Gino Fano

Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie V, Vol. **4** (1895), p. 18–25

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1895_8>

Matematica. — *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. Scopo di questa Nota è di portare un primo contributo a una teoria, che potrei chiamare *geometrica*, delle *equazioni differenziali lineari;* di mostrare cioè in qual modo considerazioni geometriche semplicissime possano condurre a risultati interessanti per un ramo così importante dell'Analisi moderna. Non sono, in gran parte almeno, risultati nuovi quelli che ora ottengo; ma la novità del metodo potrà forse invogliare qualcuno a continuare con me queste ricerche (1).

« L'idea prima di introdurre nello studio delle equazioni differenziali lineari quelle considerazioni geometriche di cui noi ci varremo, sembra dovuta ad Halphen (*Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires;* Mém. Sav. Etr.; vol. 28; 1883/84), mentre a Laguerre (Compt. Rend.; 1879) e Brioschi (Bull. de la Soc. Math. de France; t. VII, 1879) spetterebbe di aver per la prima volta considerati gli *invarianti differen-*

(1) All'egr. prof. Klein, che qui mi è caro ringraziare nuovamente, vado debitore di avermi istradato su questa via.

ziali, dei quali lo stesso Halphen, anche in altri lavori su quest'argomento (1), ha fatto ampiamente uso (ma ai quali noi non ricorreremo). — Sia

$$y^{(n)} + A_1\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_{n-1}\, y' + A_n\, y = 0$$

un'equazione differenziale lineare (omogenea) di ordine $n \geq 3$, nella quale y è la variabile dipendente, e i coefficienti $A_1 \ldots$ sono funzioni qualunque della variabile indipendente x, che si suppongono appartenere a un determinato campo di razionalità (*Rationalitätsbereich*). Indichiamo con $y_1, y_2, \ldots y_n$ un sistema di integrali (soluzioni) *indipendenti* dell'equazione proposta (non legati dunque da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti), e interpretiamo queste stesse y_i come coordinate projettive omogenee di punti (y) in uno spazio S_{n-1}. Al variare della x varieranno, in generale, anche le $y_1, y_2, \ldots y_n$, e il punto (y) descriverà una certa curva Γ (appartenente allo spazio S_{n-1}) che Halphen ha chiamata *Courbe attachée* all'equazione differenziale (2). Questa curva, per il modo stesso in cui fu definita, non si altera se alla variabile indipendente x se ne sostituisce un'altra z, comunque legata con essa; e nemmeno se gli integrali y_i vengon tutti moltiplicati (o divisi) per uno stesso fattore, funzione di detta variabile; essa ha dunque carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni:

$$z = f(x) \qquad y = \varphi(x) \,.\, v \text{ (3)}$$

e si può quindi considerare come *attachée* a un'intera classe di equazioni differenziali lineari, deducibili l'una dall'altra con trasformazioni del tipo accennato (4) (5).

« Le y_i non sono però, in generale, funzioni univoche della x; ma, per uno stesso valore di questa, esse potranno assumere più, e fors'anche infiniti

(1) Ad es. nella Mem.: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du 4ème ordre;* Acta Math., vol. III.

(2) Halphen limita bensì questa considerazione ai casi di $n = 3$ e $n = 4$ (quindi $n - 1 \leq 3$); ma dice egli stesso che al di là del 4° ordine « *si l'image géométrique fait défaut, l'objet ne subsiste pas moins* ».

(3) È appunto per avere l'invariantività rispetto a queste trasformazioni, che conviene interpretare le y_i come coordinate *omogenee*.

(4) Se si trattasse però di equazioni differenziali di 2° ordine ($n = 2$), sarebbe facile verificare che con trasformazioni di questo tipo si può passare da una qualunque di esse a ogni altra. Volendo quindi studiare proprietà invariantive di queste equazioni rispetto a certe trasformazioni, conviene limitare maggiormente la cerchia di queste ultime (fissandosi ad es., nel caso dei coefficienti razionali, sulle sole sostituzioni lineari di x).

(5) È facile verificare che le coordinate di un iperpiano (S_{n-2}) variabile osculatore alla curva Γ soddisfanno all'*equazione differenziale aggiunta* di Lagrange:

$$y^{(n)} - (A_1\, y)^{(n-1)} + (A_2\, y)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n A_n\, y = 0\,;$$

mentre le coordinate di una tangente, di un piano, o in generale di un S_k osculatore ($k \leq n-3$) soddisfanno rispettivamente alle diverse *equazioni differenziali associate* di Forsyth (Phil. Trans.; vol. CLXXIX; cfr. anche: Craig, *A treatise on linear differential equations*; New-York, 1889).

valori, tutti esprimibili però come combinazioni lineari dei loro valori primitivi. Più chiara riesce la cosa se immaginiamo distesa la variabile x su di una superficie (*piano, superficie di Riemann,* ....) sulla quale risultino funzioni univoche i singoli coefficienti $A_1, \ldots$; allora ad ogni cammino chiuso sopra questa superficie corrisponderà una certa sostituzione lineare a coefficienti costanti $y_i^{(1)} = \sum_k a_{ik} y_k$, per modo che, quando x descrive questo cammino ritornando al punto di partenza, le y_i, anzichè riprodursi tali e quali, daranno luogo alle $y_i^{(1)}$ così definite (ma che potrebbero, in particolare, coincidere con esse). All'insieme di tutti i cammini chiusi che su quella superficie si possono tracciare, corrisponderà un certo *gruppo* di sostituzioni lineari delle y_i; gruppo che potrà essere finito o infinito, ma sarà certo *discontinuo*, e risulterà dalle possibili combinazioni di un certo numero di operazioni fondamentali (operazioni *generatrici*). A questo gruppo Hermite ha dato il nome di *gruppo monodromico* dell'equazione differenziale (1). — Ma, interpretata geometricamente, una sostituzione lineare delle y_i dà luogo a una collineazione nello spazio S_{n-1}; e siccome qui si tratta di sostituzioni che mutano ogni gruppo di valori delle funzioni $y_i(x)$ in un punto dato x in un altro gruppo di valori che le stesse funzioni possono assumere in questo punto (2), avremo a che fare in sostanza con *un gruppo discontinuo di collineazioni dello spazio* S_{n-1}, *che trasformano in sè stessa la curva* Γ ATTACHÉE *all'equazione differenziale proposta* (3).

(1) Dalla considerazione di questo gruppo Riemann avrebbe voluto appunto prender le mosse, per costruire una teoria generale delle equazioni differenziali lineari. E questa sembra che dovesse essere la seconda parte del suo Programma colossale nella teoria delle funzioni, mirando egli forse a dare nella teoria delle equazioni differenziali lineari una sorella alla teoria delle funzioni Abeliane. Ma di lui non abbiamo, in quella teoria, che la Memoria: *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen* (Ges. Werke, 2ª ed., IV), e il frammento (ibid. XXI): *Zwei allgemeine Lehrsätze*.... Anche qui la difficoltà maggiore sta nei *teoremi di esistenza.* Nel solo caso più semplice della *funzione ipergeometrica* (considerata appunto da Riemann) la dimostrazione relativa fu data recentemente dallo Schilling (Math. Ann., vol. XLIV; e altro lavoro che escirà fra breve).

(2) Più brevemente, possiamo dire che ogni *ramo (Zweig)* di una funzione $y(x)$ vien mutato in un altro *ramo* di questa stessa funzione.

(3) Da ciò la ragione del nome di *projectiv-periodische Curven* (curve *projettivamente periodiche?*) che il Klein proponeva di dare a queste curve. Una specie di periodicità si presenta infatti corrispondentemente ai cammini chiusi della x testè considerati. Così p. e. la *sinussoide* (rappresentata sotto la forma $y = \text{ar sen}\, x$) sarebbe una curva *additivamente periodica;* e in modo analogo si potrebbero anche immaginare curve *moltiplicativamente periodiche.* — Ricerche su queste curve *projettivamente periodiche* non ne furono fatte ancora; ma ad esse si potrebbero applicare ricerche analitiche già condotte a buon punto; p. e. quelle sugli integrali delle soluzioni y $(\int y_i\, dx)$, che corrisponderebbero a ciò che gli integrali Abeliani sono per le curve algebriche. Già Abel aveva considerati questi integrali (Oeuvr., t. II, p. 54-65), e aveva dato per essi un teorema analogo a quello sullo

« La considerazione di questo *gruppo di trasformazioni projettive* è appunto fondamentale per il nuovo campo di ricerche del quale mi sono proposto di dare un saggio. Lo studio geometrico di queste curve Γ non può non esser fecondo di risultati per la teoria delle equazioni differenziali lineari.

« 2. La questione particolare della quale vogliamo qui occuparci fu posta per la prima volta dal sig. Fuchs, che in una breve Nota inserta nei Berl. Ber. (8 giugno 1892), e più diffusamente nella Memoria: *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen* ..... (Acta Math., vol. I) già la risolse per il caso delle equazioni differenziali di 3° ordine. E si tratta precisamente di indagare, per quanto possibile, la natura degli integrali di una data equazione differenziale lineare, nell'ipotesi che un sistema di soluzioni indipendenti di detta equazione soddisfacciano a una o più date equazioni algebriche (omogenee, a coefficienti costanti, e quindi di grado superiore al primo). Questo caso comprende naturalmente quello in cui gli integrali in discorso sono essi stessi funzioni algebriche della variabile indipendente x. Geometricamente, ciò vuol dire che la curva Γ dianzi considerata si suppone *a priori* contenuta in una certa varietà algebrica dello spazio S_{n-1} (1); o, in particolare, si suppone essa stessa una curva algebrica, e ciò nel caso che le equazioni algebriche date siano tali da definire una curva nello spazio S_{n-1} delle coordinate omogenee y_i (2). Potrebbe bensì Γ essere soltanto *una parte*

---

scambio di argomenti e parametri negli integrali Abeliani di 3ª specie. Jacobi (Journ. de Crelle, t. 32) diede alla dimostrazione di Abel forma più chiara, e ulteriori miglioramenti vi introdusse più tardi Frobenius (ibid. t. LXXVIII), mentre poco prima Fuchs (ibid. t. LXXVI) aveva proseguite le ricerche su quegli stessi integrali (giovandosi dei nuovi risultati che da Abel in poi si erano ottenuti nella teoria delle funzioni). E lo stesso Fuchs si occupò anche (ibid. t. LXXXIX, e Berl Ber., dic. 1892) delle funzioni in certo qual modo *inverse* di questi integrali (e definite precisamente in modo analogo alle funzioni Abeliane).

(1) Varietà che dovrà essere trasformata in sè stessa da tutte le collineazioni contenute nel gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta, perchè appunto le y_i, pur sostituendosi linearmente in modo corrispondente, devono sempre soddisfare alle equazioni algebriche date. La questione si collega quindi intimamente collo studio delle *Varietà algebriche di uno spazio qualunque, che ammettono un dato gruppo di trasformazioni projettive*. — Il gruppo di *tutte* le trasformazioni projettive (o sostituzioni lineari) che mutano in sè stessa la varietà algebrica in discorso dovrà contenere come sottogruppo il *Gruppo di razionalità* (*Rationalitätsgruppe*, secondo F. Klein) considerato dai sigg. Picard e Vessiot (Ann. de Toulouse, 1887; Ann. de l'Ec. Norm., 1892), oppure coinciderà addirittura con esso.

(2) Non è però esatto, come più o meno tacitamente supposero i diversi Analisti che di tale questione si occuparono, che questo caso si presenti sempre e solo quando le equazioni date sieno in numero di $n-2$ (n essendo l'ordine dell'equazione differenziale). Infatti $n-2$ equazioni algebriche (distinte) fra le coordinate di un punto variabile in uno spazio S_{n-1} potrebbero benissimo non definire una curva, ma solo una varietà due o più volte infinita, mentre d'altra parte vi sono anche curve dello spazio S_{n-1} che non si possono rappresentare col detto numero di equazioni (ma solo con un numero maggiore).

di quest'ultima curva; ma anche allora sarebbe egualmente curva algebrica, perchè analiticamente separabile dalla curva complessiva, che è appunto algebrica (e sarebbe in tal caso *riduttibile*).

« Noi ci occuperemo precisamente di quest'ultimo caso (del caso cioè in cui la curva Γ è algebrica). Per questo caso, le ricerche del sig. Fuchs sulle equazioni differenziali di 3° ordine furono estese, seguendo lo stesso suo metodo, da Ludwig Schlesinger (Diss. Berlin, 1887) alle equazioni di 4° ordine (1), mentre altri ancora hanno trattata la stessa questione servendosi degli *invarianti differenziali*, che, dopo gli ultimi risultati ottenuti da Forsyth (Phil. Trans., vol. CLXXIX) e Brioschi (Acta Math., vol. XIV) si sono dimostrati (più ancora di prima) ottimo strumento di ricerca. In particolare, Lipm. Schlesinger (Diss. Berlin, 1888) ha trattato nuovamente il caso delle equazioni differenziali di 3° ordine; M. Meyer (Diss. Berlin, 1893), quello delle equazioni di 4° ordine; e infine Wallenberg (Journ. de Crelle, t. CXIII) ha estesa la ricerca a equazioni differenziali di ordine qualunque (2).

« 3. In queste ricerche è però opportuno introdurre qualche particolare ipotesi sui coefficienti dell'equazione differenziale proposta e sul comportamento dei diversi integrali nei relativi *punti singolari*. Così p. e. nei lavori di Fuchs e dei suoi scolari si suppone quasi sempre di aver a che fare con equazioni di quella categoria, che lo stesso Fuchs ha caratterizzata nella sua Memoria prima sulle equazioni differenziali lineari (Journ. de Crelle; t. LXVI, p. 146, eq. (12)), e che da lui ha anzi preso il nome (*Fuchs'sche Klasse*). In particolare, queste equazioni hanno tutte i coefficienti *razionali* (3). E spesso si aggiunge anche l'ipotesi che siano razionali le radici di quelle equazioni relative ai diversi punti singolari, che Fuchs ha chiamate (Journ. de Crelle, t. LXVIII, p. 367) *determinirende Fundamentalgleichungen* (e che danno

(1) Ludw. Schlesinger si è occupato però anche (fino a un certo punto) del caso in cui fra i *quattro* integrali y_i è data *una sola* equazione.

(2) Anche i Francesi si sono occupati di queste ricerche, almeno in qualche caso particolare (nel caso, soprattutto, in cui sono date fra le y_i equazioni di 2° grado); cfr. ad es. Goursat: Compt. Rend., t. XCVII, p. 31, e Bull. Soc. Math., t. XI (o anche Compt. Rend., t. C, p. 233, dove è studiato il caso di una curva tracciata sulla sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba); e così pure Halphen: Compt. Rend., t. CI. Halphen ha anche supposto, più generalmente, che un'espressione algebrica, intera, omogenea $f(y_1\ y_2, \dots y_n)$ sia data solo come *funzione razionale della variabile* x, domandandosi qual partito si può trarre da una *data* equazione così fatta per l'integrazione dell'equazione differenziale proposta (cfr. la Mem. di lui nel Journ. de Liouville, s. 4ª, t. I; e anche: Brioschi, Ann. di Mat., s. 2ª, vol. XIII).

(3) E i loro integrali si comportano *regolarmente* nei punti singolari. Il caso in cui non tutti gli integrali hanno comportamento regolare in questi punti fu però studiato in particolare da Thomé (cfr. diverse Mem. nel Journ. de Crelle, t. LXXIV-XCV, riassunte nel t. XCVI).

gli esponenti a cui *appartengono* gli integrali fondamentali delle corrispondenti sostituzioni lineari) (1).

« Wallenberg suppone invece, da principio almeno, che l'equazione differenziale proposta abbia per coefficienti funzioni *algebriche* della x. Ma più tardi ricade egli pure nella *Fuchs'sche Klasse.*

« *Noi supporremo pure che i coefficienti* A_1, A_2, ... *siano funzioni algebriche della variabile indipendente* x; ma preciseremo meglio la nostra ipotesi, intendendo che tutte queste funzioni appartengano a una stessa *Classe* nel senso di *Riemann*, siano cioè tutte *razionali sopra una stessa superficie di Riemann;* o, in altri termini, siano *funzioni razionali di uno stesso ente algebrico di genere qualunque* (2). Se in particolare questo genere è nullo, avremo il caso dei coefficienti razionali nel senso ordinario.

« In quest'ipotesi, il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta avrà per operazioni *generatrici* le sostituzioni lineari delle y_i che corrispondono: 1° ai giri intorno ai diversi punti singolari; 2° a quei certi cammini chiusi, fra loro irriducibili, che si possono tracciare sulla data superficie di Riemann *senza spezzarla* (che non si possono cioè restringere fino a ridursi a un punto solo — non singolare —, nel qual caso ad essi corrisponderebbe invece la pura sostituzione identica $y_i^{(1)} = y_i$). Questi cammini, in numero eguale al doppio del genere p della data superficie, possono ritenersi coincidenti con un sistema qualunque di $2p$ tagli, che rendano la superficie uniconnessa.

« Oltre a questo, ci converrà introdurre l'ipotesi, che nei *punti singolari* dell'equazione differenziale proposta (e non *potranno* essere che quelli in cui diventa infinito qualcuno dei coefficienti) (3) tutti gli integrali si comportino *regolarmente* (4) (diventino cioè finiti in ogni punto così fatto $x = a$, quando si moltiplichino per una potenza finita conveniente di $x - a$,— o per una potenza di $\frac{1}{x}$, se si tratta del punto $x = \infty$) (5).

« 4. Distingueremo due casi:

« *a*) La curva *Γ attachée* all'equazione differenziale proposta non ammette che un numero finito di trasformazioni projettive in sè stessa;

(1) Quegli integrali cioè che a queste sostituzioni (corrispondenti rispett. a giri intorno ai diversi punti singolari) fanno assumere forma canonica.

(2) Denominazione dovuta al Weierstrass (lezioni sulle funzioni Abeliane). Cfr. anche C. Segre, *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ann. di Mat.; s. 2ª, vol. XXII, p. 71). — Possiamo anche dire, in un modo un po' diverso, studieremo *equazioni differenziali lineari sopra un dato ente algebrico.*

(3) Anzi, se $p > 0$, potrebbe anche darsi che l'equazione proposta non avesse affatto punti singolari.

(4) Cfr. le Mem. cit. di Fuchs, o anche Thomé: Journ. de Crelle, t. LXXV, p. 266.

(5) Con questo però non si esclude la presenza di termini *logaritmici* in qualcuna delle y_i fondamentali per una qualsiasi sostituzione del gruppo monodromico.

« *b*) La stessa curva ammette invece un numero infinito di tali trasformazioni.

« Il caso *a*) lo divideremo ancora in due:

« 1) Il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta è *finito* (non contiene cioè che un numero finito di operazioni);

« 2) Il gruppo monodromico anzidetto comprende un numero infinito di operazioni. Queste non potranno però dar luogo che a un numero finito di collineazioni nello spazio S_{n-1}; sicchè le y_i saranno bensì funzioni a infiniti valori, ma a questi non corrisponderà che un certo numero finito di valori dei loro mutui rapporti.

« Nel caso 1) le y_i sono funzioni che sulla data superficie di Riemann hanno comportamento ovunque regolare, e non possono assumere in un punto qualsiasi di questa che un certo numero finito k di valori distinti (1). Sono dunque funzioni *algebriche*, per quanto in generale non risultino funzioni razionali dello stesso ente algebrico primitivo (ma bensì di un nuovo ente, che si potrà mettere in corrispondenza (k, 1) col primo). In ogni modo, « *l'equazione proposta è integrabile algebricamente* » (2).

« Nel caso 2) si conclude in modo perfettamente analogo che le y_i devono essere ancora funzioni algebriche della variabile x, *a meno di uno stesso fattore*, che, sulla superficie di Riemann sulla quale le y_i risultano razionali, dovrà essere puramente *moltiplicativo*, e sarà quindi la funzione esponenziale di un integrale Abeliano. E anche analiticamente si giunge subito a quest'ultimo risultato, perchè, dovendo l'equazione proposta con una sostituzione $y = \varphi(x) . v$ trasformarsi in altra integrabile algebricamente, e quindi anche a coefficienti algebrici, ne viene di conseguenza che dovrà essere in particolare funzione algebrica il nuovo secondo coefficiente:

$$B_1 = n\frac{\varphi'}{\varphi} + A_1$$

(1) Resta dunque esclusa senz'altro, per questo caso, la presenza dei termini logaritmici di cui alla nota prec.

(2) Non sarà forse inutile ricordare a questo punto il legame intimo che passa fra le equazioni differenziali lineari di ordine n integrabili algebricamente, e *i gruppi discontinui finiti di sostituzioni lineari di n variabili;* e come (cfr. ad es.: Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie*, II; Göttingen, 1893, p. 361) « a ogni gruppo discontinuo « finito di sostituzioni lineari corrisponda tutta una categoria di equazioni differenziali « lineari integrabli algebricamente ». Per lo studio di questi gruppi discontinui sono d'importanza capitale le ricerche di C. Jordan (Journ. de Crelle, t. LXXXIV, e Atti dell'Acc. di Napoli, vol. VIII, 1879-80), grazie alle quali è ormai esaurito anche il caso di *tre* variabili (mentre quello di *due* sole variabili, che era già noto precedentemente, conduce ai gruppi dei *corpi regolari*).

e quindi:

$$\varphi = e^{\frac{1}{n}\int(B_1 - A_1)dx}$$

« Del caso *b*), che dà luogo a considerazioni geometriche interessanti (per quanto semplicissime) sulle curve razionali di uno spazio qualunque, mi riservo occuparmi in altra Nota ».