Gino Fano

Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie V, Vol. **41** (1895), p. 322–330

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1895_10>

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. In questa terza Nota mi propongo di estendere, in quanto è possibile, alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque n i risultati già ottenuti nelle due Note precedenti (1) sulle equazioni differenziali lineari di 4° ordine; di studiare cioè il caso in cui dette equazioni differenziali ammettono un sistema di soluzioni indipendenti $y_1, y_2, \ldots . y_n$ legate da equazioni algebriche rappresentanti complessivamente una superficie dello spazio S_{n-1}, in cui le y_i si suppongono interpretate quali coordinate projettive omogenee. Si sappia, in altri termini, che la curva Γ (di questo spazio) descritta dal punto variabile (y), pur non essendo algebrica (caso già considerato in altre due Note a p. 18 e 51 di questi Rend.), è però contenuta in una superficie algebrica F.

« L'equazione differenziale proposta potrà certo integrarsi algebricamente (a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni, e determinabile con una quadratura), se questa superficie non ammette che un numero finito di trasformazioni projettive in sè (ma la curva Γ risulterà in tal caso algebrica); e si potrà certo integrare per quadrature, se essa ne ammette soltanto un gruppo continuo ∞^1. (2).

(1) Cfr. questi Rend.; p. 232 e 292. Sull'equazione differenziale proposta si suppongono fatte le stesse ipotesi delle diverse Note prec. (cfr. anche p. 23 di questi Rend.).

(2) È questa un'estensione immediata del risultato già ottenuto per $n=4$. Si noti che quando il gruppo di tutte le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa

« A questo stesso risultato si giunge anche se la superficie F ammette un gruppo continuo (soltanto) ∞^2 di trasformazioni projettive; ed è facile anzi riconoscere direttamente che questo gruppo ∞^2 deve appunto contenere sempre un sottogruppo *eccezionale* ∞^1 (deve essere cioè *integrabile*) (1). Infatti ogni punto, il quale sia unito per un'omografia (non ciclica) del gruppo, e quindi per tutte quelle di un certo sottogruppo ∞^1, ma non per le rimanenti (2), vien portato dalle diverse operazioni del gruppo ∞^2 nei punti di una linea (luogo di un punto unito *variabile*), che è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo complessivo (∞^2); dunque nei punti di una curva razionale normale di un certo ordine $r \leq n-1$, la quale conterrà anche un punto unito fisso (3). La superficie luogo delle tangenti a questa curva verrà segata dall'S_{r-1} osculatore ad essa in quel punto unito fisso secondo una curva di ordine $r-1$ (4), che sarà anche unita rispetto alle stesse omografie (perchè intersezione di due varietà unite), e conterrà del pari un nuovo punto unito variabile. Analogamente si dimostrerebbe che gli altri $r-2$ punti uniti contenuti nello spazio S_r della curva C^r primitiva descrivono rispettivamente una C^{r-2}, una C^{r-3}, ... (tutte razionali normali), e infine una conica e una retta, passanti sempre per il punto unito fisso sulla curva C^r (e aventi ivi con quest'ultima curva contatti di ordini gradatamente decrescenti). In generale, se fra gli n punti uniti dello spazio S_{n-1} (5) ve ne sono k fissi, tutti gli n si distribuiranno secondo k aggruppamenti di questo stesso tipo (6). Imponendo ora a ciascun punto unito variabile di coincidere con quello fra

---

risultasse *misto*, noi potremmo sempre limitarci a tener conto del suo sottogruppo continuo più ampio (cfr. questi Rend., p. 234-235; e anche: Vessiot, Ann. Ec. Norm. Sup., 1892; p. 236).

(1) Dalle ricerche generali del sig. Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 681 e 713) risulta anzi che *ogni* gruppo continuo ∞^2 è integrabile; ma noi vogliamo vedere anche *come* si ottenga, nel nostro caso, il sottogruppo eccezionale ∞^1.

(2) Se le ∞^2 omografie avessero tutte gli stessi punti uniti, esse sarebbero permutabili, e ogni sottogruppo ∞^1 contenuto nel gruppo ∞^2 risulterebbe perciò eccezionale.

(3) Cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV, p. 1607 (per il caso $n=4$), e anche la mia Nota a p. 149 di questi Rend. (n. 3). Il gruppo ∞^2 non potrebbe subordinare su questa curva un solo gruppo ∞^1 di projettività, perchè se no sulla curva stessa vi sarebbero già *due* punti uniti fissi (comuni a tutte queste projettività); ed essendovi, oltre a questi, anche un (terzo) punto unito variabile, risulterebbero uniti per ogni omografia del gruppo ∞^2 tutti i punti della curva C^r, e quindi anche quelli dello spazio S_r in cui questa curva è contenuta.

(4) Più la tangente alla curva nello stesso punto unito, da contarsi $r-1$ volta.

(5) In questo ragionamento si suppone che l'omografia generale del gruppo ∞^2 non abbia che un numero finito di punti uniti (i quali saranno però tutti distinti; cfr. questi Rend., p. 155); ma il risultato vale anche in ogni altro caso.

(6) Si noti che due diversi fra questi aggruppamenti non possono corrispondere a uno stesso punto fisso, a meno che ogni omografia del gruppo non abbia infiniti punti doppi (cfr. ad es. Enriques, l. c., p. 1608).

i k punti fissi che sta sulla sua trajettoria (e basta che l'imponiamo ad uno, perche così avvenga per tutti), noi veniamo appunto a staccare dal gruppo complessivo ∞^2 un sottogruppo ∞^1, che è certamente eccezionale, perchè ogni gruppo ∞^2 di projettività in una forma semplice (o ente razionale) — gruppo che ammette necessariamente un elemento unito fisso ([1]) — contiene come sottogruppo eccezionale il fascio di omografie paraboliche con questo stesso (unico) elemento unito. Il gruppo ∞^2 considerato è dunque effettivamente integrabile ([2]).

« 2. Supponiamo ora che la superficie algebrica F contenente la curva Γ ammetta un gruppo transitivo anche tre o più volte infinito di trasformazioni projettive, e vediamo come si possa ancora trarne, per altra via, qualche risultato generale. — Ricordiamo perciò che ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive, è *razionale* (cfr. p. 159 di questi Rend.), e dà luogo perciò, in ogni sua rappresentazione piana, a un sistema lineare di curve (piane) mutato in sè stesso da un certo gruppo continuo di trasformazioni *Cremoniane*. Questo gruppo può sempre ridursi con un' ulteriore trasformazione Cremoniana (se già non è tale) a uno dei *tre* tipi seguenti ([3]):

1°) *Gruppo* ∞^8 *delle omografie, e suoi sottogruppi;*

2°) *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi* (ovvero: *gruppo delle inversioni rispetto ai circoli del piano*), *e suoi sottogruppi;*

3°) *Gruppo* ∞^{m+5} (*con m arbitrario*) *delle trasformazioni di Jonquières* (*di ordine m*) *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{m+1} *delle curve di ordine m con un punto base* $(m-1)^{plo}$ *e le* $m-1$ *tangenti fisse, e suoi sottogruppi;*

e noi possiamo anzi supporre ch'esso appartenga già a uno di questi stessi tipi, perchè se no tutto si ridurrebbe a modificare opportunamente la rappresentazione piana della superficie proposta (a sostituire cioè al primo sistema rappresentativo di essa un altro sistema, identico a questo dal punto di vista delle trasformazioni birazionali).

« Ma, nel secondo dei tre casi, noi possiamo ancora considerare il piano come projezione stereografica di una quadrica di S_3, per modo che i due

([1]) Cfr. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 569.

([2]) È chiaro come in questo caso (e anche in tutti gli altri casi di gruppi integrabili considerati nell'ultima mia Nota) risulti confermato il teorema del sig. Lie (op. cit., vol. I, p. 289; o anche: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen ...*, p. 532), che cioè ogni gruppo integrabile di trasformazioni projettive di uno spazio S_r deve lasciar fisso almeno un punto di questo spazio, e che per ogni S_k ($k=0,1,2,\dots r-2$), il quale sia unito per tutte le trasformazioni del gruppo, deve passare almeno un S_{k+1}, del pari unito per queste.

([3]) Cfr. Enriques, Rend. di quest'Acc., vol. II, 1° sem., p. 468.

punti fissi siano immagini delle generatrici di questa uscenti dal centro di projezione; e allora il gruppo considerato di trasformazioni Cremoniane darà luogo, su questa quadrica, a un gruppo di omografie (avremo cioè, nello spazio S_3 in cui la quadrica è contenuta, un gruppo di projettività trasformanti quest'ultima superficie in sè stessa). Nel terzo caso, potremo costruire un cono razionale normale di ordine m, appartenente a uno spazio S_{m+1}, e riferibile birazionalmente allo stesso piano in modo che alle sue sezioni iperplanari corrispondano precisamente le curve di ordine m con punto $(m-1)^{\text{plo}}$ dianzi considerate. E allora il gruppo considerato di trasformazioni di Jonquières si muterà in un gruppo di omografie su questo cono.

« Dunque: *Ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè stessa, si può trasformare birazionalmente in un piano, in una quadrica dello spazio* S_3, *o in un cono razionale normale di un certo spazio* S_{m+1}, *in modo che il gruppo considerato di omografie su di essa dia luogo rispettivamente a un gruppo di omografie nel piano, oppure a un gruppo di omografie dello spazio* S_3 *o* S_{m+1}, *le quali trasformino in sè stessa quella certa quadrica o quel cono razionale normale* (1).

« Questa stessa trasformazione birazionale muterà la curva Γ proposta in una certa curva Γ', piana (nel primo caso), oppure contenuta in una quadrica di S_3 o in un cono razionale normale di S_{m+1} (nel secondo o terzo caso). Le coordinate (omogenee) z_i di un punto variabile di questa nuova curva saranno in ogni caso funzioni razionali delle y_i, e così queste di quelle; di più, *ad ogni sostituzione lineare delle* y_i, *la quale determini una trasformazione projettiva della superficie proposta* F *in sè stessa, corrisponderà* (per il modo stesso in cui la trasformazione birazionale è stata fissata) *una sostituzione pure lineare delle* z_i. In particolare, i diversi gruppi di valori che le z_i potranno assumere in uno stesso elemento dell'ente algebrico dato (sul quale i coefficienti dell'equazione differenziale proposta si sono supposti razionali) si dovranno anche ottenere gli uni dagli altri con sostituzioni lineari. Indicati pertanto, nel primo caso, con z_1, z_2, z_3 tre rami (*Zweige*) particolari di queste funzioni (corrispondenti cioè a rami particolari y_i), è chiaro che le z saranno integrali dell'equazione differenziale lineare di 3° ordine:

$$\begin{vmatrix} z''' & z'' & z' & z \\ z_1''' & z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2''' & z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3''' & z_3'' & z_3' & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

(1) Questo risultato si può ritenere un'applicazione immediata di quelli ottenuti dal sig. Enriques (l. c.) sulla riduzione dei gruppi continui di trasformazioni Cremoniane nel

e che i coefficienti di quest' equazione, supposto ridotto all'unità uno qualunque di essi, ad es. quello di z''', saranno funzioni *razionali* nel campo prestabilito. Essi rimangono infatti numericamente invariati per ogni sostituzione lineare delle z_i, dunque anche per ogni sostituzione lineare delle y_i la quale determini una trasformazione projettiva della superficie F in sè stessa, e quindi certo per ogni operazione contenuta nel *Gruppo di razionalità* dell'equazione differenziale proposta (1).

« Nel secondo e nel terzo caso si giunge a un risultato perfettamente analogo (vale a dire a un' equazione differenziale lineare del 4° o dell'$(m+2)^{\text{simo}}$ ordine, sempre a cofficienti razionali), solo che nel secondo caso le soluzioni z_i saranno ancora legate da un' equazione algebrica omogenea di secondo grado, e nel terzo caso da un sistema di equazioni rappresentanti il cono considerato di S_{m+1} (un' equazione sola per $m=2$) (2).

« 3. Nel primo caso le (tre) z_i saranno dunque integrali indipendenti di un' equazione differenziale lineare di 3° ordine, a coefficienti razionali; ma non saranno più legate, naturalmente, da nessuna equazione algebrica a coefficienti costanti (se no la curva Γ sarebbe essa stessa algebrica). E, in generale, non si potrà dirne altro. Questa nuova equazione differenziale potrà avere come gruppo di razionalità l'intero gruppo ∞^8 delle omografie piane, ovvero un suo sottogruppo qualsiasi (3), e per ciascuno di questi casi deve esistere e si potrebbe costruire una particolare teoria di integrazione (4).

---

piano a (tre) tipi determinati (cfr. anche la Nota succssiva a p. 532 del vol. cit. di questi Rend., e la mia Nota a p. 149 di questo vol.). Il sig. Enriques aveva anzi già notato come queste sue ricerche si potessero mettere in relazione con quelle sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse (cfr. Atti Ist. Ven, ser. 7ª, t. IV, p. 1592).

(1) Ed è questa appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione razionale delle soluzioni z e loro derivate sia anche funzione razionale della variabile indipendente (cfr. Vessiot, Mem. cit., p. 231). È bene notare però che si tratta sempre di invariabilità *numerica*, non *formale;* un fatto questo che anche nella memoria classica e così importante del Sig. Vessiot non è messo forse abbastanza in evidenza (cfr. ad es. le lez. litogr. del Sig. Klein: *Einleitung in die höhere Geometrie*, II, p. 299).

(2) Queste nuove equazioni differenziali sarebbero dunque *trasformate razionali* dell'equazione differenziale proposta. Per calcolarle effettivamente, bisognerà conoscere, caso per caso, le formule che servono a trasformare la superficie data F in un piano, in una quadrica, o in un cono razionale, nel modo già stabilito.

(3) O anche il gruppo ∞^9 di tutte le sostituzioni lineari ternarie, quando si tenga conto altresì della possibile esistenza di un fattore esponenziale comune a tutte le soluzioni (e che si potrà determinare con una quadratura).

(4) I gruppi continui di omografie piane sono stati determinati tutti dal sig. Lie (cfr. ad es.: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, cap. 5°; o anche Lie-Scheffers: op. cit., cap. 11). Dalle sue ricerche risulta in particolare che il gruppo ∞^8 di tutte queste omografie (e anche il gruppo analogo per uno spazio qualunque) è un gruppo *semplice*

« Nel secondo caso le (quattro) z_i saranno i prodotti di due coppie di soluzioni distinte di due equazioni differenziali lineari di 2° ordine, i cui coefficienti si potranno ottenere razionalmente, quando al campo di razionalità primitivo si sia aggiunta una certa radice quadrata (cfr. il n. 5 della mia Nota a p. 292 di questi Rend.). In casi particolari l'integrazione di queste due equazioni potrà subire ulteriori semplificazioni.

« Nel terzo caso infine, tutte le z_i meno una (ad es. per $i = 1, 2, \ldots m+1$) dovranno soddisfare a una stessa equazione differenziale lineare di ordine $m+1$, a coefficienti razionali, la quale ammetterà come soluzioni le potenze m^{sime} degli integrali di una determinata equazione differenziale lineare di 2° ordine, pure a coefficienti razionali. Siamo dunque ricondotti all'integrazione di quest' ultima equazione [1]. — La z_{m+2} si potrà poi determinare, conosciute le soluzioni precedenti, con una serie di quadrature [2].

« 4. Ci rimane ora a considerare il caso in cui la superficie F ammette soltanto un gruppo *intransitivo,* due o più volte infinito, di trasformazioni projettive [3]. Vi è allora su di essa un fascio (non necessariamente razionale) di curve razionali normali C^r, appartenenti a spazi S_r $(r < n-1)$,

(privo cioè di sottogruppi eccezionali — teorema già comunicato nei Math. Ann., vol. XXV, p. 130 —); sicchè l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 3° ordine (e anche di ordine superiore) del tipo più generale è un problema *irriducibile* (che non si può ricondurre cioè a problemi meno elevati), quando solo si prescinda da quella semplificazione, forse più apparente che reale, che proviene dal fatto che il gruppo ∞^9 di tutte le sostituzioni lineari ternarie (e analogamente per più variabili) contiene come sottogruppo eccezionale il corrispondente *gruppo lineare omogeneo speciale,* caratterizzato dai determinanti unità, il quale è appunto *isomorfo* a quello di tutte le omografie (piane, o di un opportuno S_r). — I diversi casi che si possono presentare per le equazioni differenziali lineari di 3° ordine sono stati studiati nella Mem. cit. di Vessiot (pag. 265 e seg.), dove è anche osservato che, fatta astrazione da quella quadratura che corrisponde al passaggio dal gruppo ∞^9 a quello semplice ∞^8, il problema si può ridurre, anche nel caso generale, all'integrazione di un'equazione differenziale (non lineare) di 2° ordine (come anche a un'equazione differenziale lineare di 2° ordine si può sempre sostituire un'equazione non lineare di 1° ordine, e precisamente un'*equazione di Riccati*).

(1) Questa è infatti la generalizzazione, per m qualunque, del caso di una curva contenuta in un cono quadrico di S_3 $(m=2)$. Nello spazio $z_{m+2} = 0$, le $z_1 z_2, \ldots z_{m+1}$ sarebbero infatti coordinate di un punto (variabile) di una curva razionale normale di ordine m. — Anche qui potrebbero presentarsi, in casi particolari, ulteriori semplificazioni; così p. e. le z ,.... z_{m+1} sarebbero tutte razionali quando il gruppo considerato di omografie sul cono si componesse di sole omologie.

(2) Come nuova (ultima) soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine $m+2$, della quale sarebbero già note $m+1$ soluzioni indipendenti.

(3) In questo caso non si può più asserire infatti che la superficie F sia *razionale,* e questa è stata appunto la base di tutto il ragionamento dei due n^i. precedenti. Quello però che si è detto al n. 1 per i gruppi ∞^2 non escludeva il caso di un gruppo intransitivo (nel qual caso però un'omografia generale deve sempre avere infiniti punti doppi. Cfr. anche la nota (4) a p. 153 di questi Rend.).

ciascuna delle quali è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo. Se quest'ultimo è solo ∞^2, esso è certo integrabile (e sarebbe anzi simile a un gruppo ∞^2 di projettività binarie); in ogni altro caso noi potremo imporre ai punti di una particolare curva C^r di essere tutti uniti. Se questa condizione è soddisfatta dalla sola trasformazione identica [1], l'integrazione dell'equazione differenziale proposta potrà ricondursi a quella di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine (perchè i diversi valori che le y_i assumono in uno stesso elemento dell'ente algebrico dato si potranno far dipendere razionalmente da un parametro, che potrà subire a sua volta un certo gruppo di sostituzioni projettive). Se invece la stessa condizione è soddisfatta da tutto un gruppo infinito di projettività (gruppo che sarà certo eccezionale entro quello primitivo), è facile riconoscere che le omografie così subordinate sulle (altre) curve C^r dovranno essere tutte paraboliche (perchè se no ogni omografia dovrebbe avere, entro ciascun S $, r+1$ punti doppi indipendenti, appartenenti (in generale) ad altrettanti spazi di punti uniti, i quali tutti dovrebbero incontrare l'S_r della prima curva, che pure sarebbe luogo di punti uniti. E poichè due spazi (distinti) di punti uniti non possono mai incontrarsi, a meno di non esser contenuti in uno stesso spazio più ampio e pure luogo di punti uniti, se ne trae subito che una tale omografia non potrebbe essere diversa dall'identità). Di più, sopra ogni curva C^r le diverse omografie paraboliche così subordinate avranno tutte lo stesso punto unito (perchè è questo l'unico caso possibile di un gruppo costituito da sole omografie paraboliche). E questi punti uniti formeranno una curva (direttrice) d, che sarà unita anche rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo primitivo [2]. Infatti, se una projettività P di questo gruppo la mutasse in un'altra direttrice d', indicata con Q una projettività qualunque del sottogruppo eccezionale dianzi considerato (rispetto a cui d è certo curva unita), sarebbe $P^{-1}QP$ (la *trasformata* cioè di Q mediante P) una proiettività di questo stesso sottogruppo, la quale muterebbe d' in sè stessa; e ciò è assurdo, a meno che il prodotto $P^{-1}QP$ non sia l'identità, nel qual caso però anche Q dovrebbe coincidere colla trasformazione identica (mentre invece si era detto di prenderla ad arbitrio entro un gruppo almeno ∞^1).— Tutte le omografie del gruppo proposto lasciano

(1) Nel caso (supposto possibile) di un gruppo complessivo *misto*, questa condizione sarebbe soddisfatta da un numero finito di projettività (una per schiera), formanti un gruppo discontinuo finito; e queste projettività dovrebbero subordinare sulle altre curve C^r (per ragioni che si vedranno in seguito) omografie *paraboliche*. Ma poichè in una forma semplice non esistono gruppi finiti di tali omografie, così questo caso non potrà certo presentarsi.

(2) Questa curva potrebbe in particolare ridursi ad un punto (comune a tutte le curve C^r); ed è chiaro allora che un tal punto dovrebbe anche essere unito rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo complessivo (supposto almeno ∞^2, — o anche ∞^1, ma continuo —).

dunque fissa la direttrice d; e se anche le projettività subordinate sulle singole curve C^r non sono in generale paraboliche, vi sarà certo un sottogruppo (eccezionale), di dimensione inferiore soltanto di un' unità, composto di sole omografie così fatte. Queste omografie saranno tutte permutabili, e perciò il gruppo proposto sarà in ogni caso *integrabile* (quando non sia simile a quello ∞^3 delle projettività binarie (1) (2)).

« Dunque: *Se la curva* Γ *definita dall'equazione differenziale proposta è contenuta in una superficie algebrica trasformata in sè stessa soltanto da un gruppo intransitivo di omografie, l'equazione differenziale è certo integrabile per quadrature, a meno che questo gruppo non sia precisamente* ∞^3, *e simile al gruppo delle projettività binarie. In quest'ultimo caso occorrerà, in generale, l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine.*

« Come risultato ultimo, abbiamo dunque che *l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di ordine qualsiasi, la quale definisca una curva contenuta in una superficie algebrica, può sempre ricondursi, astrazion fatta da quadrature e da operazioni algebriche* (*e quando queste operazioni non bastino*), *a quella di*:

1°) *Un' equazione differenziale lineare del* 3° *ordine;* oppure di:

2°) *Una o due equazioni differenziali lineari di* 2° *ordine.* — Questo secondo caso si presenta ogni qual volta la superficie in discorso contiene uno o rispettivamente due fasci *razionali* di curve, tali che le curve

(1) Anche qui, per ragioni analoghe a quelle accennate in una nota prec., non può presentarsi il caso di un gruppo complessivo *misto*.

(2) Queste considerazioni completano il cenno brevissimo sui gruppi intransitivi di trasformazioni projettive di una superficie algebrica in sè stessa, già contenuto in una nota a p. 159 di questi Rend.: *Se una superficie algebrica ammette un gruppo intransitivo, due o più volte infinito, di trasformazioni projettive, vi è sempre una curva* (*direttrice*) *luogo di punti uniti per tutte le trasformazioni del gruppo* (*e che potrà anche, in particolare, ridursi ad un punto;* ad es. nel caso del cono), *oppure vi è un fascio razionale di direttrici, sulle quali il gruppo* (*che sarà in tal caso* ∞^3) *opera come sui punti di una punteggiata.* La direttrice uscente da un punto qualunque della superficie è precisamente il luogo dei punti che risultano uniti sulle singole curve C^r, quando a quel primo punto si imponga di essere unito. — Del resto, si può anche vedere direttamente che le direttrici *minime* (ossia di ordine minimo) della nostra superficie non possono essere (come sulle rigate) che in numero finito, oppure ∞^1 (perchè se fossero almeno ∞^2, si potrebbe ancora abbassarne l'ordine, imponendo a una di esse di contenere due punti distinti di una stessa curva C^r, e quindi tutta questa curva. Nè è possibile che non vi siano affatto direttrici, perchè le projettività del gruppo considerato danno facilmente (coi loro punti uniti) modo di costruirne). Se le direttrici minime sono ∞^1, il gruppo di omografie opera su di esse come sui punti di una curva, ed è quindi al più ∞^3. Se invece le direttrici minime sono in numero finito, lo stesso gruppo di omografie, se è continuo (o, se è misto, ogni gruppo continuo in esso contenuto) deve ammetterle tutte come curve di punti uniti, dal che segue senz'altro che non può esservene che una sola (o al più due, quando il gruppo fosse ∞^1).

di ciascun fascio siano trasformabili l'una nell'altra con operazioni di un gruppo ∞^3 simile a quello delle projettività binarie (e contenuto nel gruppo complessivo di tutte le trasformazioni projettive della stessa superficie in sè medesima) „.