Gino Fano

Sopra certe curve razionali in uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie V, Vol. **41** (1895), p. 51–57

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1895_7>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1895.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. In questa Nota mi propongo di trattare il caso indicato con *b*) al n. 4 della mia Nota precedente: *Sopra alcune considerazioni geometriche* ..... (¹); il caso cioè, in cui la curva Γ quivi considerata ammette infinite trasformazioni projettive in sè stessa. Non potrà dunque questa curva essere di genere superiore a *uno*; e anzi nemmeno di genere *uno*, perchè fra le ∞^1 trasformazioni birazionali che mutano in sè stessa una data curva ellittica non vi può essere che un numero finito di trasformazioni projettive (dello spazio cui la curva appartiene) (²). Sarà dunque una curva *razionale*.

« Se la curva Γ è *normale* (quindi di ordine $n-1$) si potranno sempre scegliere le coordinate (ossia gli integrali indipendenti) y_i in modo che per i punti di detta curva (considerate cioè le y_i come funzioni della x) si annullino identicamente i determinanti della matrice:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_n \end{vmatrix}$$

(¹) Cfr. questi Rendiconti, p. 18.

(²) Cfr. ad es., per le curve *normali*, la Mem. del sig. Segre nei Math. Ann. XXVII, p. 297; oppure la Nota del sig. Klein nelle Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss.; Bd. 13, 1885; o anche: Klein-Fricke, *Theorie der elliptischen Modulfunctionen;* vol. II, p. 242. E per una curva non normale, basta osservare che ogni projettività su di essa deve esser *contenuta* in una projettività sulla curva normale qualsiasi, di cui si considera la prima come projezione.

« E queste y_i si potranno esprimere sotto la forma:

$$y_1 = z_1^{n-1}\,;\; y_2 = z_1^{n-2} z_2\,;\; y_3 = z_1^{n-3} z_2^2\,;\; \ldots\ldots\; y_n = z_2^{n-1}\,;$$

dal che segue che l'equazione differenziale proposta ha la proprietà notevolissima di ammettere come soluzioni le potenze $(n-1)^{\text{sime}}$ di tutti gli integrali dell'equazione differenziale lineare di 2° ordine, alla quale soddisfanno z_1 e z_2 (e quindi tutte le funzioni $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, dove λ_1 e λ_2 sono costanti arbitrarie). Questa nuova equazione differenziale ha pure coefficienti algebrici, che sono funzioni razionali sulla data superficie di Riemann, e si possono facilmente calcolare. L'integrazione dell'equazione proposta è quindi ricondotta a quella di quest'ultima equazione (e corrispondentemente, com' è noto, di un'equazione differenziale di 3° ordine contenente il *parametro differenziale* di Schwarz, oppure di un'*equazione di Riccati*). Ma l'integrazione di queste stesse equazioni non si può in generale ricondurre a un problema inferiore (1).

« 2. Per trattare il caso in cui la curva Γ è razionale, ma di un ordine $m \geq n$, normale quindi per uno spazio S_m superiore a S_{n-1}, bisogna premettere qualche osservazione sulle possibili trasformazioni projettive di una tal curva in sè stessa. Già è noto (cfr. ad es. Loria: Giorn. di Battaglini, vol. XXVI) che le ∞^3 collineazioni di uno spazio S_m, che trasformano in sè stessa una data curva razionale normale di questo spazio, non hanno che ∞^2 diverse piramidi fondamentali, ciascuna delle quali è tale per ∞^1 di quelle collineazioni. E sempre *due* vertici della piramide stanno sulla curva in discorso (e sono i punti uniti della projettività *sopra* questa), mentre gli altri $m-1$ sono dati dalle intersezioni degli S_k osculatori alla curva in uno di quei due punti $(k = 1, 2, \ldots\, m-1)$ rispett. cogli S_{m-k} osculatori nell'altro (2).

« Da questo, e dal fatto notissimo che, se una curva non normale ammette una trasformazione projettiva, questa deve essere *contenuta* in altra projettività di uno spazio superiore, che trasformi in sè stessa la curva normale di cui la prima è projezione, si trae facilmente che:

« *Se una curva razionale* C^m *appartenente a uno spazio* S_k (*dove* $k < m$) *ammette una trasformazione projettiva, ne ammetterà certo* ∞^1 *aventi una*

(1) Del gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta sappiamo soltanto, in questo caso, che esso è contenuto in un certo gruppo ∞^3 di sostituzioni lineari (gruppo che è *simile* a quello delle ∞^3 trasformazioni projettive di una data variabile qualsiasi, — nel senso che le operazioni dei due gruppi si corrispondono biunivocamente —). Perchè l'integrazione dell'equazione differenziale lineare di 2° ordine a cui siamo giunti possa ricondursi a un problema inferiore (di quadrature cioè, funzioni esponenziali, od operazioni algebriche) è necessario (e sufficiente) che il gruppo monodromico sia contenuto in un sottogruppo (algebrico) del gruppo ∞^3 considerato di sopra.

(2) Se però i due primi punti doppi (sulla curva) coincidono, anche gli altri $m-1$ coincideranno con questi. La projettività nello spazio S_m non avrà allora che un solo punto unito, e, di più, una retta, un piano, ... un S_{m-1} uniti e passanti tutti per questo punto. È questo però il solo caso in cui quelle collineazioni non hanno $m+1$ punti doppi distinti.

stessa piramide fondamentale, e sarà projezione di una C^m *normale da un* S_{m-k-1} *appartenente a una delle* ∞^2 *piramidi di* S_m, *che sono fondamentali per le trasformazioni projettive di quest'ultima curva* (1).

« Queste collineazioni dello spazio S_k hanno i loro $k+1$ punti doppî tutti distinti (2), e possono essere le sole che mutino in sè stessa la curva (projezione) C^m. Ma vi è anche un caso in cui questo gruppo ∞^1 di collineazioni ammette un'opportuna estensione (*Erweiterung*); ed è il caso in cui l'S_{m-k-1}, da cui si è projettata la curva normale di S_m ($m \geq 4$), ha una posizione, per così dire, *simmetrica* rispetto ai punti uniti su detta curva, che sono comuni alle ∞^1 projettività di S_m, per le quali quello stesso S_{m-k-1} è spazio unito (3). — Allora la curva ottenuta come projezione è trasformata in sè stessa da infinite altre projettività, che non formano di per sè un gruppo, ma ne formano bensì uno (misto) assieme alle precedenti. *Sulla curva*, sono queste le ∞^1 involuzioni, nelle quali gli stessi due punti uniti di prima si corrispondono in doppio modo (4).

« 3. Ritornando ora alla considerazione della curva Γ *attachée* all'equazione differenziale proposta, il risultato testè ottenuto ci mostra che, se detta curva è razionale e non normale (e ammette solo quel primo gruppo ∞^1 di trasformazioni projettive cogli stessi punti uniti), *le operazioni generatrici del gruppo monodromico dell'equazione differenziale avranno tutte le stesse soluzioni fondamentali*, ossia *tutte le sostituzioni lineari del gruppo dovranno ridursi a forma canonica colle stesse* y. E poichè si tratta di collineazioni aventi i loro punti doppî essenzialmente distinti, queste y saranno sulla data

(1) Queste curve razionali rientrano dunque nelle *curve* W studiate dai sigg. Klein e Lie (Compt. Rend., 1870; Math. Ann., IV); e sono anzi, assieme alle corrispondenti curve normali, le sole W algebriche. — Avremmo anche potuto prender le mosse direttamente da queste *curve* W, e domandarci quali fra esse sono algebriche; ma abbiamo preferito ricorrere alle considerazioni esposte di sopra, perchè di queste dovremo anche valerci più avanti. — È chiaro che le curve razionali e non normali, le quali ammettono infinite trasformazioni projettive in sè stesse, dovranno avere determinate singolarità (una cuspide, oppure determinati spazî iperosculatori). Così ad es. la cubica piana razionale deve avere una cuspide, e la quartica sghemba anche una cuspide, oppure due tangenti stazionarie (cfr. ad es. Klein-Lie, l. c.; o anche: Cremona, Rend. Ist. Lomb., 1868; Bertini, ibid., 1872; Cayley, Quart. Journ. of Mathem., VII; ecc.)

(2) Così avviene infatti per le collineazioni da noi considerate nello spazio S_m, a meno che due, e quindi tutti i punti doppî non coincidano *sulla curva*. E in questo caso la projezione fatta dall'unico punto o da uno degli spazî uniti sarebbe ancora una curva normale, di ordine inferiore.

(3) Vale a dire, se esso contiene l'intersezione dell'S_k osculatore alla curva in uno di quei due punti coll'S_{m-k} osculatore nell'altro, contenga sempre anche l'intersezione dell'S_{m-k} osculatore nel primo coll'S_k osculatore nel secondo.

(4) Il prodotto di due qualunque fra queste involuzioni è infatti una projettività, in generale non involutoria, avente quei certi due punti come punti uniti.

superficie di Riemann funzioni puramente *moltiplicative*, quindi *funzioni esponenziali di integrali Abeliani relativi a questa stessa superficie* (1).

« Questi integrali non potranno avere però che infiniti logaritmici; perchè, se avessero dei *poli*, questi sarebbero per le y punti singolari *essenziali* (cesserebbe cioè quivi il comportamento *regolare*) (2). L'integrale generale avrà la forma:

$$y = \lambda_1 e^{\Sigma_1} + \lambda_2 e^{\Sigma_2} + \cdots + \lambda_n e^{\Sigma_n}$$

dove le λ sono costanti arbitrarie, e le Σ integrali Abeliani della data superficie. L'equazione proposta è dunque integrabile per *quadrature* (3).

« Indichiamo ora con $(m \geq n)$ l'ordine della curva Γ, e assumiamo le stesse y_i moltiplicative come coordinate nello spazio S_{n-1}; assumiamo cioè come punti di riferimento gli stessi punti uniti comuni alle ∞^1 collineazioni che mutano Γ in sè stessa. E siano precisamente (1) e (2) — quei punti cioè per cui y_1 o rispettivamente y_2 sono diversi da zero — i due punti fondamentali che stanno su questa curva. La projezione di Γ su di un piano coordinato qualsiasi (1) (2) (h) $(h = 3, 4, \ldots n)$ dall'S_{n-4} fondamentale rispettivamente opposto avrà un'equazione del tipo:

$$y_1^{m-r} y_2^r = y_h^m, \qquad [1]$$

dove r, al variare di h, assume successivamente $n - 2$ valori distinti nella serie $1, 2, \ldots m - 1$ (4). Segue da ciò che posto $y_1 = e^{\Sigma_1}$ e $y_2 = e^{\Sigma_2}$, si può assumere, per $3 \leq h \leq n$:

$$y_h = e^{\frac{m-r}{m}\Sigma_1 + \frac{r}{m}\Sigma_2}$$

ossia $y_h = e^{\alpha_h \Sigma_1 + \beta_h \Sigma_2}$, dove α_h e β_h sono numeri razionali aventi per somma l'unità, e le differenze $\alpha_h - \beta_h$ sono tutte diverse fra loro. E possiamo anche estendere quest'espressione ai valori $h = 1$ e $h = 2$, ritenendo $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$. E se infine trasformiamo l'equazione differenziale proposta, ponendo:

$$z = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{2}(x) \qquad y = e^{\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}(x)} . v ;$$

(1) Il gruppo monodromico dell'equazione differenziale sarà in questo caso un gruppo *Abeliano*, vale a dire le operazioni in esso contenute saranno a due a due *permutabili*.

(2) L'ipotesi del *comportamento regolare*, di cui abbiamo fatto uso al n.° 4 della Nota prec., non risulterebbe però necessaria in questa 2ª Nota (tranne che nelle ultime considerazioni del n.° 5).

(3) — e funzioni esponenziali —, le quadrature essendo però da eseguirsi su funzioni *razionali* (nel campo di razionalità prescelto).

(4) Facciamo astrazione dalla costante, che dovrebbe comparire come fattore al 1° o 2° membro, ritenendola inglobata nella y_h. Le y_h non erano infatti determinate finora che a meno di un fattore costante; e adesso ancora, date y_1 e y_2, le rimanenti non lo sono che a meno di una radice m^{sima} dell'unità. La determinazione completa è però implicita nelle equazioni successive. — Sono queste appunto le equazioni a due termini (*zweigliedrig*) di cui fa cenno Wallenberg (l. c., p. 22 e seg.).

e indichiamo con v_h il nuovo integrale corrispondente a y_h, avremo evidentemente:

$$v_h = e^{(\alpha_h - \beta_h) z}$$

« La nuova equazione differenziale fra v e z ha dunque *coefficienti costanti*, e la sua equazione caratteristica ha le radici tutte razionali e fra loro distinte.

« 4. Il caso particolare accennato alla fine del n. 2 si presenta quando gli $n-2$ valori assunti da r nelle equazioni [1] — che sussistono, naturalmente, anche in questo caso — sono, benchè in altro ordine, gli stessi assunti da $m-r$. Allora accanto ad ogni equazione:

$$y_1^{m-r} y_2^r = y_h^m$$

ne dovrà sussistere un'altra:

$$y_1^r y_2^{m-r} = y_{h'}^m ;$$

e a queste due potremo anche sostituire (per ogni coppia di indici h, h') le due seguenti:

$$y_1 y_2 = y_h y_{h'} \qquad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{m-2r} = \left(\frac{y_h}{y_{h'}}\right)^m . \qquad [2]$$

« Se n è numero dispari (≥ 5), dovrà essere m pari, e dovrà sussistere un'equazione:

$$y_1^{\frac{m}{2}} y_2^{\frac{m}{2}} = y_l^m \text{ (1)}.$$

« In questo caso gli integrali $y_1, y_2, \ldots . y_n$ non saranno più, in generale, moltiplicativi sulla data superficie di Riemann, ma il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta potrà contenere anche sostituzioni del tipo:

$$\begin{array}{ll} y'_1 = \text{Cost.} \times y_2 \ \ldots \ y'_h = \text{Cost.} \times y_{h'} \ \ldots & \\ & (y'_l = \text{Cost.} \times y_l) \\ y'_2 = \text{Cost.} \times y_1 \ \ldots \ y'_{h'} = \text{Cost.} \times y_h \ \ldots & \end{array}$$

le quali però, applicate una seconda volta, ridànno le stesse funzioni primitive, a meno di fattori costanti. E da questo si trae che le y_i sono ancora funzioni moltiplicative, quindi esponenziali di integrali Abeliani, ma, in generale, *su di un'altra superficie di Riemann, in corrispondenza* (2, 1) *colla superficie data.* Si può ripetere perciò tutto il ragionamento del n.° prec., concludendo ancora che l'equazione differenziale proposta deve essere trasfor-

(1) L'S_{m-k-1}, da cui si è projettata la curva normale di S_m, non passerà allora per nessun punto in cui s'incontrino due $S_{\frac{m}{2}}$ osculatori a questa curva. E la y_l si potrà determinare in modo che sia $y_l^2 = y_1 y_2$, sicchè la curva Γ risulta contenuta in un cono quadrico di $(n-3)^{\text{sima}}$ specie (avente cioè per *asse* uno spazio S_{n-4}). — Per $n = 3$ la curva Γ si ridurrebbe essa stessa — in questo caso — a una conica multipla.

mabile in altra a coefficienti costanti, e integrabile essa stessa per quadrature (più un'estrazione di radice); anzi le differenze $\alpha_h - \beta_h$ sono in questo caso a due a due eguali ed opposte, sicchè l'equazione caratteristica mancherà dei termini di posto pari. Due qualunque v_h e $v_{h'}$ fra loro corrispondenti differiranno soltanto nel segno dell'esponente (saranno cioè fra loro reciproche), e la derivata $\frac{dz}{dx}$ sarà essa stessa la radice quadrata di una funzione razionale sulla superficie di Riemann data [1]. — Di più, le stesse v_h e $v_{h'}$, considerate come funzioni di x, soddisferanno a un'equazione differenziale lineare di 2° ordine, i cui coefficienti sono anche funzioni razionali sulla superficie data [2].

« Concludiamo perciò che l'equazione differenziale proposta (cfr. la Nota prec. cit.), nelle ipotesi da noi introdotte, deve sempre presentare uno di questi tre casi:

« 1.° *L'equazione è integrabile algebricamente, a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni (il cui logaritmo si potrà determinare con una quadratura)*;

« 2.° *L'equazione è riducibile ad altra dello stesso ordine con coefficienti costanti, ed è allora integrabile per quadrature e funzioni esponenziali (più, forse, un'estrazione di radice quadrata)*;

« 3.° *L'equazione è riducibile ad altra, pure lineare, di 2° ordine (o ad una delle forme equivalenti)* [3].

« 5. Aggiungerò ancora poche osservazioni sul caso trattato nei n.i 2 e seg. di questa Nota.

« Ammesso che le *determinirende Fundamentalgleichungen* di Fuchs relative a tutte le operazioni generatrici del gruppo monodromico abbiano radici *razionali* (e non occorre aggiungere « *fra loro diverse* [4] », essendo noi già sicuri, per ragioni *geometriche*, di poter ridurre ogni sostituzione lineare

(1) Da quest'estrazione di radice proviene appunto la nuova irrazionalità, che ci obbliga a passare su di un'altra superficie. — Anche Wallenberg trova per questo caso (l. c., p. 37): $\psi'(x) = \frac{dz}{dx} = \sqrt{R(x)}$.

(2) Anche y_h e $y_{h'}$ dovranno soddisfare a una corrispondente equazione differenziale di 2° ordine a coefficienti algebrici, ma non più razionali (in generale) sulla data superficie.

(3) Se l'equazione proposta non è dunque integrabile algebricamente, lo è per quadrature, oppure si riduce a un'equazione di Riccati — il problema d'integrazione di grado immediatamente superiore —. Quadrature e equazione di Riccati si presentano — fatta eccezione per la sola quadratura del caso a,2) — quando la curva Γ ammette infinite trasformazioni projettive, e rientra perciò nelle *curve* W di Klein-Lie. Si può verificare passo per passo come *a un maggior numero di proiettività trasformanti in sè stessa la curva* Γ, *corrisponde sempre un problema di integrazione più complicato.*

(4) Tali anzi, che la differenza fra due radici qualunque di una stessa equazione sia un numero *non* intero (zero incluso).

del gruppo a forma canonica generale) gli integrali $y_1, y_2, \dots y_n$ potranno differire da funzioni algebriche della x — e precisamente da radici di funzioni razionali sulla superficie di Riemann data (o su quell'altra, in corrispondenza (2, 1) con questa) — solo per fattori che su questa stessa superficie non diventano mai nulli nè infiniti, e saranno perciò funzioni esponenziali di integrali Abeliani di 1ª specie (1).

« Se introduciamo perciò anche l'ipotesi che l'equazione differenziale proposta abbia coefficienti razionali (e appartenga quindi alla classe *Fuchsiana*), gli integrali stessi $y_1, \dots y_n$ saranno *radici di funzioni razionali della* x, qualora non si presenti il caso svolto al n. 4. Che se invece questo caso si presenta, saranno *funzioni esponenziali di integrali iperellittici*, e non saranno quindi, in generale, funzioni algebriche (2). Wallenberg esclude questo caso nell'ultimo enunciato della sua Memoria, introducendo l'ipotesi che l'equazione differenziale lineare proposta sia *irriduttibile* (3), sicchè allora il caso in cui la curva Γ è razionale e normale (di ordine $n-1$) si presenta come sola eccezione all'integrabilità algebrica dell'equazione stessa (a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni); ed è questo anche il risultato a cui è giunto Ludw. Schlesinger nel caso particolare $n = 4$ » (4).

(1) In particolare, se le y_i sono esse stesse funzioni algebriche di x, saranno certo radici di funzioni razionali sull'una o rispettivamente sull'altra superficie.

(2) Nell'esempio cui ricorre Wallenberg (l. c., p. 39), per mostrare che le y possano essere funzioni *non* algebriche di x, compaiono precisamente funzioni esponenziali di integrali ellittici di prima specie. E le equazioni ch'egli trova dover sussistere fra le diverse y sono precisamente le nostre [2]. Non compare invece nella nostra ricerca il caso degli integrali *ultraellittici* (l. c., p. 33 e seg.) — dipendenti cioè dalla radice di indice superiore a 2 di una funzione razionale —, perchè la curva Γ non sarebbe allora algebrica.

(3) Se però, fra le tante definizioni che già furon date di equazione differenziale lineare irriduttibile (Frobenius, Kœnisberger, ...) noi ci fissiamo su quella che fu proposta (e sviluppata) recentemente dal sig. Beke per le equazioni a coefficienti razionali (Math. Ann.; Bd. 45, p. 279 e seg.), e che si potrebbe estendere (in modo ovvio) alle equazioni con coefficienti *razionali sopra una data superficie di Riemann qualsiasi*, risulterebbe ancora riduttibile l'equazione differenziale fra v e x, ma non quella fra y e x.

(4) Cfr. la Diss. cit., p. 38. Il nome *Gebilde zweiter Stufe* non è di facile interpretazione; ma si capisce che l'autore accenna al caso in cui le equazioni algebriche date fra $y_1, \dots y_4$ definiscono una *curva*. Il caso indicato con (D) — cfr. p. 15 — è quello delle equazioni:

$$\begin{cases} y_2^2 - y_1 y_3 = 0 \\ y_3^2 - y_2 y_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

che rappresentano appunto, come ognun vede, una cubica sghemba.