Gino Fano

Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive in sé

Atti Ist. Veneto Scienze, Lettere, Arti, Serie VII, Vol. **7** (1895-96), p. 1069–1103

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1895_11>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE

DELLO

SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

CON UN GRUPPO CONTINUO INTEGRABILE

DI TRASFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ

NOTA

DI

GINO FANO

(*Presentata dal m. e. G. Veronese*)

---

1. In un lavoro pubblicato recentemente nelle Memorie dell'Accademia di Torino (ser. 2.ª t. XLVI) mi sono occupato di alcune questioni generali sulle varietà algebriche di uno spazio qualunque, che ammettono un gruppo continuo *non integrabile* di trasformazioni proiettive in sè; e ho determinate in particolare, fra queste varietà, tutte quelle contenute in uno spazio a quattro dimensioni. La ricerca delle varietà con un gruppo continuo *integrabile* di trasformazioni proiettive in sè ha forse un' importanza minore, ma conduce egualmente ad alcune varietà interessanti, se non altro, dal lato geometrico. Io mi propongo quindi di esporre in questa Nota quella parte delle mie ricerche in proposito che può presentare maggior interesse, e precisamente di determinare *le varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni che ammettono un gruppo integrabile transitivo e almeno ∞^4 di trasformazioni proiettive in sè.* Queste varietà sono in certo qual modo le analoghe delle *superficie* dello spazio ordinario con un gruppo (almeno) ∞^3 di trasformazioni proiettive in sè (*piano, coni, qua-*

drica, *rigata di Cayley*, e infine la sviluppabile circoscritta a una cubica sghemba, per la quale tuttavia il gruppo ∞^3 non è più integrabile). — Dicendo brevemente *Varietà* intenderemo sempre trattarsi di una varietà ∞^3 di punti (M_3) dello spazio S_4 (e *superficie* saranno, come sempre, la varietà ∞^2 di punti). Nella determinazione delle varietà con un gruppo ∞^4 di trasformazioni proiettive in sè è implicita anche quella delle superficie che ammettono un egual gruppo di trasformazioni proiettive, corrispondendo queste ultime per dualità alle varietà con soli ∞^2 spazi S_3 tangenti (toccate da ogni loro spazio tangente lungo un' intera retta). In particolare, alle varietà luoghi di ∞^1 piani (considerate come inviluppi di spazi S_3) corrispondono per dualità superficie rigate (e anzi superficie sviluppabili, quando quelle varietà siano inviluppi di una sola ∞^1 di spazi S_3, ma se ne considerino come spazi tangenti tutti quelli che passano per uno qualunque dei loro ∞^1 piani).

Dalle nostre considerazioni escludiamo fin d'ora lo spazio S_3 (come particolare varietà M_3) e, più generalmente, tutti i coni, i quali ultimi ammettono sempre un certo gruppo di trasformazioni *omologiche*, e a volte anche di *omografie rigate*, più, eventualmente, altre trasformazioni. Nei nostri gruppi proiettivi di S_4 non dovrà entrare pertanto nessun sottogruppo continuo (nemmeno ∞^1) costituito da sole omologie (per il quale si abbia cioè tutto un S_3 di punti uniti).

2. Da un teorema generale dovuto al sig. Lie (1) segue che, nello spazio S_4, ogni gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive ammette almeno un punto unito fisso, una retta unita per questo punto, un piano unito per questa retta, un S_3 unito per questo piano. Vi è dunque

(1) *Theorie der Transformationsgruppen;* vol. I, pagina 589; vol. III, p. 681.

un fascio di S_3 unito rispetto all' intero gruppo; e in questo fascio è pure unito (fisso) almeno uno spazio S_3. Un S_3 generico di questo fascio sarà a sua volta unito per tutte le operazioni di un sottogruppo dipendente da un parametro di meno del gruppo complessivo; epperò, se quest' ultimo gruppo è almeno ∞^4, e trasforma in sè una certa varietà M_3, che si suppone non essere un cono, quell' S_3 generico dovrà incontrare questa varietà (all'infuori del piano base del fascio, che potrebbe anche appartenere ad essa) secondo *una superficie* (*dello spazio ordinario*) *con un gruppo integrabile almeno* ∞^3 *di trasformazioni proiettive in sè.* Questa superficie sarà quindi un *piano*, un *cono*, una *quadrica*, o una *rigata di Cayley* (1), senza escludere tuttavia che la stessa sezione determinata da quell' S_3 generico possa anche comporsi di un certo numero (>1) di piani, coni, o quadriche. Vedremo anzi in seguito alcuni casi in cui ciò effettivamente avviene (2).

Cominciamo dal caso in cui tale sezione è un piano; caso che esauriremo in poche parole. Possiamo anzi supporre, più generalmente, che la nostra varietà M_3 sia soltanto *una serie* ∞^1 *di piani*, sicchè su questo caso si potrà poi sorvolare ogni qual volta ci si presenterà nuovamente in seguito.

(1) Lie: op. cit., vol. III, p. 196; Enriques, Atti Ist. Ven., s. IV, t. 5° e 6°.

(2) Fra le diverse varietà che ci si presenteranno ne troveremo anche una con un gruppo integrabile non solo ∞^4, ma ∞^5 di trasformazioni proiettive in sè. Non potrebbe però presentarsi il caso di una varietà con un gruppo integrabile ancora più ampio (e quindi almeno ∞^6) di trasformazioni proiettive, a meno che non si trattasse di una quadrica (M_3^2) o di un cono dello spazio S_4. Infatti un tal gruppo ammetterebbe almeno una retta unita fissa, e un S_3 generico passante per questa retta dovrebbe incontrare quella varietà secondo una superficie con almeno ∞^4 trasformazioni proiettive in sè. Se questa superficie si spezza in piani per la retta fissa, si ha un cono di 2ª specie; se è una quadrica o un cono quadrico, si ha una M_3^2; se è un cono di ordine superiore al secondo, si vede facilmente che di questo cono deve esser fisso il vertice, e si ha quindi anche un cono (a tre dimensioni) in S_4.

3. Un gruppo *integrabile* il quale trasformi in sè una serie ∞^1 di piani, non potrà subordinare in questa serie che (al più) ∞^2 trasformazioni diverse. Trattandosi dunque di un gruppo almeno ∞^4, vi sarà certo un sottogruppo almeno ∞^2 per il quale sarà unito *ogni* piano della serie; quindi, in ciascun piano, tutti i singoli punti in cui questo stesso piano incontra i rimanenti. Questi punti formeranno perciò, in ciascun piano, una retta; e in tutto avremo così ∞^1 rette, che dovranno incontrarsi a due a due, senza però passare tutte per uno stesso punto; esse staranno perciò in un piano. Dunque:

Gli ∞^1 *piani della nostra varietà* M_3 *devono tutti incontrare secondo rette uno stesso piano direttore* (1).

Se il gruppo proposto G subordina nella serie ∞^1 di piani un gruppo soltanto ∞^1, esso dovrà contenere un sottogruppo almeno ∞^3 (G′) per il quale sarà unito ogni piano della serie; e questo sottogruppo subordinerà in ciascuno di questi piani il gruppo ∞^3 delle omologie aventi per asse l'intersezione del piano stesso col piano direttore. Un'operazione generica di G′ avrà dunque quest'ultimo piano come luogo di punti uniti, e ammetterà ancora, fuori di esso, altri ∞^1 punti uniti, luogo dei quali sarà una retta *direttrice* della M_3 (come serie ∞^1 di piani). Di queste direttrici ne avremo in tutto ∞^2, e ne passerà una per ogni punto della M_3; di qui segue che l'intersezione residua della M_3 stessa con un S_3 generico passante per uno qualunque dei suoi piani generatori sarà una rigata con ∞^1 direttrici rettilinee, dunque un piano, oppure una quadrica. La M_3 è dunque necessariamente un cono quadrico, oppure una varietà cubica con piano doppio; in ambo i casi essa ammette un gruppo complessivo più ampio e *non integrabile* di trasformazioni proiettive (cfr. la mia Mem. cit., n.i 24-26).

(1) Ricadiamo dunque appunto nel caso degli ∞^1 piani ottenuti come sezioni con spazi S_3 passanti per un piano fisso.

4. Supponiamo ora che il gruppo proposto G subordini nella serie dei piani della varietà M_3 ∞^2 trasformazioni diverse. Questo gruppo non potrà allora trasformare in sè nessuna involuzione nella serie stessa, epperò certamente:

1.° Un S_3 qualunque passante per il piano direttore conterrà un solo piano della serie ∞^1;

2.° Due piani diversi di questa serie incontreranno il piano direttore secondo rette distinte;

3.° Queste rette non saranno altro che le tangenti di una certa conica (perchè l'inviluppo loro deve ammettere ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, e non può essere un fascio).

E qui è opportuno trasformare la questione per dualità (in S_4). Avremo, invece della varietà M_3 con piano direttore, una rigata razionale con direttrice rettilinea, tale che da ogni punto di questa direttrice esce una sola generatrice di essa; e la serie di queste generatrici sarà proiettata univocamente da quella direttrice secondo gli ∞^1 piani di un cono quadrico di 2ª specie (1). *Si può riconoscere facilmente che questa rigata è contenuta in almeno* ∞^4 *complessi lineari di rette dello spazio* S_4; e perciò, ritenuto l'insieme delle rette di S_4 come una varietà M_6^5 di uno spazio Σ_9 (2), a questa rigata, come serie ∞^1 di rette, corrisponderà una curva di uno spazio Σ_4 contenuto in Σ_9. Questa curva dovrà ammettere ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, perchè così appunto avviene della serie delle generatrici di quella rigata; essa sarà perciò una curva razionale normale, quindi di ordine ≤ 4. Ma l'ordine di questa curva è anche (come si vede facilmente) l'ordine di quella rigata (come superficie luogo); la nostra rigata sarà dunque anch'essa d'ordine non superiore al quarto, e anzi *precisamente* di quarto

(1) Questa rigata è la superficie base di un fascio di quadriche contenente questo cono di 2ª specie come sola quadrica degenere (cfr. SEGRE: *Étude des différentes surfaces...*; Math. Ann., XXIV).

(2) Cfr. CASTELNUOVO: *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., ser. VII, t. II).

ordine, quando si escluda la rigata cubica (normale), la quale condurrebbe per dualità alla M_3^3 con piano doppio. Questa rigata quartica sarà proiezione della rigata razionale normale di S_5 con direttrice rettilinea da un punto generico del piano di questa direttrice e di una qualunque generatrice; *essa ha quindi una retta doppia, che ne è in pari tempo direttrice* (semplice) *e generatrice* (come avviene per la rigata di Cayley). Si vede anche così che questa rigata ammette precisamente ∞^4 trasformazioni proiettive in sè (perchè ∞^7 ne ammette la rigata normale di cui è proiezione, e il centro di proiezione può scegliersi in ∞^3 modi diversi fra loro equivalenti).

Rimane solo a vedere per quali ragioni la rigata da noi ottenuta (per dualità) in S_4 debba esser contenuta in ∞^4 complessi lineari di rette. Osserviamo perciò che un tale complesso in S_4 si può individuare assegnandone prima ad arbitrio il centro, e fissando poi una correlazione nulla nella *stella* Σ_3 che ha questo stesso centro (il che equivale appunto a $4+5=9$ condizioni). Data pertanto quella certa rigata, e considerato il cono quadrico (di 2ª specie) che la proietta dalla sua direttrice rettilinea, si fissi un punto generico A di questo cono come centro di un complesso lineare. Questo punto può scegliersi in ∞^3 modi; basterà dunque dimostrare che vi sono ∞^1 complessi lineari aventi A per centro e contenenti la nostra rigata. — Ora, indicato con α quel piano del cono quadrico di 2ª specie che contiene il punto A, si riferiscano proiettivamente il fascio di spazi di asse α e il fascio di rette A (α) in modo che si corrispondano sempre spazi e raggi che rispettivamente proiettano o incontrano una stessa generatrice della rigata. Con ciò è individuata, nella stella A come spazio Σ_3, una *congruenza lineare speciale*, base di un fascio di complessi lineari; questi complessi determinano altrettante correlazioni nulle nella stella A, e quindi altrettanti complessi lineari di rette di centro A in S_4, i quali tutti contengono la rigata proposta.

All'infuori della M_3^3 con piano doppio (e dei coni), abbiamo dunque in S_4 una sola varietà costituita da una serie ∞^1 di piani, la quale ammetta ∞^4 trasformazioni proiettive in sè (formanti gruppo integrabile); *essa è del 4° ordine* (1), *e contiene un piano triplo*, nel quale sono venuti a coincidere un piano direttore doppio e un piano generatore. Questa varietà è proiezione di una M_3^4 normale di S_6, la quale ultima contiene sempre una rigata quadrica direttrice; la proiezione deve farsi da una retta non incidente a quella M_3^4, ma contenuta nell' S_4 di questa quadrica e di un piano generatore qualunque.

L'equazione di questa M_3^4 di S_4 si può mettere sotto la forma

$$x_2^4 + x_1^3\ x_3 + x_1^2\ x_2\ x_4 + x_1\ x_2^2\ x_5 = 0$$

essendo $x_1 = x_2 = 0$ il piano triplo.

5. Escluso dunque d'ora in poi che la nostra M_3 sia una serie ∞^1 di piani, vi dovrà essere in S_4 un piano π unito rispetto all'intero gruppo che si considera, e tale che i vari S_3 passanti per esso incontrino quella varietà secondo *coni*, *quadriche*, o *rigate di Cayley*.

Dico anzitutto che quest'ultimo caso (rigata di Cayley) si può ricondurre al primo (coni). Ricordiamo infatti che il gruppo ∞^3 delle trasformazioni proiettive che mutano in sè una data rigata di Cayley ammette il *piano cuspidale* di questa rigata come solo piano unito fisso, e in questo stesso piano vi è pure un solo punto unito fisso (il punto cuspidale) e una sola retta unita fissa (la direttrice rettilinea). E poichè il gruppo proposto, essendo integrabile, deve ammettere nel piano unito π un punto unito fisso P e una

(1) Ai punti di questa varietà corrispondono per dualità gli S_3 passanti per una qualunque generatrice della rigata testè considerata. E di questi S_3 ve ne sono appunto *quattro* in ogni fascio (perchè quattro generatrici si devono appoggiare al piano-asse del fascio).

retta unita fissa p passante per questo punto, così si conclude facilmente che questi stessi elementi π, P e p saranno rispettivamente piano e punto cuspidale e direttrice rettilinea per ciascuna delle rigate secondo cui la varietà M_3 è segata dagli S_3 passanti per π. — Da ciascun punto della retta p esciranno quindi ∞^1 rette della nostra M_3 (una in ciascun S_3 del fascio π), e queste formeranno un certo cono. Io dico ancora:

1.° *Che ciascuno di questi coni è contenuto in uno spazio* S_3. Infatti uno qualunque di questi coni è unito per un sottogruppo almeno ∞^3 del gruppo complessivo, e quindi per un sottogruppo almeno ∞^1 saranno pure unite tutte le sue generatrici. Se il cono appartenesse dunque ad S_4, quest'ultimo sottogruppo dovrebbe comporsi di sole omologie;

2.° *Che questi spazi* S_3 *contengono tutti la retta* p. Se no, infatti, essi segherebbero il piano π secondo ∞^1 rette diverse, formanti in π stesso un inviluppo, che non sarebbe certo il fascio di centro P, ma sarebbe ugualmente unito rispetto all' intero gruppo proposto. E ciò non è possibile (sempre per le note proprietà del gruppo proiettivo ∞^3 di una rigata di Cayley);

3.° *Che questi spazi* S_3 *formano fascio intorno a un altro piano* π' (che naturalmente conterrà la retta p). Dal gruppo complessivo si può infatti estrarre un sottogruppo almeno ∞^2 per il quale siano uniti tutti gli ∞^1 coni testè considerati; quindi tutti i punti di p, e tutti gli S_3 di questi coni; quindi ancora, se tali S_3 non formassero fascio, *tutti* gli S_3 e tutti i piani passanti per p. Ma sopra ciascun cono sarebbero allora unite anche tutte le generatrici; e ciò, per tutto un gruppo ∞^2, non è certo possibile.

La nostra varietà M_3 *è dunque effettivamente incontrata dagli* S_3 *passanti per un nuovo piano* π' (che sarà pure piano unito fisso) *secondo coni*. Ricadiamo così appunto in un altro dei casi previsti come possibili.

Se invece gli spazi S_3 passanti per il piano fisso π segano la M_3 secondo quadriche (non degeneri), si vede facilmente che queste quadriche dovranno anzitutto esser *tangenti* a questo piano, e l' incontreranno perciò secondo coppie di rette. — Se una (almeno) di queste due rette è fissa, la M_3 risulta ancora costituita da una serie ∞^1 di coni e si può dimostrare, come nel caso precedente, che anche questi coni staranno negli spazi S_3 di un certo fascio. — Possiamo quindi limitarci a esaminare questi due casi:

1.° Gli spazi S_3 passanti per il piano π segano la M_3 secondo quadriche tangenti a questo piano, e che l'incontrano precisamente secondo coppie di rette tutte due variabili;

2.° Gli stessi spazi segano la M_3 secondo coni.

6. Comiciamo dal primo di questi due casi; e indichiamo con Q una qualunque di quelle ∞^1 quadriche (di S_3) tangenti a π.

Poichè queste quadriche, e quindi le rette secondo cui esse incontrano il piano π, devono essere tutte unite per un sottogruppo almeno ∞^2 del gruppo complessivo, senza che con ciò venga in π subordinata l' identità, così queste rette formeranno fascio, vale a dire *le quadriche* Q *toccheranno tutte il piano* π *in uno stesso punto* P.

Consideriamo ora un punto generico A della nostra M_3 e il relativo spazio tangente α. Il punto A starà sopra una determinata quadrica Q, e per esso passeranno due rette q, q' di questa quadrica, che staranno pure in α. Indichiamo poi con a la retta secondo cui il piano π incontra lo spazio α (o anche il piano qq'). — Nel gruppo complessivo delle proiettività che trasformano in sè stessa la nostra M_3 vi è un sottogruppo almemeno ∞^1 per cui è unito A; per questo gruppo saranno pure unite q, q', a, e anzi *ogni punto di* a, perchè nel fascio $P(\pi)$ vi è certo almeno una retta unita fissa (per il gruppo complessivo), e questa darà su a un punto unito diverso in generale da qa e $q'a$ (che sono pure uniti). — Per questo gruppo ∞^1 sono dunque unite tutte le rette del fascio $P(\pi)$, quindi tutte le quadriche Q; e, sopra ciascuna di queste quadriche, saranno pure unite le varie rette che si appoggiano ad a, due delle quali (di sistema opposto) saranno esterne a π, e determineranno, incontrandosi, un nuovo punto unito. Abbiamo dunque, sempre per quel gruppo ∞^1, all'infuori di P e dei vari punti di a, altri ∞^1 punti uniti (uno per ciascun S_3 del fascio π), luogo dei quali sarà evidentemente una nuova retta a', passante per A e contenuta nella M_3, quindi anche nello spazio tangente α. E in ogni altro punto di questa retta lo spazio tangente alla M_3 dovrà contenere le stesse rette a ed a' (1) e coinciderà quindi con α stesso.

Concludiamo perciò: *La nostra varietà* M_3 *ammette soltanto* ∞^2 *diversi spazi* S_3 *tangenti, ciascuno dei quali la tocca lungo un'intera retta.* Queste ∞^2 rette formano sulla M_3 un nuovo sistema, diverso da quello delle generatrici quadriche Q.

Ciascuno di questi ∞^2 spazi tangenti contiene dunque un determinato piano tangente di ciascuna quadrica Q. *Tali spazi costituiscono perciò l'intersezione di queste* ∞^1 *quadriche* Q *considerate come inviluppi quadrici semplicemente degeneri in* S_4. Questi inviluppi formeranno dunque una schiera, e quegli ∞^2 spazi costituiranno la varietà (inviluppo) base di questa schiera.

Alla nostra M_3 corrisponderà quindi per dualità *la superficie base di un fascio di coni quadrici (di 1ª specie),* aventi i vertici su di una retta (perchè gli spazi S_3 delle quadriche Q formano un fascio), e tangenti tutti lungo questa retta a uno stesso spazio S_3 (perchè le Q toccano il piano π in uno stesso punto). È noto (2) che una tale superficie è del 4° ordine, ha la retta luogo degli ∞^1 ver-

(1) Dovrà contenere a, perchè questa si appoggia alle due rette che escono dal punto considerato, e stanno sulla quadrica Q passante per questo punto. Quanto ad a', essa è retta passante per lo stesso punto considerato, e contenuta nella M_3.

(2) Cfr. SEGRE: lav. cit. dei Math. Ann., vol. XXIV.

tici come retta doppia, e si può ottenere come proiezione della *superficie di Veronese* (F_2^4 di S_5) (1) da un punto esterno ad essa, ma contenuto nel piano di una sua conica. Segue pure da ciò che questa superficie ammette precisamente ∞^4 (e non più) trasformazioni proiettive in sè. — Poichè essa si può ottenere come intersezione di due coni quadrici di 2ª specie (contenuti in quel certo fascio) e gli ∞^2 suoi piani tangenti come intersezioni delle coppie di spazi tangenti rispettivamente a questi due coni (avvertendo soltanto che l'asse di ciascuno dei due coni deve essere tangente all'altro, e perciò appunto lo spazio S_3 determinato dai due assi deve essere tangente ad entrambi), così, dualmente, la varietà M_3 si potrà ottenere *come luogo di tutti i punti delle ∞^2 rette che si appoggiano a due coniche fisse aventi un punto a comune* (che sarà pure l'unica intersezione dei loro piani) (2).

Questa varietà è del 3° ordine, e contiene le due coniche come curve doppie. Essa si è presentata al sig. SEGRE nelle sue ricerche sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni (Mem. Acc. di Torino, s. II, t. 39°, 1888); ciascuno spazio tangente la tocca lungo un' intera retta che si appoggia alle due coniche doppie; oltre a queste rette, essa ne contiene un altro sistema (2, 3) costituito appunto dalle generatrici delle quadriche Q.

Rappresentate le due coniche doppie colle equazioni:

$$x_4^2 - x_2\, x_5 = 0 \quad \text{nel piano} \quad x_1 = x_3 = 0$$
$$x_3^2 - x_1\, x_5 = 0 \quad \text{nel piano} \quad x_2 = x_4 = 0$$

l'equazione della M_3^3 può assumere la forma:

$$x_1\, x_4^2 + x_2\, x_3^2 = x_1\, x_2\, x_5\ .$$

(1) *La superficie omaloide normale* . . . (Mem. Accad. dei Lincei, ser. III, vol. XIX, 1883-84).

(2) Questa varietà è la sezione determinata da un S_4 tangente nella M_4^3 di S_5 luogo dei piani delle ∞^2 coniche di una F_2^4 di Veronese.

Come piano π si è qui assunto il piano $x_1 = x_2 = 0$. Questo piano e quelli delle due coniche appartengono alla M_3^3; i piani delle due coniche, ciascuno contato due volte, costituiscono particolari quadriche Q.

La varietà ottenuta ammette precisamente ∞^4 trasformazioni proiettive in sè. Le equazioni (finite) del relativo gruppo sarebbero le seguenti:

$$x'_1 = \rho^2 x_1 \qquad x'_3 = \rho(x_3 + \alpha x_1)$$
$$x'_2 = \sigma^2 x_2 \qquad x'_4 = \sigma(x_4 + \beta x_2)$$
$$x'_5 = x_5 + 2\beta x_4 + 2\alpha x_3 + \beta^2 x_2 + \alpha^2 x_1$$

dove ρ, σ, α, β sono i quattro parametri.

7. Supponiamo ora che la nostra M_3 sia segata dai piani del fascio π secondo coni (che non avranno però tutti lo stesso vertice, se la M_3 non è anche un cono). Allora si vede facilmente che:

a) *La linea luogo degli ∞^1 vertici non può essere che una retta, oppure una curva piana.* Ciò segue dal fatto che per un sottogruppo almeno ∞^2 del gruppo complessivo sono uniti tutti gli ∞^1 coni, quindi i loro vertici, e quindi anche tutti i punti dello spazio a cui appartiene la linea luogo di questi vertici;

b) *Se i vertici degli ∞^1 coni stanno tutti nel piano* π (comune agli spazi S_3 di questi coni) *essi hanno per luogo una retta.* Infatti, in caso contrario, per lo stesso sottogruppo (almeno) ∞^2 testè considerato sarebbero uniti tutti i punti di π e tutti gli S_3 per π; e in ciascuno di questi S_3 verrebbe allora subordinato un gruppo di omologie di dato centro (il vertice del cono) e di dato piano (π), dunque un gruppo soltanto ∞^1, il che non è possibile;

c) *Se la linea luogo degli ∞^1 vertici è piana e non retta, il gruppo complessivo deve subordinare su di essa ∞^2 trasformazioni diverse, sicchè quella linea sarà necessariamente una conica.* Infatti, se questa linea non fosse una conica (nè una retta), tutti i punti di essa, e tutti quelli del piano α (diverso da π) che la contiene, sarebbero uniti per un sottogruppo almeno ∞^3 del gruppo complessivo; e per un sottogruppo almeno ∞^1 si potrebbero supporre unite anche tutte le generatrici di un cono generico della serie ∞^1, il cui S_3 non conterrebbe α. In questo S_3 verrebbero dunque subordinate da quest'ultimo gruppo delle omologie, e si avrebbe perciò un piano di punti uniti, distinto da α: in tutto perciò si avrebbero due diversi piani di punti uniti, il che non è possibile.

Rimangono dunque, apparentemente, due diversi casi da esaminare, secondo che i vertici degli ∞^1 coni hanno per luogo una conica (non contenuta nel piano π) oppure una retta. Ma il primo caso non fa che ricondurci, per una nuova via, alla varietà cubica con due coniche doppie. Osserviamo infatti che nel gruppo complessivo proposto vi è un sottogruppo almeno ∞^2 per cui è unito ogni cono della serie ∞^1; e che questo sottogruppo deve subordinare nel piano π un gruppo proiettivo anche ∞^2, per il quale risultino unite tutte le curve tracce di questi diversi coni sul piano stesso. Ora, se queste linee fossero diverse l'una dall'altra, il gruppo ∞^2 ottenuto in π sarebbe *intransitivo*, e le linee stesse sarebbero necessariamente rette, caso che noi possiamo escludere (se no la M_3 sarebbe una ∞^1 di piani). Gli ∞^1 coni dovranno dunque incontrare il piano π secondo una stessa linea, non retta, e con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè; dunque ancora secondo una conica. E le loro generatrici (luogo delle quali è la nostra M_3) saranno quindi, come nel caso precedente, le rette che si appoggiano a due coniche fisse; quest'ultima, e quella che è luogo degli ∞^1 vertici. Le due coniche hanno evidentemente *un* punto a comune.

Noi possiamo dunque supporre che la nostra M_3 sia costituita da ∞^1 coni, aventi i vertici su di una retta r, *e contenuti negli spazi S_3 che passano per un piano fisso* π. Ma può ancora darsi:

1.° Che questo piano non contenga la retta r, e quindi non l' incontri affatto;

2.° Che il piano π e la retta r si appartengano.

8. Cominciamo col primo di questi due casi. Gli ∞^1 coni dovranno qui incontrare il piano π secondo altrettante curve distinte, se no si avrebbe un cono di 2^a specie di asse r. — D' altra parte in π stesso dovrà venir subordinato un gruppo almeno ∞^3, perchè, quando fossero uniti tutti i punti di π, lo sarebbero anche quelli di r, e ciò è possibile soltanto per un sottogruppo ∞^1. Avremo dunque in π un gruppo proiettivo ∞^3 che trasforma in sè un sistema ∞^1 di curve (non rette); tali curve saranno dunque coniche, e formeranno un fascio, coi quattro punti basi tutti infinitamente vicini. — Nel piano π assunto come piano $x_4 = x_5 = 0$, questo fascio potrà rappresentarsi coll' equazione:

$$x_2^2 - x_1 x_3 = k x_1^2$$

la quale, in S_4, rappresenterà il fascio dei coni quadrici di 2^a specie che proiettano quelle coniche dalla retta

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \ ,$$

che possiamo supporre sia la stessa r. — I coni della nostra serie ∞^1 si potranno allora ottenere come intersezioni di questi coni di 2^a specie con spazi del fascio $x_4 = k' x_5$; e possiamo anzi immaginare riferiti tra loro i due fasci (di coni quadrici e di spazi) in modo che si corrispondano le coppie di elementi incontrantisi secondo un cono della nostra M_3. Tale corrispondenza è evidentemente (algebrica e) biunivoca (perchè la serie dei coni della M_3 è trasformata in sè stessa in ∞^2 modi diversi, e non può ammettere perciò involuzioni unite); essa sarà quindi proiettiva. E supposto che per elementi omologhi sia $k' = k$, si può eliminare l' unico parametro, e si ha l' equazione:

$$\frac{x_2^2 - x_1 x_3}{x_1^2} = \frac{x_4}{x_5}$$

ossia;

$$x_1^2 x_4 - x_2^2 x_5 + x_1 x_3 x_5 = 0.$$

Otteniamo così una *varietà cubica con due rette doppie incidenti* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = x_2 = x_5 = 0$. — Nei singoli punti della prima di queste rette (che è poi la r) la varietà cubica è toccata rispettivamente dai coni quadrici di 2ª specie:

$$x_2^2 - x_1 x_3 = k x_1^2$$

Invece la seconda retta doppia è tale che per ogni suo punto il cono quadrico tangente si spezza in due spazi (S_3), uno dei quali è lo spazio (fisso) $x_1 = 0$, mentre l' altro varia nel fascio:

$$x_1 + \lambda x_5 = 0$$

e viene in particolare a coincidere col primo per il punto *unispaziale* $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Quest' ultima è dunque una *retta doppia di 2ª specie* (SEGRE: Memoria citata *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni....*, n.° 46); e la varietà cubica che a noi si è presentata rientra nel caso considerato al n.° 48 della stessa Mem. (e precisamente alla fine del primo capoverso della pag. 40). Questa varietà contiene *tre* piani; il piano $x_1 = x_2 = 0$ delle due rette doppie; il piano $x_1 = x_5 = 0$, che è il piano indicato con π nella Mem. del sig. SEGRE, e finalmente il piano $x_4 = x_5 = 0$, ulteriore intersezione della varietà collo spazio $x_5 = 0$, che è tangente ad essa in tutti i punti del piano $x_1 = x_5 = 0$ (1).

(1) Quando una varietà cubica di S_4 ammette una retta doppia di 2ª specie, ed è toccata nei punti di questa retta da spazi S_3 appartenenti tutti a uno stesso fascio, questi spazi devono incontrarla secondo coni cubici aventi la retta stessa per generatrice cuspidale (SEGRE, l. c.). Se il piano comune a questi spazi appartiene anche alla varietà, quest'ultima ammetterà nei vari punti del piano stesso un medesimo S_3 tangente, e conterrà quindi in generale un nuovo piano come intersezione residua con questo S_3.

La varietà stessa ammette precisamente ∞^4 trasformazioni proiettive in sè; e le equazioni del relativo gruppo si possono mettere sotto la forma:

$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = \rho\,(x_2 + \alpha\, x_1) \qquad\qquad x_4' = \sigma\,\rho^2\,(x_4 + \beta\, x_5)$$
$$x_3' = \rho^2\,(x_3 + 2\,\alpha\, x_2 + [\,\alpha^2 - \beta\,]x_1)\,; \quad x_5' = \sigma\, x_5$$

Per $\rho = 1$ si ha un sottogruppo ∞^3 di proiettività *permutabili* con due punti uniti fissi, uno doppio e l' altro triplo; corrispondenti dunque in generale ai simboli [32] (SEGRE: Memorie Acc. dei Lincei, ser. III, vol. XIX) e [(000) (00)] (PREDELLA: Ann. di Matem., ser. II, t. XVII). La varietà ottenuta sarebbe dunque una particolare *Varietà W* (ma la più generale, corrispondentemente a questa disposizione degli elementi uniti).

9. Supponiamo infine che la nostra M_3 sia costituita da una serie ∞^1 di coni coi vertici su di una retta r, e cogli spazi S_3 formanti fascio attorno a un piano π che contiene questa retta. — Distingueremo ancora due casi, secondo che il gruppo proposto G subordina nella serie delle generatrici di uno qualunque di questi coni, imposto come unito, un gruppo con due generatrici distinte unite (quindi ∞^1 e non parabolico), oppure con una sola. *In quest' ultimo caso* (cfr. n.° 11 e seg.) *si tratterà certamente di coni quadrici.*

Nel primo caso, imposto ad un cono qualunque della serie ∞^1 di essere unito, risulteranno unite *tre* rette distinte passanti per il vertice di esso e contenute nel relativo S_3 (due delle quali saranno generatrici del cono, e la terza l' intersezione dei piani tangenti a questo cono lungo quelle due generatrici). Di queste tre rette, una sarà sempre la r, un' altra a starà ancora nel piano π, e la terza b sarà esterna a questo piano. Si vede facilmente che, dovendo essere subordinato in π un gruppo almeno ∞^3 trasformante in sè l' inviluppo delle rette a, queste rette dovranno formare un fascio, col centro A fuori di r; il punto A sarà anche unito rispetto all' intero gruppo proposto. — Le rette b formeranno pure una rigata invariante rispetto a questo gruppo; tale rigata non è certo un inviluppo piano (perchè se no dovrebbe stare in un piano per r, e d'altra parte un S_3 generico per π contiene di essa una ed una sola generatrice), e non può nemmeno appartenere allo spazio S_4, perchè se no, imposto ad ogni generatrice di essa di essere unita (con che si viene ad estrarre un sottogruppo almeno ∞^2), sarebbero uniti anche tutti i piani per r, quindi tutte le generatrici degli ∞^1 coni della M_3 (il che è possibile soltanto per un gruppo ∞^1). — La rigata delle b apparterrà dunque a uno spazio S_3, passante per r e non per π (quindi nemmeno per A); e, dovendo essere invariante rispetto al gruppo G, essa sarà necessariamente una quadrica di quello spazio.

Il gruppo di cui si tratta ammette dunque un punto unito e un S_3 unito fissi, che non si appartengono. Di più, esso trasforma in sè una quadrica (non degenere) di questo spazio S_3. Si vede anzi che il gruppo stesso, essendo integrabile e non potendo contenere infinite omologie, sarà *precisamente* ∞^4 (e non più ampio). Avremo quindi varietà M_3 con sole ∞^4 trasformazioni proiettive in sè, a meno che esse non possano considerarsi in infiniti modi come serie ∞^1 di coni, il che avviene solo per coni (a tre dimensioni) e quadriche.

Assumiamo il punto A come punto

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

e la quadrica fissa come quadrica $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ dello spazio $x_5 = 0$. Le equazioni del gruppo potranno allora mettersi sotto la forma:

$$x_1' = x_1 \qquad\qquad x_3' = \sigma (x_3 + \beta x_1)$$
$$x_2' = \rho (x_2 + \alpha x_1) \qquad x_4' = \rho \sigma (x_4 + \alpha x_3 + \beta x_2 + \alpha \beta x_1)$$
$$x_5' = C x_5$$

dove ρ, σ, α, β sono i quattro parametri, e C è una funzione di questi, della quale per il momento non ci occupiamo. — Osserviamo piuttosto che questo gruppo ∞^4 trasforma in sè il fascio di coni quadrici di 1ª specie):

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = \lambda x_1^2$$

e il fascio di spazi $x_5 = \mu x_1$, subordinando in ciascuno dei due un gruppo ∞^1 non parabolico, di cui per λ, $\mu = 0$ e ∞ si hanno gli elementi uniti. Nel gruppo (∞^4) G vi sarà quindi un sottogruppo (invariante) almeno ∞^2 (anzi ∞^3, come risulterà in seguito) per cui risultano uniti tutti quei coni e tutti questi spazi, quindi tutte le ∞^2 quadriche (di S_3) secondo cui quei coni sono segati da questi spazi; e si può anzi fare in modo che rispetto a una qualunque di queste quadriche il gruppo ∞^2 sia transitivo (1). Ogni M_3 unita rispetto al gruppo G sarà quindi costituita da una serie ∞^1 di tali quadriche.

10. Considerata pertanto una tale M_3, possiamo riferire tra loro quei due fasci (di spazi e coni quadrici) in modo che si corrispondano le coppie di elementi la cui quadrica d'intersezione appartiene a questa M_3. Avremo così tra i due fasci una certa corrispondenza (m, n), la quale però gode di questa particolare proprietà, che le m (o n) varietà dell' un fascio corrispondenti a una stessa varietà dell'altro formano sempre nel fascio stesso (almeno se $m, n > 1$) un gruppo dell' involuzione ∞^1 che ha come elementi m^{pli} (o n^{pli}) le due varietà invarianti rispetto a tutto G (ottenute cioè pei valori 0 e ∞ dei parametri λ e μ). Imposto infatti a una qualunque varietà dell' un fascio di essere unita, le sue corrispondenti nell' altro fascio devono

(1) Basterebbe porre ad es. $\sigma = \rho$, con che si stacca un primo sottogruppo invariante ∞^3; e poi ancora $C = 1$, con che si ha un sottogruppo ∞^2 invariante entro il precedente, e che implica quindi (come si vede facilmente) $\rho = \sigma = 1$. (Che se poi da $\sigma = \rho$ seguisse già $C = 1$, si imporrebbe direttamente $\rho = \sigma = 1$).

ancora (ma esse soltanto) potersi trasformare l' una nell' altra; in quest' altro fascio verrà perciò subordinato un gruppo finito, e quindi ciclico, cogli elementi uniti λ e $\mu = 0, \infty$: gruppo che genererà appunto quell' involuzione considerata di sopra. Le varietà corrispondenti a quella prima varietà (del primo fascio) formeranno dunque precisamente un gruppo di questa involuzione, e si otterranno quindi per uno stesso valore della potenza λ^m o μ^n. In altri termini, l' equazione della corrispondenza (m, n), scritta nei parametri λ e μ come coordinate, conterrà le sole potenze λ^m e μ^n, e sarà bilineare rispetto a queste. E poichè i valori 0 e ∞ dell' un parametro devono anche corrispondere agli stessi valori dell' altro (nello stesso ordine, o anche scambiati), così l' equazione dovrà assumere una delle due forme:

$$\lambda^m = k\,\mu^n\,;\ \ \lambda^m\,\mu^n = k$$

Possiamo quindi scrivere in ogni caso:

$$\lambda = k\,\mu^{\,p}$$

dove p è numero *razionale*, positivo o negativo $\left(= \pm \frac{n}{m}\right)$ Eliminando pertanto le λ e μ si ha:

$$(x_1\,x_4 - x_2\,x_3)\,x_1^{\,p-2} = k\,x_5^{\,p}$$

Corrispondentemente ad ogni valore particolare di p abbiamo non una sola, ma tutto un fascio di varietà M_3, ciascuna delle quali è trasformata in sè stessa dal gruppo G. Ma le sole varietà del fascio che ammettono altre trasformazioni proiettive sono, come già si è detto, spazi S_3, coni e, eventualmente, quadriche.

Si vede ora facilmente che la funzione incognita C deve essere $= (\rho\,\sigma)^{\frac{1}{p}}$.

Dagli spazi S_3 appartenenti al fascio $x_2 = \xi\,x_1$ queste varietà sono segate secondo i coni (di questi spazi):

$$x_1^{\,p-1}\,(x_4 - \xi\,x_3) = k\,x_5^{\,p}.$$

Altrettanto avviene per gli spazi $x_3 = \xi\, x_1$. Invece gli spazi del fascio $x_5 = \xi\, x_1$ danno per sezioni *gruppi di quadriche*:

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = k\, \xi^{\,p-2}\, x_1^{\,2}$$

incontranti tutte il piano $x_1 = x_5 = 0$ secondo le due rette fisse $x_1 = x_2 = x_5 = 0$ e $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ (*gruppi* di quadriche, perchè, se p è fratto, la potenza $\xi^{\,p-2}$ è suscettibile, per un dato ξ, di diversi valori).

In particolare, per $p = 3$ e $p = -1$ si hanno particolari *varietà cubiche con due rette doppie di* 2ª *specie* (nel piano $x_1 = x_5 = 0$). Nel primo caso il punto comune alle due rette doppie è unispaziale; nel secondo caso no, ma vi è, all' infuori delle rette stesse, un ulteriore punto doppio ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Sono i due casi considerati nella Mem. cit. del sig. SEGRE al 2° capoverso del n.° 51 (pag. 42).

11. Veniamo ora all' ultimo caso (cfr. n.° 9), che ne comprenderà tuttavia ancora parecchi altri (1). La nostra varietà M_3 si suppone qui costituita da una serie ∞^1 di coni *quadrici*, coi vertici su di una retta r, e tutti tangenti lungo r stessa a un medesimo piano π (comune agli spazi S_3 in cui quei coni sono contenuti). Si suppone altresì che nella serie ∞^1 delle generatrici di un cono generico imposto come unito venga subordinato un gruppo (∞^2, o anche parabolico ∞^1), per il quale r sia la sola generatrice unita fissa.

Con ciò rimane escluso che vi sia uno spazio S_3 unito fisso passante per r e non per π; e si dimostra facilmente che non vi può nemmeno essere un punto unito fisso nel

(1) Appunto per questo mi converrà qui esser più breve, e omettere anche qualche dimostrazione. Credo di poterlo fare, tanto più che per ogni singolo caso darò le equazioni del gruppo che si considera, e della (o delle) varietà invarianti rispetto a questo gruppo.

piano π e fuori di r (perchè l'esistenza di un tal punto unito porterebbe con sè quella di un S_3 unito fisso passante per r e non per π).

Si può anche dimostrare (ciò che è quasi evidente *a priori*) che nel gruppo complessivo di tutte le omografie che trasformano in sè la nostra M_3 è certo contenuto un sottogruppo ∞^1 di omografie rigate speciali, corrispondenti al simbolo [(221)] o [(21)] (1), per le quali sono uniti tutti i punti del piano π, e tutti i piani e gli S_3 passanti per r. Queste sono anche le sole operazioni di quel gruppo complessivo per le quali siano uniti tutti i punti di π; sicchè se si tratta di un gruppo complessivo ∞^k, questo dovrà subordinare in π stesso un gruppo *precisamente* ∞^{k-1}.

È stato già osservato (cfr. l'ultima nota al n.° 2) che, se la M_3 non è una quadrica nè un cono, deve essere $k \leq 5$, quindi $k - 1 \leq 4$; e anzi nel caso estremo $k = 5$ la sezione della M_3 con un S_3 generico passante per r dovrà essere una rigata di Cayley, la M_3 stessa quindi una varietà del *terzo ordine*.

Possiamo però fare ancora due diverse ipotesi, vale a dire che il gruppo complessivo G subordini sulla retta r (quindi anche nel fascio π) ∞^2 trasformazioni diverse (n. 12, 13), oppure soltanto ∞^1 (n. 14, 15).

12. Cominciamo coll'esaminare la prima ipotesi, supponiamo cioè che su r venga subordinato il gruppo ∞^2 di *tutte* le omografie aventi un dato punto unito P. — Nel gruppo delle proiettività subordinate da G in π sarà certo contenuto un sottogruppo invariante ∞^2 composto di operazioni permutabili (2); in G vi saranno quindi ∞^3 trasfor-

(1) Cfr. i lavori dei Sigg Segre e Predella cit. alla fine del § 8.

(2) Ciò segue direttamente dalla composizione dei gruppi integrabili ∞^3 e ∞^4; ed è anche confermato dall'enumerazione dei gruppi proiettivi del piano (Lie–Scheffers: *Vorlesungen über continuirliche Gruppen*, p. 288).

mazioni diverse subordinanti in π operazioni di quest' ultimo sottogruppo; e queste formeranno a lor volta un sottogruppo G' invariante entro G. Se il gruppo G è ∞^4, è chiaro che G' dovrà subordinare su r il gruppo parabolico ∞^1 per cui P è punto unito doppio; se G è ∞^5, si potrà anche scegliere G' in modo che così sia (1). Quanto al piano π, non potendovi essere, fuori di r, nessun punto unito fisso (perchè un tal punto sarebbe certo isolato, e quindi fisso per tutto G), si può concludere che G' dovrà subordinarvi o un gruppo ∞^2 di omografie aventi P come punto unito triplo, oppure anche il gruppo ∞^2 delle omologie speciali di centro P. — Gruppi analoghi verranno pure subordinati nella rete di asse r, e precisamente, nei due casi, un' operazione generica di G' ammetterà, entro questa rete, rispettivamente un solo spazio (e un solo piano) unito, oppure tutto un fascio di spazi uniti (e tutto un fascio di piani uniti, entro un determinato S_3).

Se, per un' operazione generica di G', è P il solo punto unito (in π), consideriamo, entro G' stesso, un sottogruppo invariante ∞^2 generico G'', il quale subordini in π un gruppo soltanto ∞^1, e trasformi quindi in sè tutto un fascio di coniche di π aventi in P un contatto di 3° ordine. — Assunto P come punto fondamentale $x_1 = .. = x_4 = 0$, la r come retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, π come piano $x_1 = x_2 = 0$, le equazioni di questo gruppo ∞^2 potranno mettersi sotto la forma:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1\\
x_2' &= x_2 + \alpha x_1\\
x_3' &= x_3 + 2\alpha x_2 + \alpha^2 x_1\\
x_4' &= x_4 + 3\alpha x_3 + 3\alpha^2 x_2 + (\alpha^3 + \beta) x_1\\
x_5' &= x_5 + 4\alpha x_4 + 6\alpha^2 x_3 + 4(\alpha^3 + \beta) x_2 + (\alpha^4 + 4\alpha\beta) x_1
\end{aligned}$$

Questo gruppo trasforma in sè tutte le quadriche della rete:

$$\lambda x_1^2 + \mu (x_2^2 - x_1 x_3) + \nu (x_1 x_5 - 4 x_2 x_4 + 3 x_3^2) = 0$$

(1) Vale a dire in modo che non si abbia sempre su r l' identità.

quindi anche le ∞^2 superficie basi dei fasci contenuti in questa rete (che sono rigate quartiche del tipo di quelle già incontrate al n.° 4). Questa rete sarà ancora invariante rispetto a tutto G′ (in cui G″ è contenuto come sottogruppo invariante); solo che per G′ non sarà più invariante ogni quadrica della rete, bensì G′ stesso dovrà subordinare in questa rete (come varietà lineare ∞^2) un gruppo algebrico ∞^1, trasformante in sè il fascio di coni di 2ª specie:

$$\lambda x_1^2 + \mu (x_2^2 - x_1 x_3) = 0$$

e, entro questo fascio, una sola varietà, e precisamenle lo spazio doppio $x_1^2 = 0$. Considerata dunque la rete come un *piano*, si avrebbe in questo piano un gruppo proiettivo algebrico ∞^1, che sopra una retta unita subordina un gruppo parabolico; sicchè le traiettorie sarebbero o rette (quando si trattasse di un gruppo ∞^1 di omologie, necessariamente speciali), oppure coniche (con un contatto di 3° ordine). Il primo caso va però escluso, perchè, corrispondentemente ai punti dell'asse di omologia, si avrebbe tutto un fascio di quadriche invarianti rispetto a G′; e sarebbero queste le sole varietà invarianti per tutto G, rispetto alle quali il gruppo risulterebbe transitivo. Rimane il caso delle coniche (traiettorie); sicchè, nella rete, saranno invarianti infinite serie ∞^1 d'indice *due* di quadriche, quindi i relativi inviluppi, le cui equazioni potranno assumersi sotto la forma:

$$(x_2^2 - x_1 x_3)^2 - x_1^2 (x_1 x_5 - 4 x_2 x_4 + 3 x_3^2) = k x_1^4.$$

Il gruppo G′ trasformerà dunque in sè le ∞^1 varietà del 4° ordine (M_3^4) rappresentate da quest'equazione, corrispondentemente ai diversi valori di k. Queste varietà sono tutte proiettivamente identiche fra loro; esse hanno il piano π come doppio e la retta r come tripla, e *ammettono tutte* ∞^4 *trasformazioni proiettive in sè* (e non più, essendo di ordine superiore al terzo).

Supposto per semplicità $k = 0$, e dato al primo termine il coefficiente numerico (affatto inessenziale) 6, si ha la varietà di equazione;

$$6\, x_2^4 - 12\, x_1\, x_2^2\, x_3 + 4\, x_1^2\, x_2\, x_4 - x_1^3\, x_5 + 3\, x_1^2\, x_3^2 = 0$$

la quale ammette precisamente le ∞^4 trasformazioni proiettive (coi parametri ρ, α, β, γ):

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= \rho\ [x_2 + \alpha\, x_1] \\
x_3' &= \rho^2\, [x_3 + 2\, \alpha\, x_2 + (\alpha^2 + \beta)\, x_1] \\
x_4' &= \rho^3\, [x_4 + 3\alpha\, x_3 + 3\, (\alpha^2 + \beta)\, x_2 + (\alpha^3 + 3\, \alpha\, \beta + \gamma)\, x_1] \\
x_5' &= \rho^4\, [x_5 + 4\alpha\, x_4 + 6\, (\alpha^2 + \beta)\, x_3 + 4\, (\alpha^3 + 3\alpha\beta + \gamma)\, x_2 \\
&\qquad + (\alpha^4 + 6\, \alpha^2\, \beta + 3\, \beta^2 + 4\, \alpha\, \gamma)\, x_1]
\end{aligned}$$

Per $\rho = 1$ si ha un sottogruppo ∞^3 di omografie permutabili col solo punto unito (quintuplo) P. Anche questa varietà è (come quella del n.° 8) una particolare *Varietà W* (la più generale per il caso di un solo punto unito quintuplo).

13. Se invece il gruppo G′ subordina in π il gruppo ∞^2 delle omologie speciali di centro P, si può ragionare ancora in modo analogo partendo da un sottogruppo G″ (invariante entro G′) per il quale siano uniti tutti i punti di una retta generica del fascio P (π) (ad es. della retta $x_1 = x_2 = x_4 = 0$). Le equazioni di questo sotto gruppo si potranno mettere sotto la forma:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= x_2 + \alpha\, x_1 \\
x_3' &= x_3 \\
x_4' &= x_4 + 2\, \alpha_2 + (\alpha^2 + \beta)\, x_1 \\
x_5' &= x_3 + 3\, \alpha\, x_4 + 3\, (\alpha^2 + \beta)\, x_2 + (\alpha^3 + 3\, \alpha\, \beta)\, x_1.
\end{aligned}$$

Saranno dunque invarianti rispetto a G″ tutti i coni cubici del sistema lineare ∞^2:

$$\lambda\, x_1^3 + \mu\, x_1^2\, x_3 + \nu\, (x_1^2\, x_5 - 3\, x_1\, x_2\, x_4 + 2\, x_2^3) = 0$$

(e quindi le superficie basi degli ∞^2 fasci di questa rete, le quali, fatta astrazione dal piano fisso multiplo $x_1 = x_2 = 0$, non sono altro che rigate di Cayley negli spazi $x_1 + k x_3 = 0$).

In questa rete il gruppo G′ subordinerà trasformazioni analoghe a quelle del caso precedente, e, rispetto a G′ stesso, si troveranno così ∞^1 varietà invarianti, di equazione:

$$(x_1^2\, x_3)^2 - x_1^3\,(x_1^2\, x_5 - 3\, x_1\, x_2\, x_4 + 2\, x_2^3) = k\, x_1^6$$

ossia le varietà cubiche:

$$x_1^2\, x_5 - 3\, x_1\, x_2\, x_4 + 2\, x_2^3 - x_1\, x_3^2 = k\, x_1^3$$

contenenti tutte il piano π, e aventi r come retta doppia di 2ª specie col punto P come punto unispaziale; *lo spazio* $x_1 = 0$ *tangente comune a quelle varietà in questo punto le incontra nel solo piano* π *contato tre volte.* Queste varietà sono anche tutte proiettivamente identiche fra loro; sicchè possiamo supporre $k = 0$, e limitarci quindi a considerare la sola varietà:

$$x_1^2\, x_5 - 3\, x_1\, x_2\, x_4 + 2\, x_2^3 - x_1\, x_3^2 = 0.$$

Questa varietà ammette tutto un gruppo ∞^5 (non soltanto ∞^4) *di trasformazioni proiettive*, rappresentabile colle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= \rho\,[x_2 + \alpha\, x_1] \\
x_3' &= \rho^{\frac{3}{2}}\,[x_3 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_1] \\
x_4' &= \rho^2\,\Big[x_4 - \frac{2}{3}\,\beta\, x_3 - \frac{1}{3}\,\beta^2\, x_2 \\
&\qquad + 2\,\alpha\, x_2 + (\alpha^2 + \gamma)\, x_1\Big] \\
x_5' &= \rho^3\,[x_5 + 3\,\alpha\, x_4 + 3\,(\alpha^2 + \vartheta)\, x_2 + (\alpha^3 + 3\,\alpha\,\vartheta)\, x_1 \\
&\qquad + 2\,\gamma\, x_3 + \gamma^2\, x_1 \\
&\qquad - 2\,\alpha\,\beta\, x_3 + (2\,\beta\gamma - \beta^2\,\alpha)\, x_2].
\end{aligned}$$

Anche qui per $\rho = 1$, $\beta = 0$ si ha un sottogruppo ∞^3 di omografie permutabili, corrispondenti in generale al simbolo $[(41)]$ ovvero $[(1000)]$.

14. Supponiamo ora che sulla retta r (e quindi nel fascio π) il gruppo complessivo G subordini un gruppo soltanto ∞^1 di trasformazioni proiettive. In questo caso il gruppo G si deve ritenere soltanto ∞^4 (e non più ampio); perchè se no la sezione della nostra M_3 con un S_3 generico per r dovrebbe essere una rigata con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè, delle quali ∞^2 dovrebbero lasciar fissa ogni sua generatrice; non potrebbe dunque essere che una quadrica o un piano.

Imponendo ora ad un punto generico di r di essere unito, veniamo a staccare da G un sottogruppo invariante ∞^3 (G′), per il quale saranno uniti tutti i punti di r e tutti gli spazi del fascio π. Questo sottogruppo subordinerà nel piano π un gruppo ∞^2 di omologie di asse r (e operazioni analoghe nella rete r); ma bisognerà ancora distinguere il caso in cui queste omologie sono tutte speciali, e quindi fra loro permutabili, da quello (n.° 15) in cui i loro centri hanno per luogo una retta del piano π diversa dalla r. Nel primo caso G′ trasformerà in sè, entro ciascuno spazio del fascio π, tutto un fascio di coni quadrici colle quattro generatrici basi coincidenti con r, e nella serie delle generatrici di ciascun cono verrà subordinato soltanto un gruppo parabolico ∞^1. Nel secondo caso, entro ciascuno di quegli spazi sarà unito per tutto G′ un solo cono, le cui generatrici verranno però trasformate l'una nell'altra in ∞^2 modi diversi.

Nel primo caso si vede facilmente che le equazioni del gruppo G′ possono mettersi sotto la forma:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= x_2 \\
x_3' &= x_3 + \alpha x_2 + \beta\, x_1 \\
x_4' &= x_4 + 2\,\alpha\, x_3 + \alpha^2\, x_2 + (\alpha\,\beta + \gamma)\, x_1 \\
x_5' &= x_5 + 2\,\beta\, x_3 + \beta^2\, x_1 + (\alpha\,\beta - \gamma)\, x_2.
\end{aligned}$$

È trasformata quindi in sè ogni quadrica del sistema lineare ∞^3:

$$\lambda x_1^2 + \mu x_1 x_2 + \nu x_2^2 + \xi (x_1 x_5 + x_2 x_4 - x_3^2) = 0 \quad (^1)$$

nel quale vi sono ∞^2 reti aventi rispettivamente per basi gli ∞^2 coni quadrici invarianti, contenuti negli spazi che passano per il piano π (assunto come piano $x_1 = x_2 = 0$). Questo sistema lineare ∞^3 sarà pure invariante rispetto all'intero gruppo G, il quale dovrà perciò subordinare in esso un gruppo algebrico ∞^1 di trasformazioni lineari. Possiamo supporre anche qui (cfr. n.° 12) che non vi siano nel sistema infinite quadriche unite; ve ne saranno quindi (il gruppo dovendo essere algebrico), ò *una sola* (e precisamente uno spazio doppio, ad es. $x_1^2 = 0$) da contarsi da quattro volte, oppure *quattro* distinte e indipendenti.

Quest' ultima ipotesi conduce, *entro il sistema lineare* ∞^3, a un gruppo ∞^1 che potrebbe rappresentarsi così:

$$(x_1^2)' = \rho^h (x_1^2)\,; \qquad (x_2^2)' = \rho^l (x_2^2)$$
$$(x_1 x_2)' = \rho^k (x_1 x_2)\,; \; (x_1 x_5 + x_2 x_4 - x_3^2)' = (x_1 x_5 + x_2 x_4 - x_3^2)$$

dove però deve essere $k = \frac{1}{2}(h + l)$; e si può quindi porre:

$$h = 2a\,;\; k = a + b\,;\; l = 2b$$

Per il gruppo G si hanno allora le equazioni:

$$\begin{aligned}
x_1' &= \rho^a x_1 \\
x_2' &= \rho^b x_2 \\
x_3' &= x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2 \\
x_4' &= \rho^{-b} (x_4 + 2\alpha x_3 + \alpha^2 x_2 + [\alpha\beta + \gamma] x_1) \\
x_5' &= \rho^{-a} (x_5 + 2\beta x_3 + \beta^2 x_1 + [\alpha\beta - \gamma] x_2)
\end{aligned}$$

essendo $\rho, \alpha, \beta, \gamma$ i quattro parametri, e a, b costanti arbitrarie, ma fisse per le diverse operazioni del gruppo ∞^4.

Rispetto a questo gruppo sono invarianti tutte le ∞^1 varietà:

$$x_1^{2b} x_2^{-2a} (x_1 x_5 + x_2 x_4 - x_3^2)^{a-b} = C$$

dove C è ancora una costante arbitraria. Queste varietà non sono però algebriche che quando siano razionali a e b (o almeno il loro rapporto) (1).

Se uno dei due numeri a e b è nullo (e l'altro è razionale) le varietà invarianti si riducono a quadriche. Se sono tutti due diversi da zero, poichè essi sono anche certo diversi fra loro, possiamo introdurre come nuovo parametro in luogo di ρ, la potenza ρ^{b-a}, e porre poi $\frac{2a}{a-b}=m$. L'equazione ultima si presenterà allora sotto la forma:

$$x_1^{m-2}(x_1 x_5 + x_2 x_4 - x_3^2) = C . x_2^m$$

dove m può avere qualunque valore razionale, positivo o negativo. Si vede così che queste varietà possono essere segate dagli spazi $x_1 + \xi x_2 = 0$ in un numero anche >1 di coni quadrici.

Per $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ si hanno varietà cubiche del tipo di quella incontrata al numero precedente; solo che qui se ne considerano soltanto le ∞^4 trasformazioni proiettive ottenibili dal gruppo del n.° 13 col porre $\alpha = 0$.

E varietà di questo stesso tipo si ritrovano anche, supponendo che un' operazione generica di G lasci fissa una sola varietà (quadrupla) del sistema lineare (1) (vale a dire che in questo sistema, considerato come spazio Σ_3, si abbia un gruppo proiettivo ∞^1 di simbolo [4] ovvero [(0000)]). In questo caso il gruppo G coinciderebbe con quello ottenibile dal gruppo ∞^5 del n.° 13, ponendovi $\rho = 1$.

15. Ci rimane, come ultima ipotesi, quella che il gruppo G′ (cfr. n.° 14) subordini in π un gruppo ∞^2 di omologie di asse r e coi centri su di una retta s diversa da r. Imponendo a un punto generico di questa retta s di essere

(1) In questo caso soltanto infatti è algebrico il gruppo ∞^1 considerato entro il sistema lineare (1).

unito, noi veniamo a staccare da G′ un sottogruppo ∞^2 per il quale si vede facilmente che deve essere unito (fisso) anche uno spazio S_3 passante per r e non per π; e al variare di quel punto sopra s, varierà questo spazio, descrivendo un certo fascio, il cui piano-asse π' sarà distinto da π. Ogni S_3 passante per π' dovrà incontrare la M_3 (all'infuori eventualmente di π' stesso) secondo una rigata con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè, delle quali ∞^2 lascieranno fissa ogni sua generatrice; dunque secondo una quadrica. Si può anche dimostrare che queste quadriche devono tutte incontrare π', oltre che in r, in una stessa seconda retta t; sicchè questa retta sarà pure fissa per tutto G. Il gruppo G′ subordinerà in π' le ∞^2 omologie di asse r e col centro sopra t; e il gruppo G vi subordinerà ∞^3 trasformazioni diverse, sicchè vi sarà in G stesso un sottogruppo ∞^1 per cui saranno uniti tutti i punti di π'.

Di qui si trae facilmente che le equazioni del gruppo G′ devono potersi mettere sotto questa forma:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= x_2 \\
x_3' &= \rho\,(x_3 + \alpha\, x_1) \\
x_4' &= \rho^2\,(x_4 + \beta\, x_1) \\
x_5' &= \rho^2\,(x_5 + 2\,\alpha\, x_3 + \alpha^2\, x_1 - \beta\, x_2)
\end{aligned}
$$

sicchè per G′ stesso, oltre agli spazi $x_1 + \lambda\, x_2 = 0$, sarà pure invariante la quadrica

$$x_1\, x_5 + x_2\, x_4 - x_3^2 = 0\,;$$

quindi ciascuno degli ∞^1 coni secondo cui questa quadrica è incontrata da quegli spazi. Ma abbiamo già detto (cfr. n.° 14) che, in questo caso, il gruppo G′ non può trasformare in sè, entro ciascuno spazio del fascio π, che un solo cono quadrico; sarà dunque la quadrica testè considerata il luogo di questi ∞^1 coni. E poichè le M_3 che noi andiamo cercando devono appunto comporsi di ∞^1 coni invarianti rispetto a G′, così esse non potranno che coincidere con quella stessa quadrica; vale a dire quest' ultimo caso non ci conduce a nessuna varietà della quale si debba tener conto.

16. Le varietà M_3 che a noi si sono presentate contengono tutte almeno un sistema ∞^2 di rette; e possiamo quindi domandarci quali *congruenze di rette* dello spazio ordinario si otterrebbero proiettando opportunamente questi sistemi su di un S_3. Le proprietà di queste congruenze si potrebbero anzi dedurre senz' altro da quelle delle stesse varietà M_3 (1). — L' *ordine* della congruenza sarà eguale a quello della M_3 considerata, ovvero inferiore a questo di un' unità, secondo che la proiezione si fa da un punto esterno a questa varietà, oppure da un punto posto su di essa (e sarebbe poi inferiore al primo di più unità, se si proiettasse di un punto multiplo della varietà stessa). La *classe* della congruenza sarà il numero delle rette della M_3 (o almeno di quel certo sistema ∞^2 posto su di esso) che stanno in un S_3 generico, e dovrà ricercarsi volta per volta. — Così p. e. è chiaro che, proiettando la varietà cubica con due coniche doppie (cfr. n.° 6) da un suo punto generico, si ottiene la congruenza (2, 4) delle rette che si appoggiano a due coniche fisse aventi due punti in comune. — Particolarmente interessante sarebbe il caso della varietà cubica considerata al n.° 13. Scrittane l'equazione sotto la forma:

$$x_1^2\, x_5 - x_1\,(3\, x_2\, x_4 + x_3^2) + 2\, x_2^3 = 0$$

si vede che questa varietà contiene il punto fondamentale $x_2 = \ldots = x_5 = 0$ (il quale può ritenersi punto generico di essa), e che il suo *contorno apparente* rispetto a questo punto è dato dalla superficie di 4° ordine (e 4ª classe) dello spazio $x_1 = 0$:

$$(3\, x_2\, x_4 + x_3^2)^2 - 8\, x_5\, x_2^3 = 0 \tag{1}$$

(1) Come già fecero per altre varietà i sigg. Segre (Mem. cit. sulle varietà cubiche) e Castelnuovo (Atti Ist. Veneto, ser. 6ª t. V e VI).

Otteniamo quindi, proiettando la M_3^3 da quello stesso punto, *una congruenza (2 , 2) , duale di sè stessa, composta di quelle tangenti della superficie (1), che si appoggiano alla sua retta cuspidale* $x_2 = x_3 = 0$, *pur toccandola in generale fuori di questa retta.* — La superficie (1) è poi toccata dal piano $x_5 = 0$ lungo la conica $3\,x_2\,x_4 + x_3^2 = 0$, e ha il punto $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ come punto triplo uniplanare, col piano tangente $x_2 = 0$; questo piano l' incontra secondo la sola retta $x_2 = x_3 = 0$ (contata *quattro* volte). — Questa superficie è naturalmente focale per la congruenza (2,2), e precisamente luogo di *un* fuoco di una retta variabile di essa; l' altro fuoco sta anche sulla superficie, ma non descrive che la sola retta (singolare per la congruenza) $x_2 = x_3 = 0$ (1). — Superficie e congruenza devono ammettere ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, perchè la M_3^3 da cui siamo partiti ne ammette in tutto ∞^5 , e quindi ∞^2 che lasciano fisso un suo punto generico. Infatti la superficie (1) è una particolare *superficie di 4ª specie* di Enriques (Atti Ist. Veneto, ser. 7ª t, IV, p. 1629), ed è trasformata in sè dal gruppo proiettivo ∞^2 :

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2 \\ x_3' &= \sigma\,(x_3 + 3\,\xi\,x_2) \\ x^{4'} &= \sigma^2\,(x_4 - 2\,\xi\,x_3 - 3\,\varsigma^2\,x_2 \\ x_5' &= \sigma^4\,x_5 \end{aligned}$$

Anche la varietà cubica incontrata al n.° 8 condurrebbe, per proiezione da un punto generico di essa, a una particolare congruenza (2, 2) con retta singolare. — La varietà del 4° ordine considerata al n.° 12 condurrebbe a congruenze di 2ª classe, e di 3° o 4° ordine. E vari casi si

(1) Secondo la classificazione delle congruenze di 2° ordine con linea singolare data dal sig. Sturm (*Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie...*, vol. II) questa congruenza apparterrebbe alla suddivisione III, A. 3) (p. 333), per $\mu = 4$; ma sarebbe naturalmente un caso molto particolare.

potrebbero anche avere dalle M_3 incontrate ai n.^{i} 10 e 14. Ma su ciò non insistiamo.

17. Un' altra ricerca che si può collegare allo studio di queste stesse varietà M_3 e dei sistemi di rette in essi contenuti, è quella delle *superficie* che risultano immagini di tali sistemi, quando si considerino le ∞^6 rette di S_4 come punti di una varietà $M_6{}^5$ di uno spazio Σ_9 (cfr. anche n.° 4). In particolare, in questi ultimi casi (n.° 12 e seg.) si hanno superficie contenenti un fascio di coniche (corrispondentemente agli ∞^1 coni quadrici della varietà M_3), e con almeno ∞^3 trasformazioni proiettive in sè. Si vede facilmente che il sistema delle ∞^2 rette di una tale varietà è contenuto in ∞^3 diversi complessi lineari (di S_4); si tratterà dunque di superficie appartenenti a uno spazio Σ_5. L' ordine di una tale superficie si trova essere $n+2$, se n è l' ordine della varietà M_3 (1); e vi è poi su di essa un punto $(n-1)^{plo}$, immagine della retta r, che è comune alle ∞^1 coniche contenute nella superficie, e dal quale la superficie stessa si proietta univocamente in una rigata cubica normale di uno spazio Σ_4. — Una quadrica ($n=2$) conduce in tal modo a una *superficie di Veronese*, come immagine del sistema delle ∞^2 rette della quadrica stessa, che si appoggiano ad una determinata tra esse. La varietà cubica di cui al n.° 13 conduce ad una superficie del 5° ordine a sezioni ellittiche, con ∞^4 trasformazioni proiettive in sè; superficie che si può rappresentare sul piano con un sistema lineare ∞^5 di curve del 3° ordine aventi a co-

(1) L' ordine della superficie immagine è infatti il numero delle rette della M_3 che si appoggiano contemporaneamente a due piani qualunque, p. e. a due piani di uno stesso S_3 (in quanto tale numero non diventi infinito). E le rette che si appoggiano a due piani così fatti devono o incontrare la retta intersezione di questi piani, oppure esser contenute nel loro spazio S_3; le prime sono in numero di n, le seconde in numero di *due*.

mune quattro punti infinitamente vicini, di cui tre in linea retta (ossia un flesso colla relativa tangente, e un altro punto infinitamente vicino a questo flesso). Un tale sistema può rappresentarsi (in coordinate proiettive x_1, x_2, x_3) coll'equazione generale:

$$x_1[a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3] = x_2^3 + x_1 x_3^2 \quad (^1)$$

ed è trasformato in sè precisamente dal gruppo proiettivo ∞^4:

$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = \rho\,(x_2 + \alpha\, x_1)$$
$$x_3' = \rho^{\frac{3}{2}}\,(x_3 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_1)\,.$$

La rappresentazione piana che così si ottiene per il sistema di rette contenuto in quella M_3^3 è la stessa che si ha direttamente sulla rete di piani di asse r come forma lineare ∞^2.

18. Le varietà M_3 dello spazio S_4 che ammettono un gruppo precisamente ∞^4, transitivo e integrabile, di trasformazioni proiettive in sè, sono dunque le seguenti:

1.° Varietà del 4° ordine composta di una serie ∞^1 di

(1) Infatti le cubiche aventi un flesso nel punto $x_1 = x_2 = 0$ colla retta $x_1 = 0$ come tangente comune hanno equazioni del tipo $x_1 f + x_2^3 = 0$, dove f è una forma quadratica qualsiasi. Due qualunque di queste cubiche $x_1 f + x_2^3 = 0$ e $x_1 f' + x_2^3 = 0$ determinano un fascio contenente una curva che si spezza nella retta $x_1 = 0$ e nella conica (generica) $f - f' = 0$. Se vogliamo imporre a quelle cubiche di contenere un nuovo punto fisso infinitamente vicino al primo, sarà necessario (e sufficiente) che questa conica $f - f' = 0$ passi sempre per il punto $x_1 = x_2 = 0$, vale a dire che nelle forme $f, f', \ldots$ (nelle quali sono essenziali tutti i coefficienti, e non soltanto i loro mutui rapporti) il termine in x_3^2 abbia sempre uno stesso coefficiente, che dovrà essere diverso da zero (se no si avrebbe in $x_1 = x_2 = 0$ un punto doppio), e che può quindi supporsi eguale all' unità (disponendo opportunamente del punto unità del sistema di coordinate).

piani e avente un piano triplo (doppio come piano direttore, e semplice come piano generatore) (n.° 4);

2.° Varietà cubica con due coniche doppie (n.° 6);

3.° Varietà cubica (particolare) con due rette doppie incidenti, una di 1ª e una di 2ª specie (n.° 8):

4.° Varietà del 4° ordine con un piano doppio e una retta tripla contenuta in questo piano e contenente a sua volta un punto unispaziale (n.° 12);

5.° Varietà diverse aventi equazioni del tipo:

$$x_1^{k-2} f = x_2^n$$

dove k può essere un numero razionale qualunque, e f è una particolare forma quadratica, tale che dagli spazi del fascio $x_1 + \lambda x_2 = 0$ queste stesse varietà sono segate secondo una o più quadriche o coni quadrici tangenti al piano $x_1 = x_2 = 0$ (incontranti perciò questo piano secondo una (stessa) coppia di rette, o retta doppia (cfr. n.ⁱ 10, 14)).

È manifesta l' analogia di queste ultime varietà colle *superficie di 4.ª specie* di Enriques, già ricordate, le quali sono segate dai piani per una retta fissa secondo coniche tangenti a questa retta in uno stesso punto. Tali superficie ammettono però in generale soltanto ∞^2 trasformazioni proiettive in sè.

Le varietà n.° 1 e 4 si possono considerare come generalizzazioni, in due diversi modi (∞^1 di piani e ∞^2 di rette) della *rigata di Cayley*. E una terza generalizzazione forse più notevole ancora, la si ha nella varietà cubica:

$$x_1^2 x_5 - 3 x_1 x_2 x_4 + 2 x_2^3 - x_1 x_3^2 = 0$$

(cfr. n.° 13), la quale ammette complessivamente un gruppo integrabile ∞^5 di trasformazioni proiettive. Questa varietà contiene una retta doppia di 2ª specie con un punto unispaziale, il cui S_3 tangente incontra la varietà stessa secondo un unico piano da contarsi tre volte. Gli S_3 passanti per la retta doppia ma non per questo piano la segano in rigate di Cayley aventi la stessa retta doppia per direttrice. — La varietà è anche di 3ª classe, e duale di sè stessa. Nessuna varietà può ammettere un gruppo integrabile ancora più ampio di trasformazioni proiettive, a meno di non essere una quadrica o un cono.

Le varietà n.° 3 e 4 e quest' ultima varietà cubica ammettono un sottogruppo ∞^3 di trasformazioni proiettive *permutabili*, corrispondenti rispett. al simbolo generale [32] o [(000) (00)], [5] o [(00000)], e [(41)] o [(1000)].

Le varietà n.° 1 e 2 sono le sole che ammettano soltanto ∞^2 diversi S_3 tangenti. Ad esse corrispondono quindi per dualità le sole due *superficie dello spazio S_4 con un gruppo (complessivo) integrabile e ∞^4 di trasformazioni proiettive in sè*, vale a dire:

1.° Rigata razionale del 4° ordine con retta doppia che ne è ad un tempo direttrice e generatrice (semplice);

2.° Superficie, anche del 4° ordine e con retta doppia, proiezione della *superficie di Veronese* da un punto esterno ad essa, ma contenuto nel piano di una sua conica.

Roma, giugno 1896.