A_{r-2}^{\alpha_{r-2}} = 0 \tag{1}$$

sarà invariante rispetto al gruppo ∞^3 della curva razionale normale:

$$\left| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{r-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_r \end{matrix} \right| = 0$$

Saranno dunque invarianti rispetto a questo gruppo anche le varietà intersezioni di due o più varietà qualsiasi del sistema (1). Se prendiamo in particolare $r-3$ varietà (M_{r-1}) indipendenti di questo sistema, e consideriamo le loro equazioni come lineari omogenee nelle $A_i^{\alpha_i}$, ne risulteranno individuati i mutui rapporti di queste ultime; vale a dire:

---

[1] Le cose esposte in questo § non sono però necessarie per comprendere il contenuto dei due §§ successivi.

[2] Quegli $r-2$ invarianti (relativi) sarebbero anche integrali indipendenti di un sistema completo di tre equazioni alle derivate parziali lineari fra $r+1$ variabili; variabili che sarebbero date appunto dai coefficienti della forma binaria considerata (cfr. Lie-Scheffers, Op. cit., p. 735). Nel nostro caso però, essendo note le equazioni finite del gruppo ∞^3 di cui si tratta, la loro determinazione si riduce a un semplice problema di eliminazione (Lie, Op. cit., vol. I, pp. 225-226).

I punti della varietà intersezione variabile di r — 3 *varietà* M_{r-1} *indipendenti del sistema* (1) *sono immagini in* S_r *di forme binarie di grado* r *aventi gli stessi invarianti assoluti* $A_i^{\alpha_i} : A_k^{\alpha_k}$ (sono *immagini,* nel senso che le coordinate di quei punti dànno i (mutui rapporti dei) coefficienti di queste forme). Quest'intersezione è in generale una varietà a *tre* dimensioni (M_3), perchè $r - 3$ varietà M_{r-1} in S_r hanno certo a comune almeno ∞^3 punti, e d'altra parte è anche noto che non vi possono essere più di ∞^3 forme binarie di dato grado aventi dati invarianti assoluti (generali).

Lo spazio S_r risulta così suddiviso in ∞^{r-3} varietà M_3 unite rispetto al gruppo proposto. Ma non è escluso che una tale M_3 possa ancora spezzarsi in due o più (certo però in un numero finito di) parti distinte e irreducibili [1], rispetto a ciascuna delle quali il gruppo ∞^3 sarà *transitivo* (vale a dire due punti generici di una di queste M_3 irreducibili saranno sempre immagini di forme *equivalenti*) [2].

Suddiviso così lo spazio S_r in varietà M_3 irreducibili unite, rispetto a ciascuna delle quali il gruppo ∞^3 è transitivo, è chiaro che ogni M_k ($k \geq 3$) unita rispetto al gruppo ∞^3 sarà una serie ∞^{k-3} di tali M_3 [3].

15. Quali sono le superficie (M_2) unite rispetto al nostro gruppo ∞^3? [4]. Un punto qualunque di una tal superficie deve essere unito per (almeno) ∞^1 trasformazioni contenute in questo gruppo, e sarà perciò immagine di una forma avente al più due radici distinte. Di qui si trae facilmente che:

Le sole superficie unite rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 *di una* C^r *razionale normale in* S_r *sono i luoghi delle intersezioni di tutte le possibili coppie di spazi* S_k *e* S_{r-k} *osculatori alla stessa curva nei suoi vari punti.*

Queste superficie saranno dunque in numero finito, e precisamente in numero di $\frac{r}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$ secondo che r è pari o dispari. In quest'ultimo caso esse apparteranno tutte alla varietà base del sistema lineare (1). Infatti un punto qualunque di una di esse è immagine di una forma binaria di grado r con una radice almeno $\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\text{pla}}$, e avente perciò tutti gli invarianti identicamente nulli [5]. — Se invece r

---

(1) Infatti gli invarianti assoluti di una data forma che sono razionali nei coefficienti di questa si possono ancora scegliere, in generale, in vari modi, e non si può escludere quindi che i birapporti dei punti radici della forma a quattro a quattro non ne risultino ancora individuati, ma solo determinati in un numero finito di modi. Scelti però opportunamente gli invarianti assoluti, la loro eguaglianza è anche condizione sufficiente per la trasformabilità di due forme o sistemi di forme l'uno nell'altro, quando nessun loro covariante sia identicamente nullo. In caso contrario, si richiede ancora l'annullarsi identico degli stessi covarianti (cfr. ad es. Fr. Meyer, *Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti;* trad. italiana di G. Vivanti; " Giorn. di Matem. ", vol. XXXIII, p. 273).

(2) Questa suddivisione si può estendere anche alla varietà base del sistema lineare (1), benchè non sia ivi ottenibile collo stesso mezzo. Nei punti di questa varietà si annullano infatti tutte le A_i.

(3) Ammettiamo per il momento (cosa che vedremo fra poco) che le superficie invarianti rispetto a questo gruppo ∞^3 sono in numero finito, e non vi sono perciò altre M_3 unite oltre a quelle già considerate. — Non sembra facile però l'istituire, per varietà arbitrarie, una ricerca generale tendente a stabilire quali fra queste M_k ammettono ancora altre trasformazioni proiettive in sè.

(4) La sola *curva* unita è evidentemente la C^r stessa.

(5) Salmon, *Modern higher Algebra* (4th edit.; Dublin, 1885); p. 233.

è pari, non fa parte della varietà base del sistema la (sola) superficie luogo delle intersezioni delle coppie di $S_{\frac{r}{2}}$ osculatori.

Si può aggiungere anzi, più generalmente, che ogni M_{r-1} del sistema (1) contiene le varie M_{k+1} luoghi degli S_k osculatori alla C^r, corrispondentemente a tutti quei valori di k che sono $\leq \frac{r-1}{2}$.

Fra le varietà M_{r-1} unite rispetto al gruppo ∞^3 vi è sempre una *quadrica* (M^2_{r-1}) ogni qual volta r è numero pari: quella quadrica (unica e ben determinata) che passa per la curva C^r e tocca in ogni suo punto il relativo S_{r-1} osculatore (*Teorema di* CLIFFORD) [1]. Del resto, è anche noto direttamente che ogni forma binaria di grado pari ammette un invariante quadratico [2]. — Invece se r è numero dispari (≥ 3), non vi sono quadriche unite rispetto al nostro gruppo ∞^3; ma vi è però sempre una varietà unita del 4° ordine (M^4_{r-1}) [3].

16. Nel caso di un sistema di due o più forme binarie si possono anche istituire considerazioni analoghe (per mezzo degli invarianti, sia simultanei, sia anche di ciascuna forma separatamente); ci limiteremo tuttavia ad accennare come si possano determinare in ogni caso tutte le curve e tutte le superficie invarianti rispetto al gruppo ∞^3 proposto (cfr. n° 11), basandosi sul fatto che ogni punto di una curva unita deve essere a sua volta unito per un sottogruppo ∞^2 e ogni punto di una superficie unita per un sottogruppo (almeno) ∞^1 contenuto in quello stesso gruppo proposto.

Nel gruppo ∞^3 di sostituzioni binarie (n° 11 ; eq. (2)) :

$$\xi'_1 = a\xi_1 + b\xi_2$$
$$\xi'_2 = c\xi_1 + d\xi_2$$

dove $ad - bc = 1$, ogni sottogruppo ∞^2 lascia fisso un elemento $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, che possiamo sempre supporre sia $\xi_1 = 0$. Per ogni operazione di questo sottogruppo sarà allora $b = 0$; e, perchè il corrispondente gruppo proiettivo ∞^2 di S_r ammetta qualche punto unito fisso esterno ai vari spazî uniti S_{h_i}, si può riconoscere facilmente (scrivendo le equazioni di quel gruppo) che almeno due indici h_i devono essere eguali fra loro. Viceversa, se ciò avviene, e, più generalmente, se k ($\leq m$) indici $h_1, h_2, \ldots h_k$ sono eguali fra loro, saranno uniti per quel sottogruppo ∞^2 tutti i punti dell'S_{k-1} determinato dai punti uniti fissi che questo stesso gruppo ha sulle singole curve $C^{h_1}, C^{h_2}, \ldots C^{h_k}$; e ciascuno di quei punti verrà portato dalle altre operazioni del gruppo ∞^3 nei punti di una nuova curva razionale normale (unita) di ordine $h_1 = h_2 = \ldots = h_k$.

Concludiamo perciò :

---

[1] *On the Classification of Loci,* " Phil. Trans. „, 1878; pp. 668-669.

[2] Cfr. ad es. SALMON, Op. cit., p. 128.

[3] Ibid., p. 129. Per $r = 3$ l'invariante biquadratico non è altro che il discriminante della forma (cubica).

Un gruppo proiettivo semplice ∞^3 *di uno spazio* S_r *non ammette in generale altre curve unite, all'infuori di quelle contenute negli spazi* $S_{h_1}, \ldots$ *considerati da principio. Nel solo caso che* $k \geq 2$ *degli ordini* h_i *di queste curve siano eguali fra loro vi è tutto un sistema di* ∞^{k-1} *curve razionali normali di questo stesso ordine unite rispetto al gruppo medesimo.* Queste curve sono direttrici della varietà M_k (∞^1 di spazi S_{k-1}) generata dalla proiettività che il nostro gruppo ∞^3 determina (cfr. n° 11) fra quelle curve C^{h_i} che si suppongono ora avere lo stesso ordine [1].

17. La ricerca delle superficie unite (non contenute in spazi S_{h_i}) non presenta nemmeno difficoltà di sorta, benchè il risultato a cui si giunge sia meno semplice. Bisognerà considerare i vari sottogruppi ∞^1 del solito gruppo ∞^3, distinguendo quelli *parabolici* (quelli cioè che sulle singole curve unite subordinano omografie paraboliche) dai rimanenti. Nel primo caso possiamo supporre $b = 0$, e $a = d$ (quindi entrambi $= 1$); avremo allora:

$$\begin{aligned}
x'_0 &= x_0 \\
x'_1 &= x_1 + c x_0 \\
x'_2 &= x_2 + 2c x_1 + c^2 x_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x'_{h_1} &= x_{h_1} + h_1 c x_{h_1 - 1} + \tbinom{h_1}{2} c^2 x_{h_1-2} + \ldots\ldots + c^{h_1} x_0
\end{aligned}$$

e le equazioni analoghe nelle $y, z, \ldots$ Nel secondo caso potremo supporre sia $b = c = 0$, $d = \frac{1}{a}$; e allora avremo in generale:

$$x'_p = a^{h_1 - p} d^p x_p = a^{h_1 - 2p} x_p \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots h_1)$$

e analogamente per le $y, z, \ldots$

Nel primo caso sono uniti quei punti (e quelli soli) per cui sono in generale diverse da zero le coordinate $x_{h_1}, y_{h_2}, z_{h_3}, \ldots$, ed eguali a zero tutte le rimanenti; vale a dire i punti dell'S_{m-1} che congiunge i (soli) punti uniti che questo gruppo ∞^1 ammette rispett. sulle m curve C^{h_i}. E questo ci permette di concludere:

Stabilita fra le m *curve* C^{h_i} *la proiettività di cui al n° 11, la varietà* M_m *luogo degli* ∞^1 *spazi* S_{m-1} *che congiungono i vari gruppi di* m *punti omologhi sulle singole curve, è sempre luogo di* ∞^{m-2} *superficie unite rispetto al gruppo* ∞^3 *proposto.* — In particolare per $m = 2$ si ha una superficie unica, e precisamente una rigata razionale normale.

La stessa varietà sarebbe anche luogo di ∞^{m-1} curve unite, quando i numeri h_i fossero tutti eguali fra loro (cfr. n° prec.).

(1) A questo stesso risultato si potrebbe anche giungere con opportuni ragionamenti sintetici relativi all'incidenza di taluni spazi minori contenuti in S_r.

18. Nel secondo caso converrà vedere quand'è che due o più coefficienti a^{h_i-2p}, ossia due o più esponenti del tipo h_i-2p, risultano eguali fra loro. Di qui anzitutto una distinzione degli spazi S_{h_i} in due gruppi, secondo che l'indice h_i è pari o dispari, e la considerazione di due spazi indipendenti Σ_k e Σ_{r-k-1}, uno dei quali conterrà gli eventuali punti uniti fissi del gruppo ∞^3, e poi le coniche, le quartiche, ecc. unite; l'altro, le rette, le cubiche, ecc. Ogni superficie unita non contenuta nella M_m poc'anzi considerata, starà in Σ_k o in Σ_{r-k-1}.

Quanto alle curve di ordine pari, supposto che tali siano ad es. le C^{h_1}, C^{h_2}, C^{h_3}, ..., avremo un primo gruppo di coordinate x_p, y_q, z_s,... tali che

$$h_1-2p=h_2-2q=h_3-2s=\ldots=0\,;$$

e questo ci conduce ad enunciare quanto segue:

Consideriamo le superficie luoghi rispett. delle intersezioni delle coppie di $S_{\frac{h_i}{2}}$ *osculatori alle singole curve* C^{h_i} *di ordine pari* (supposte in numero di m'). *Anche queste superficie risulteranno riferite proiettivamente fra loro per effetto della proiettività stabilita fra le curve* C^{h_i}. *La varietà* $M_{m'+1}$, *luogo degli* ∞^2 *spazi* $S_{m'-1}$ *determinati dai singoli gruppi di punti omologhi sopra queste superficie, sarà pure luogo di* $\infty^{m'-1}$ *superficie unite rispetto al gruppo proposto.*

Possiamo anche aggiungere:

Queste superficie invarianti hanno a comune con ogni singolo $S_{m'-1}$ *generatore della* $M_{m'+1}$ *uno o due punti, secondo che quei numeri* h_i *che sono pari sono anche tutti (o nessuno) multipli di* 4, *oppure uno o più fra essi sono multipli di* 4, *mentre altri non lo sono.*

In quest'ultimo caso gli ∞^2 spazi $S_{m'-1}$ determinano sopra ogni superficie unita un'involuzione di 2° grado che viene trasformata in sè dal gruppo ∞^3 che stiamo considerando.

Se una delle h_i pari è zero, la $M_{m'+1}$ diventa un cono.

Altri gruppi di superficie unite si avranno ancora in ponendo $h_1-2p=h_2-2q=\ldots=\pm 2$, e così via; e analogamente, nell'altro dei due spazi Σ, ponendo $h_1-2p=h_2-2q=\pm 1$, ecc. In ogni singolo caso particolare si potrebbero determinare tutte queste superficie senza difficoltà.

Osserveremo infine che, siccome le h_i non possono essere complessivamente (per uno spazio S_r che non sia suddiviso in infiniti spazi minori uniti) in numero superiore a $\frac{r+2}{2}$ o $\frac{r+1}{2}$, secondo che r è pari o dispari (e anzi, quando raggiungano questo limite, devono essere tutte eguali all'unità, fatta solo eccezione, se r è pari, per una di esse, che è nulla), così si vede facilmente che le superficie unite potranno tutt' al più esaurire una varietà $M_{\frac{r+3}{2}}$, vale a dire, per $r>3$, non esauriranno certo tutto lo spazio S_r. Dunque:

Per ogni gruppo proiettivo semplice ∞^3 *di uno spazio qualunque* S_r $(r\geq 4)$ *esiste una ed una sola suddivisione dello spazio* S_r *in* ∞^{r-3} *varietà* M_3 *irreducibili invarianti; e rispetto a una generica di queste* M_3 *il gruppo stesso sarà sempre transitivo.* (Può fare eccezione tuttavia il caso di uno spazio S_r suddiviso in ∞^{r-3} spazi S_3 uniti).

Questo teorema è quasi evidente nel caso del gruppo ∞^3 di una C^r razionale normale; ma non lo è forse altrettanto nel caso in cui vi siano in S_r spazi minori uniti.

§ 5.

I gruppi proiettivi semplici ∞^3 dello spazio ordinario.

19. Prima di occuparci in particolare delle varietà M_3 di S_4 con un gruppo non integrabile ∞^3 (o anche più ampio) di trasformazioni proiettive in sè, fermiamoci un momento ad esaminare i gruppi proiettivi semplici ∞^3 dello spazio ordinario, tanto per mostrare come se ne possano ritrovare per questa via i vari tipi già noti. Ne abbiamo precisamente *tre* tipi diversi (¹);

1° *Gruppo ∞^3 delle omografie che mutano in sè una data cubica sghemba.* Questo gruppo è transitivo rispetto a un punto generico dello spazio; la cubica stessa e la sviluppabile costituita dalle sue tangenti sono rispett. la sola curva e la sola superficie unita;

2° *Gruppo ∞^3 con una conica fissa e un punto fisso fuori del piano di questa conica,* ossia *gruppo delle rotazioni intorno a un punto* (quando la conica fissa si faccia coincidere coll'assoluto dello spazio Euclideo). Questo gruppo è *intransitivo,* e trasforma in sè tutto un fascio di quadriche mutuamente tangenti lungo quella certa conica (e in particolare tutto un sistema di sfere concentriche, se si tratta di rotazioni intorno a un punto);

3° *Gruppo ∞^3 con una (sola) quadrica unita, sulla quale sono a lor volta unite anche tutte le rette di uno dei due sistemi.* Anche questo gruppo è transitivo rispetto a un punto generico dello spazio; quella quadrica è la sola superficie unita, e le sole linee unite sono le generatrici di questa quadrica che appartengono al sistema testè considerato.

20. Il primo di questi tre gruppi è evidentemente quello in cui si rispecchia (secondo il già cit. *principio di trasporto* di Hesse) la geometria proiettiva di una forma semplice, nella quale si assuma come *elemento* la *terna di elementi* nel senso ordinario (ossia la forma cubica binaria). — E al terzo caso corrisponde analiticamente, nel senso del § 3, il sistema di due forme lineari, il cui (unico) invariante simultaneo rappresenta appunto, eguagliato a zero, la (sola) quadrica unita. L'esistenza delle ∞^1 rette unite sopra questa quadrica era prevista dal teorema del n° 16.

Aggiungerò ancora che i due ultimi gruppi ∞^3 (2° e 3°) sono quelli stessi a cui conduce la così detta *rappresentazione canonica* della Geometria proiettiva di una forma semplice (²). Si rappresentino infatti le trasformazioni proiettive di una tal

(¹) Non tenendo conto del caso in cui siano uniti tutti i piani di un certo fascio (vale a dire la retta asse del fascio medesimo, e *tutti i punti* di una seconda retta non incontrante quest'asse).

(²) Cfr. ad es. Enriques, *Conferenze di Geometria* (lez. litogr., Bologna, 1895); pp. 131-132.

forma come *punti* di uno spazio S_3, assumendo p. e. come coordinate proiettive omogenee di questi punti i coefficienti dell'equazione bilineare:

$$axx' + bx + cx' + d = 0 \quad (^1);$$

e si consideri nello spazio stesso S_3 la trasformazione (proiettiva) T in cui al punto immagine di una proiettività variabile P (della forma semplice) corrisponde il punto immagine o della trasformata di P mediante una proiettività fissa Q, oppure della proiettività prodotto PQ (o QP). — Nell'un caso e nell'altro, facendo poi variare (nella forma semplice) la proiettività Q, avremo in S_3 ∞^3 trasformazioni (proiettive) T formanti un gruppo. Nel primo caso sarà il gruppo 2°, la conica fissa essendo data dalle involuzioni paraboliche (degeneri), e il punto fisso dalla trasformazione identica (2). Nel secondo caso avremo il gruppo 3°, la (sola) quadrica unita essendo data dalle omografie degeneri; sopra questa saranno fisse tutte le rette dell'uno o dell'altro sistema, secondo che al punto immagine di P si fa corrispondere, per ogni proiettività Q, il punto immagine di PQ o di QP.

Ritroviamo dunque che, all'infuori del piano, *le sole superficie dello spazio ordinario che ammettono un gruppo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè sono la sviluppabile circoscritta a una cubica sghemba, la quadrica, e il cono quadrico.* Nel gruppo ∞^6 di una quadrica non degenere sono contenuti anzi due diversi tipi di gruppi semplici ∞^3; uno si ottiene fissando un punto fuori della quadrica (e il suo piano polare); l'altro fissando tutte le rette di uno dei due sistemi (3).

Nel piano, i soli gruppi proiettivi semplici ∞^3 sono il gruppo delle omografie con una conica fissa e il gruppo lineare omogeneo speciale (con quelli ad esso proiettivamente equivalenti) (4).

---

(1) Questa stessa rappresentazione si trova in Stéphanos, *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace.....*, " Math. Ann. ", Bd. XXII. Cfr. anche Cayley, *On the correspondance of homographies and rotations*, " Math. Ann. ", Bd. XV.

(2) Per questo gruppo ∞^3 sono uniti il *piano* delle involuzioni ($b - c = 0$), il *cono quadrico* delle omografie paraboliche ($[b + c]^2 - 4ad = 0$), la quadrica delle proiettività degeneri ($ad - bc = 0$), e, più generalmente, tutte le quadriche del fascio $[b - c]^2 - k[ad - bc] = 0$ corrispondenti alle varie schiere di omografie di dato invariante assoluto.

(3) In coordinate x, y sulla superficie (o sopra un piano rappresentativo di essa) questi due gruppi ∞^3 potrebbero ritenersi generati rispettivamente dalle terne di trasformazioni infinitesime: $p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q$ e $p,\ xp,\ x^2p$ (Lie, Op. cit., vol. III, p. 203).

(4) Cfr. anche le tabelle dei vari gruppi proiettivi del piano (Lie, Op. cit., vol. III, pp. 106-107; Lie-Scheffers, Op. cit., pp. 288-291).

§ 6.

I gruppi proiettivi semplici ∞^3 dello spazio S_4. Varietà M_3 con un gruppo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè.

21. Veniamo ora a trattare il caso dei gruppi proiettivi semplici ∞^3 dello spazio S_4. Questi gruppi (escludendo quelli con tutto un fascio di S_3 uniti fissi) dànno luogo ai quattro tipi seguenti:

1° Gruppo ∞^3 con una quartica razionale normale unita;

2° Gruppo ∞^3 con una cubica normale (di S_3) unita, e un punto del pari unito fuori dell'S_3 di questa cubica;

3° Gruppo ∞^3 con una conica unita e una retta pure unita non incontrante il piano di questa conica;

4° Gruppo ∞^3 con due rette unite sghembe, e un punto unito fisso fuori dell'S_3 di queste due rette.

Cominciamo col 1° caso. La quartica unita sia rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = \xi_1^4;\ x_1 = \xi_1^3\xi_2;\ x_2 = \xi_1^2\xi_2^2;\ x_3 = \xi_1\xi_2^3;\ x_4 = \xi_2^4.$$

Dovremo allora considerare gli invarianti della forma binaria biquadratica (nelle variabili ξ_1, ξ_2):

$$x_0\xi_1^4 + 4x_1\xi_1^3\xi_2 + 6x_2\xi_1^2\xi_2^2 + 4x_3\xi_1\xi_2^3 + x_4\xi_2^4;$$

vale a dire (facendo uso delle solite lettere i, j, ma prescindendo per brevità dai fattori numerici):

$$i = x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2$$

$$j = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = x_0x_2x_4 - x_0x_3^2 - x_1^2x_4 - x_2^3 + 2x_1x_2x_3.$$

Saranno dunque invarianti tutte le varietà del fascio:

$$j^2 - k i^3 = 0$$

dove k è il parametro variabile. Queste varietà sono del 6° ordine, e contengono in generale la quartica fissa come curva tripla. Fra esse notiamo la quadrica $i = 0$ contata tre volte, e la varietà cubica $j = 0$ contata due volte; nessun'altra varietà del fascio si spezza in due o più parti, distinte o coincidenti. Due punti generici di una varietà qualunque sono immagini di quaderne fra loro proiettive, e si corrispondono perciò in (almeno) quattro operazioni diverse del gruppo ∞^3.

22. La quadrica $i=0$ è quella considerata già al n° 14 per r pari qualunque. Qui essa è anche luogo dei punti per cui gli S_3 osculatori condotti alla quartica toccano questa in punti formanti un gruppo equianarmonico; come pure in questo caso, e allora soltanto, avviene altresì che lo spazio S_3 dei quattro punti di contatto contiene il punto da cui si è partiti (ossia l'intersezione dei quattro S_3 osculatori). Di qui appunto il noto teorema [1]: *Se una quartica di seconda specie di* S_3 *ha i quattro piani osculatori stazionari (supposti distinti) tali che i relativi punti di contatto stiano in un piano, questi stessi punti formeranno sulla curva un gruppo equianarmonico, e viceversa.*

La varietà cubica $j=0$ contiene la quartica fissa come curva doppia, ed è perciò il luogo delle corde di questa stessa curva. Essa fu studiata già dal Sig. Segre (" Mem. Acc. di Torino ,, ser. 2ª, t. XXXIX; — n° 43, 44), alla cui Memoria rimandiamo per le ulteriori e interessanti sue proprietà. *Gli spazi osculatori alla quartica condotti da un punto qualunque di questa varietà — ossia da un punto di una sua corda — la toccano in quattro punti formanti un gruppo armonico.*

Un'altra varietà, anche notevole, del nostro fascio si ha per $k=\frac{1}{27}$; è la *varietà luogo dei piani osculatori alla quartica*, o *varietà discriminante,* perchè il primo membro della sua equazione è precisamente, a meno di fattori numerici, il discriminante della forma biquadratica considerata al n° prec.

Si può anche riconoscere facilmente che *nessuna varietà del fascio* $j^2-ki^3=0$, *tranne la quadrica* $i=0$, *ammette più di* ∞^3 *trasformazioni proiettive in sè.* La quadrica $i=0$ ne ammette invece, in tutto, un gruppo ∞^{10}, che dal Sig. Lie fu dimostrato essere *semplice* [2].

23. Le superficie invarianti per questo gruppo ∞^3 furono già determinate al n° 14 per il caso analogo in uno spazio qualunque S_r [3]. Sono due soltanto:

1° *La superficie luogo delle tangenti alla quartica,* che è l'intersezione delle due varietà $i=0$ e $j=0$, e quindi del 6° ordine. Essa è la polare reciproca della varietà discriminante rispetto alla quadrica $i=0$;

2° *La superficie luogo delle intersezioni delle coppie di piani osculatori alla quartica* (doppia quindi per la varietà discriminante), che è luogo dei punti immagini di forme biquadratiche con due radici doppie, e si rappresenta analiticamente scrivendo che (supposto, in generale, $i,\ j\neq 0$) i coefficienti della forma biquadratica x_ξ sono ordinatamente proporzionali a quelli della relativa Hessiana [4]. Questa superficie è

---

(1) Cfr. ad es. Franz Meyer, *Apolarität und rationale Curven*, Tübingen, 1883, p. 183.

(2) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 357.

(3) Per questo caso ($r=4$) esse compaiono anche nell'Op. cit. di Lie-Scheffers.

(4) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 163; Gordan-Kerschensteiner, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, vol. II, p. 197.

del 4° ordine, ed è la polare reciproca della varietà cubica $j=0$ rispetto alla quadrica $i=0$ (Segre, l. c.). Essa si può anche ottenere come proiezione della *superficie di Veronese* (F_2^4 di S_5) (¹) da un punto esterno a questa, e contiene perciò ∞^2 coniche, fra le quali è in particolar modo notevole la serie razionale ∞^1 d'indice due di quelle coniche che stanno nei piani osculatori alla quartica (²). — Viceversa, si può anche dimostrare direttamente che la F_2^4 di S_4 proiezione *generale* della superficie di Veronese (proiezione cioè di questa superficie da un punto non contenuto nel piano di alcuna sua conica) è trasformata in sè da un gruppo proiettivo ∞^3 con una quartica unita, e deve appunto coincidere colla superficie testè considerata.

Anche questa superficie di quarto ordine dello spazio S_4 appare dunque importante e interessante, quasi quanto la superficie normale di cui è proiezione. Essa si è presentata anche al Sig. Castelnuovo nelle sue *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (" Atti Ist. Ven. „, ser. 7ª, t. II), come *superficie singolare* di una rete (sistema lineare ∞^2) di complessi lineari di rette. Possiamo ancora riassumerne le proprietà principali, d'altronde già note, dicendo:

La superficie del quarto ordine luogo delle intersezioni delle coppie di piani osculatori a una quartica razionale normale di S_4 *è anche superficie singolare per una rete di complessi lineari di rette, la cui varietà base è costituita dalle* ∞^3 *trisecanti della superficie stessa* (³). *Questa superficie è la proiezione più generale della* F_2^4 *di Veronese (normale per* S_5*), e si rappresenta analiticamente (in coordinate proiettive omogenee) nel modo più semplice, scrivendo che i (cinque) coefficienti di una forma binaria biquadratica generale sono ordinatamente proporzionali a quelli della relativa Hessiana.*

24. Veniamo al secondo caso; e qui (in coordinate $x_1, x_2, \dots x_5$) supponiamo unito lo spazio $x_5=0$, e, dentro di esso, la cubica:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 0;$$

di più, sia anche unito il punto fondamentale $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Il nostro gruppo ∞^3, entro lo spazio $x_5=0$, sarà allora rappresentato dalle equazioni:

(¹) " Mem. della R. Acc. dei Lincei „; ser. 3ª, vol. XIX (1883-1884).

(²) Questa serie ∞^1 di coniche è anche unita rispetto al gruppo ∞^3 proposto, sicchè la stessa F^4 di S_4 si trova nell'ultimo caso considerato al n° 4 (p. 11) della mia Nota: *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè*, " Rend. di Palermo „, t. X, pp. 1 e seg. Di qui segue pure, per altra via, ch'essa potrà rappresentarsi sul piano in modo che a quella serie ∞^1 d'indice due di coniche corrispondano le tangenti a una conica fissa del piano rappresentativo.

(³) Queste ∞^3 rette sono rispettivamente immagini delle ∞^3 involuzioni I_4^1 determinate dalle singole forme binarie biquadratiche colle rispettive Hessiane. Su ciascuna di esse risulta determinata una corrispondenza (2, 1) tra forme f e Hessiane H; le *tre* intersezioni della retta considerata colla superficie F^4 sono gli elementi uniti di questa corrispondenza; le due intersezioni colla quadrica $i=0$ (forme equianarmoniche) si corrispondono in doppio modo.

$$\begin{aligned} x'_1 &= a^3 . x_1 + 3a^2 b . x_2 + 3ab^2 . x_3 + b^3 . x_4 \\ x'_2 &= a^2 c . x_1 + (a^2 d + 2abc) x_2 + (2abd + b^2 c) x_3 + b^2 d . x_4 \\ x'_3 &= ac^2 . x_1 + (bc^2 + 2acd) x_2 + (2bcd + ad^2) x_3 + bd^2 . x_4 \\ x'_4 &= c^3 . x_1 + 3c^2 d . x_2 + 3cd^2 . x_3 + d^3 . x_4 \end{aligned}$$

dove a, b, c, d sono i soliti parametri legati dalla relazione $ad - bc = 1$. E a queste equazioni dovremo aggiungere, per lo spazio S_4, ancora quest'altra:

$$x'_5 = x_5.$$

Rispetto a questo gruppo sarà invariante il discriminante della forma cubica (nelle variabili ξ_1, ξ_2):

$$x_1 . \xi_1^3 + 3x_2 . \xi_1^2 \xi_2 + 3x_3 . \xi_1 \xi_2^2 + x_4 . \xi_2^3$$

ossia:

$$R \equiv 6x_1x_2x_3x_4 - 4x_1x_3^3 - 4x_4x_2^3 - x_1^2x_4^2 + 3x_2^2x_3^2.$$

Non muterà dunque, per una qualunque sostituzione del gruppo ∞^3, nessuna funzione (omogenea) del tipo $R + kx_5^4$ (k essendo un parametro arbitrario); e saranno perciò invarianti, rispetto al nostro gruppo proiettivo ∞^3, tutte le varietà del fascio:

$$R + kx_5^4 = 0.$$

Queste varietà sono del 4° ordine e tutte irreducibili, all'infuori di quella che è costituita dallo spazio $x_5 = 0$ contato quattro volte. Questo stesso spazio $x_5 = 0$ e il cono $R = 0$ sono anche le sole varietà del fascio che ammettono più di ∞^3 trasformazioni proiettive in sè. Il cono $R = 0$ ne ammette precisamente ∞^8, fra cui ∞^5 omologie.

Le sole superficie unite rispetto allo stesso gruppo ∞^3 sono la sviluppabile $R = x_5 = 0$, e il cono cubico normale che dal punto $x_1 = \ldots = x_4 = 0$ proietta la cubica fissa dello spazio $x_5 = 0$.

25. Supponiamo ora (3° caso) che siano uniti la retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e il piano $x_4 = x_5 = 0$ colla conica $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ in esso contenuta. Il nostro gruppo ∞^3 sarà rappresentato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a^2 . x_1 + 2ab . x_2 + b^2 . x_3 \\ x'_2 &= ac . x_1 + (ad + bc) x_2 + bd . x_2 \\ x'_3 &= c^2 . x_1 + 2cd . x_2 + d^2 . x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x'_4 &= ax_4 + bx_5 \\ x'_5 &= cx_4 + dx_5 \end{aligned}$$

colla solita condizione $ad - bc = 1$. Rispetto a queste sostituzioni risultano invarianti il discriminante della forma quadratica:

$$x_1 . \xi_1^2 + 2x_2 . \xi_1\xi_2 + x_3 . \xi_2^2$$

nonchè il risultante di questa e della forma lineare:

$$x_4\xi_1 + x_5\xi_2$$

vale a dire le funzioni:

$$R_1 \equiv x_2^2 - x_1x_3 ; \; R_2 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 2x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = x_1x_5^2 + x_3x_4^2 - 2x_2x_4x_5.$$

Saranno dunque invarianti rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 le ∞^1 varietà di 6° ordine:

$$R_1^3 + kR_2^2 = 0.$$

La varietà $R_1 = 0$ è evidentemente il cono quadrico di 2ª specie che dalla retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ proietta la conica fissa del piano $x_4 = x_5 = 0$. Più interessante è la varietà cubica $R_2 = 0$, che contiene $x_4 = x_5 = 0$ come *piano doppio;* essa è luogo degli ∞^1 piani che congiungono i singoli punti della retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ rispett. alle tangenti alla conica $x_4 = x_5 = x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ nei punti che corrispondono ai primi nella solita proiettività già considerata in generale al n° 11 (1). Le congiungenti delle coppie di punti omologhi di retta e conica in questa stessa proiettività sono le generatrici di una rigata cubica normale che (contata due volte) è pure intersezione delle due varietà $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$.

Una proiettività che muti in sè una varietà generica del fascio $R_1^3 + kR_2^2 = 0$ deve anche trasformare in sè questa rigata; quindi la retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e così pure la conica $x_4 = x_5 = x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, il cui piano gode della proprietà caratteristica di incontrare quella varietà generica secondo questa sola conica, contata tre volte. Da questo, e dal fatto che le $R_1^3 = 0$ e $R_2^2 = 0$ sono le sole varietà riducibili del fascio, segue altresì che le stesse $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$ sono le sole varietà che possono ammettere altre trasformazioni proiettive.

Il cono quadrico $R_1 = 0$ ne ammette in tutto un gruppo ∞^{13}, come risulta facilmente dall'enumerazione delle costanti.

La varietà cubica $R_2 = 0$ ne ammette invece un gruppo ∞^6. Questa varietà, come serie ∞^1 di piani, ammette infatti ∞^2 direttrici rettilinee, e per ciascuna di queste si ha un gruppo ∞^1 di *omografie rigate* che trasformano in sè la varietà stessa,

(1) Questa varietà cubica compare anche nella Memoria già cit. del sig. SEGRE (n° 52), *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni.....*, “Mem. della R. Acc. di Torino”, serie 2ª, t. XXXIX, 1888.

e per le quali sono uniti tutti i punti della direttrice che si considera, e tutti quelli del piano doppio $x_4 = x_5 = 0$. Queste omografie rigate formano in tutto un gruppo ∞^3, che, all'infuori della trasformazione identica, ha a comune col gruppo da noi prima considerato la sola collineazione involutoria [1]:

$$x'_1 = x_1; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3$$
$$x'_4 = -x_4; \quad x'_5 = -x_5.$$

Il gruppo complessivo di tutte le trasformazioni proiettive della M_3^3 deve essere dunque almeno ∞^6 (se no due sottogruppi ∞^3 avrebbero certo infinite operazioni a comune). — Viceversa, se questo gruppo dipendesse da più di *sei* parametri essenziali, esso dovrebbe contenere un sottogruppo almeno ∞^4 per il quale risultassero uniti tutti gli ∞^1 piani della varietà M_3^3, e quindi tutti i punti del piano doppio (piano *direttore*); e un sottogruppo almeno ∞^1 per il quale risultassero uniti anche tutti i punti di un dato piano generatore qualunque, quindi tutti quelli dell'S_3 determinato da quest'ultimo piano e dal piano direttore. Ma questo gruppo ∞^1 si comporrebbe allora di omologie; e ciò non è possibile se la M_3^3 non è (come non è appunto in questo caso) un cono.

Le equazioni del gruppo complessivo ∞^6, coll'introduzione di due nuovi parametri m, n, e tolta la restrizione $ad - bc = 1$, possono assumere la forma:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a^2 . x_1 + 2ab . x_2 + b^2 . x_3 + 2m(ax_4 + bx_5)\\
x'_2 &= ac . x_1 + (ad + bc)x_2 + bd . x_3 + n(ax_4 + bx_5) + m(cx_4 + dx_5)\\
x'_3 &= c^2 . x_1 + 2cd . x_2 + d^2 . x_3 + 2n(cx_4 + dx_5)\\
x'_4 &= ax_4 + bx_5\\
x'_5 &= cx_4 + dx_5.
\end{aligned}$$

Il gruppo ∞^3 di omografie rigate si ha ponendo $a = d$; $b = c = 0$.

Non vi sono altre superficie invarianti rispetto al nostro gruppo ∞^3 semplice ($m = n = 0$; $ad - bc = 1$), all'infuori del piano $x_4 = x_5 = 0$ e della rigata cubica $R_1 = R_2 = 0$ (la quale ultima ammette ∞^6 trasformazioni proiettive in sè). E non vi sono quindi nemmeno (come non vi erano nei casi precedenti) varietà M_3 invarianti non contenute nel fascio $R_1^3 + kR_2^2 = 0$.

26. Rimane il caso (4°) di due rette unite sghembe ($x_1 = x_2 = x_5 = 0$, e $x_3 = x_4 = x_5 = 0$) e di un punto unito fuori del loro S_3 ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Fra le due rette unite risulterà determinata la solita proiettività (cfr. n° 11), e in questo

[1] L'omografia più generale di questo gruppo ∞^3 avrebbe per simbolo [(111) (11)] (Segre, " Mem. della R. Acc. dei Lincei ", ser. 3ª, vol. XIX) oppure [21] (Predella, " Ann. di Mat. ", ser. 2ª, vol. XVII). Per il sottogruppo invariante ∞^2 gli stessi simboli diventerebbero rispett. [(221)] e [(21)].

caso le congiungenti delle coppie di punti omologhi saranno generatrici di una quadrica (di S_3) unita rispetto al gruppo ∞^3 che vogliamo considerare. Per questo stesso gruppo (cfr. n° 16) saranno anche unite tutte le singole rette (direttrici) della quadrica appartenenti al sistema di quelle prime due. — Le equazioni del gruppo avranno in questo caso la forma:

$$\begin{array}{lll} x'_1 = ax_1 + bx_2 & x'_3 = ax_3 + bx_4 & \\ & & (ad - bc = 1) \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 & x'_4 = cx_3 + dx_4 & \\ & x'_5 = x_5. & \end{array}$$

Saranno dunque invarianti tutte le quadriche del fascio:

$$(x_1x_4 - x_2x_3) + kx_5^2 = 0$$

la cui varietà base è la quadrica dello spazio $x_5 = 0$ (contata due volte):

$$x_1x_4 - x_2x_3 = x_5 = 0.$$

Oltre a questa superficie, sono uniti tutti i piani del cono quadrico $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ che appartengono al sistema di $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = x_4 = 0$ (¹). Non vi sono però altre superficie unite, nè altre M_3 unite, all'infuori delle quadriche già considerate.

27. Riassumendo dunque, possiamo concludere che le *superficie* appartenenti allo spazio S_4, le quali ammettono un gruppo *non integrabile* di trasformazioni proiettive in sè, sono le seguenti:

1° *Rigata (sviluppabile) del 6° ordine*, luogo delle tangenti a una quartica razionale normale;

2° *Superficie del 4° ordine* proiezione della F_2^4 di Veronese (normale per S_5) da un punto non contenuto nel piano di alcuna sua conica (non posto cioè sopra nessuna corda di essa);

l'una e l'altra con sole ∞^3 trasformazioni proiettive in sè;

3° *Rigata normale del 3° ordine*, con ∞^6 trasformazioni proiettive in sè (formanti un gruppo simile a quello delle omografie piane con un punto unito fisso);

4° *Cono cubico normale*, con ∞^8 trasformazioni proiettive in sè (questo gruppo è simile a uno dei così detti *gruppi di Jonquières* (²)).

Le *varietà a tre dimensioni*, pure con un gruppo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè, sono le seguenti (³):

(¹) Questi ∞^1 piani rientrano come caso particolare nelle superficie considerate in generale al n° 17.

(²) Cfr. Enriques, " Rend. R. Acc. dei Lincei ", ser. 5ª, vol. II, 1° sem., pp. 532-538.

(³) Prescindiamo naturalmente dalla considerazione dello *spazio* S_3 (come pure del *piano*, della *quadrica di* S_3, ecc.), non appartenendo questi enti allo spazio S_4.

1° Varietà del 6° ordine, rappresentabili analiticamente coll'eguagliare a una costante arbitraria ($\neq 0, \infty$) il solito invariante assoluto di una forma binaria biquadratica, espresso mediante i coëfficienti di questa. Fra queste varietà è notevole una particolare M_3^6 costituita da una serie ∞^1 di piani;

2° Varietà del 4° ordine rappresentabili analiticamente coll'eguagliare il discriminante di una forma binaria cubica generale alla quarta potenza di una nuova (*quinta*) variabile (le prime *quattro* essendo date dai coefficienti della forma cubica);

3° Varietà del 6° ordine rappresentabili analiticamente coll'eguagliare fra loro il cubo del discriminante di una forma binaria quadratica, e il quadrato del risultante di questa stessa forma e di una forma lineare (potendosi supporre $= 1$ il parametro k del n° 24);

4° *Varietà del 3° ordine luogo delle corde di una quartica razionale normale* (ossia varietà $j = 0$, dove j è il solito invariante cubico di una forma binaria biquadratica);

tutte varietà con sole ∞^3 trasformazioni proiettive in sè; poi ancora:

5° *Varietà del 3° ordine con piano doppio*, la quale ammette ∞^6 trasformazioni proiettive in sè;

6° *Cono (di 1ª specie)* che proietta la superficie sviluppabile di 4° ordine circoscritta a una cubica di S_3 da un punto esterno a questo spazio; cono che ammette complessivamente ∞^8 trasformazioni proiettive in sè;

7° *La quadrica* (M_3^2), con un gruppo (semplice) ∞^{10} di trasformazioni proiettive in sè, se non degenere; con un gruppo ∞^{11} di tali trasformazioni, se *cono di 1ª specie;* con un gruppo ∞^{13}, se *cono di 2ª specie.*

La varietà n° 1, in quanto sia costituita da una serie ∞^1 di piani, e le varietà n° 4 e 5 sono rispett. duali, nello spazio S_4, delle superficie n° 1, 2 e 3.