Gino Fano

Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque

Memorie R. Acc. Sci. Torino, Serie 2, Vol. **41** (1893), p. 335–382

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1893_2>

SOPRA LE CURVE DI DATO ORDINE

E DEI MASSIMI GENERI

IN UNO SPAZIO QUALUNQUE

MEMORIA

DI

GINO FANO

Approvata nell'Adunanza del 25 Giugno 1893 (*).

Al concorso aperto dall'Accademia delle Scienze di Berlino pel conferimento del terzo premio STEINER (sopra un tema relativo alla teoria delle curve sghembe algebriche (1)) si presentarono, com'è noto, due celebri Memorie; una dell'HALPHEN (2), l'altra del NOETHER (3): pregevolissime entrambe, n'ebbero anzi diviso il premio (4). E fra i risultati contenuti in queste Memorie è certo importantissimo il teorema, che *le curve sghembe di dato ordine e* GENERE MASSIMO *sono tutte contenute in una quadrica* (5). Questa proposizione è stata poi estesa dal sig. CASTELNUOVO alle curve di uno spazio lineare a un numero qualunque r di dimensioni (6), e in luogo della quadrica compare in questo caso più generale la rigata razionale normale di ordine $r - 1$ (7) (o anche, per $r = 5$, la superficie omaloide F_2^4 di VERONESE (*Mem. della R. Accad. dei Lincei*, 3°, XIX)). Con quest'estensione si può ritenere esaurita la determinazione delle varie curve di genere massimo (π) di uno spazio qualunque S_r (e di ordine $> 2r$); appunto perchè queste curve ne risultano contenute

(*) Questa Memoria è tratta dalla Dissertazione di Laurea presentata dall'autore alla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino nel giugno 1892.

(1) " *Irgend eine auf die Theorie der höheren algebraischen Raumcurven sich beziehende Frage von* " *wesentlicher Bedeutung vollständig erledigen* ".

(2) *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques:* un estratto di questa Memoria era già stato pubblicato nei " Compt. Rend. de l'Ac. des Sc. " (t. 70, 1870). All'HALPHEN è pure dovuta la determinazione del numero minimo di punti doppi apparenti (ossia del massimo genere) che può avere una curva sghemba di dato ordine.

(3) *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Berlin, 1883).

(4) V. " Sitzungsber der Berl. Akad. ", 1882; p. 735 (öffent. Sitz. vom 29 Juni).

(5) Proposizione già accennata da HALPHEN nei Compt. Rend. (1870).

(6) Cfr. la Mem. *Ricerche di Geometria sulle curve algebriche;* n^i 28 e seg. (" Atti dell'Accad. di Torino ", vol. XXIV). In questo stesso lavoro è anzi stato determinato per la prima volta il *genere massimo* di una curva di dato ordine e appartenente a un dato spazio qualsiasi.

(7) Della quale appunto quella quadrica (dello spazio S_3) è caso particolare.

in superficie (razionali) molto semplici e di proprietà ben note, sulle quali sarà sempre facile costruirle. La questione che si presenta ora invece come — dirò così — successiva, e che sembra anche meritevole di essere studiata, è quella di fare una ricerca analoga anche per le curve di genere $\pi - 1$, $\pi - 2$,..... determinando se e quando anche queste possano stare sulla rigata R^{r-1} (o, per $r = 5$, sulla F_2^4 di Veronese); ovvero, quando non vi stiano, in quali altre superficie (possibilmente semplici) esse siano contenute. E tale ricerca costituisce appunto l'oggetto principale di questo lavoro. Già prima ch'io cominciassi ad occuparmene lo stesso sig. CASTELNUOVO mi aveva detto di ritenere che le curve di genere $\pi - 1$ dovessero stare necessariamente — almeno da un certo ordine in poi — su di una superficie a sezioni ellittiche o razionali. La proposizione sussiste effettivamente, e si vedranno anzi in seguito enumerati i varî casi che queste curve possono presentare. Uno studio analogo sarà fatto anche per le curve di genere $\pi - 2$; più in succinto però, perchè molte loro proprietà si potranno poi stabilire facilmente e con ragionamenti affatto identici a quelli già usati per le curve di genere $\pi - 1$. E sarebbe forse interessante il cercar di estendere questi stessi risultati anche alle curve di genere $\pi - 3$, $\pi - 4$,..... e, in generale, $\pi - k$; ma di questo (come dico pure alla fine del § 8) non intendo per ora occuparmi.

A questa ricerca fa seguito, come appendice, una breve Nota, nella quale, applicando quel concetto, ormai notissimo, ma sempre fecondo (1) a cui è informata la *Neue Geometrie des Raumes* di GIULIO PLUECKER e a cui pure si informarono in seguito parecchi lavori di altri scienziati — e primi fra tutti quelli del sig. KLEIN —, si deducono dai risultati ricordati e ottenuti in questo lavoro alcune proprietà di certe rigate e congruenze di rette appartenenti al nostro spazio (2).

§ 1.

Genere massimo di una curva che sta sopra un dato numero di quadriche.

1. Il signor CASTELNUOVO dopo aver determinato nelle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, XXIV) il *genere massimo* di una curva di ordine n (C^n) *appartenente* allo spazio S_r (3), dimostra che:

(1) " *Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer* $M_4^{(2)}$ *des* R_5 " (Cfr. F. KLEIN: *Ueb. Liniengeometrie und metrische Geometrie*; " Math. Ann. ", V. p. 261).

(2) Mi è caro rinnovare qui i più vivi ringraziamenti al prof. C. SEGRE, che mi iniziò allo studio delle curve algebriche e della Geometria sopra queste (nelle sue lezioni di *Geometria sopra un ente algebrico*, dettate nell'Università di Torino l'anno acc. 1890-91), e al prof. G. CASTELNUOVO dell'Università di Roma, che volle anche gentilmente dirigermi in queste ricerche.

(3) Questo *genere massimo* (che noi in seguito indicheremo sempre colla lettera π) egli lo trova espresso da

$$\chi\left\{n - \frac{r+1}{2} - \chi\,\frac{r-1}{2}\right\}$$

dove χ è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$ (cfr. loc. cit., 27). Questo stesso risultato fu poi ridimostrato, circa un anno più tardi, dal prof. E. BERTINI nella sua Nota: *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica* (" Atti dell'Accad. di Torino ", XXVI). In questo lavoro si

Per una curva di S_r *d'ordine* $n \geq 2r$ *e del massimo genere passano* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche linearmente indipendenti;* e ogni altra quadrica passante per una tal curva appartiene al sistema lineare di quelle. — La prima parte dell'enunciato è vera anche se l'ordine della curva è inferiore a $2r$; ma per questa curva potranno passare allora anche più di $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti (1).

Da questo risultato egli deduce poi che:

Se $n > 2r$, *la curva d'ordine* n *e di genere massimo di* S_r *sta in una superficie a due dimensioni d'ordine* $r-1$; superficie che, come sappiamo, è sempre rigata se r è diverso da 5 (2), ma può non esserlo nel caso di $r=5$ (superficie di Veronese) (3). *Questa superficie è comune a tutte le quadriche passanti per quella curva*, e costituisce anzi precisamente la *varietà base* del loro sistema lineare (4).

La dimostrazione che il sig. Castelnuovo dà di quest'ultima proposizione si applica anche *a qualsiasi curva di* S_r *di ordine* $n > 2r$ *per la quale passino* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche indipendenti* (sia o non sia questa curva di genere massimo) (5) (6).

---

trovano anche generalizzate alcune delle proprietà che condussero il Castelnuovo a quella determinazione, e ne sono accennate alcune fra le possibili applicazioni.

Non occorre avvertire che il *genere massimo* da noi indicato con π è sempre funzione dell' ordine n della curva e della dimensione r dello spazio cui essa appartiene. Per brevità ci asteniamo dall'usare per questo una notazione più espressiva, scrivendo ad es. $\pi \rbrace n, r \lbrace$; e ciò perchè, anche in seguito, non ci sembra vi sia pericolo di confusione.

(1) Ci sia concesso, ora ed in seguito, di parlare semplicemente di *quadriche indipendenti*, sottintendendo per brevità il *linearmente.*

(2) Cfr. Del Pezzo: *Sulle superficie dell'*n^o *ordine immerse nello spazio* S_{n+1} (" Rendiconti della R. Accad. di Napoli ", 1885).

(3) *La superficie omaloide normale a due dimensioni del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* (" Mem. della R. Acc. dei Lincei ", serie 3ª, vol. XIX, 1883-84).

(4) Nel caso di una superficie rigata, come osserva anche il sig. Castelnuovo, il numero χ aumentato di un'unità dà il numero dei punti in cui la curva considerata incontra le varie generatrici di quella stessa rigata. Però, per le curve il cui ordine è un multiplo di $r-1$ aumentato di una unità, questo stesso numero può anche esser dato dalla somma $\chi+2$. Segando infatti la rigata R^{r-1} con una varietà M^k_{r-1} che non le sia tangente in alcun punto, ma passi per $r-2$ sue generatrici, otteniamo come intersezione (residua) una curva di ordine $n=(k-1)(r-1)+1$ incontrata da ogni generatrice in k punti; e perciò, per una nota formola, di genere $\binom{k-1}{2}(r-1)$, cioè appunto di genere π. E il numero χ, in questo caso precisamente uguale a $\frac{n-r}{r-1}$, vale soltanto $k-2$ (onde $k=\chi+2$).

La formola cit. è quella data dal sig. Segre nella Nota: *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (" Rendic. R. Accad. dei Lincei ", 1887), e da lui stesso poi generalizzata nella Nota successiva (stessi Rendic.): *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi.*

(2 novembre) L'osservazione contenuta in questa nota è stata fatta anche recentemente dal sig. Castelnuovo, in un lavoro inserto nei " Rend. di Palermo " (t. VII, p. 97).

(5) Questa sola proprietà (l'essere contenuta cioè in $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti) basta infatti per concludere che le n intersezioni della curva C^n con un S_{r-1} (intersezioni che possiamo ritenere ad r ad r indipendenti) non imporranno certo alle quadriche di quest'ultimo spazio che le contengono più di $2r-1$ condizioni distinte. E il sig. Castelnuovo fa vedere appunto (cfr. loc. cit.: 30) che in tal caso, se $n > 2r$, quelle n intersezioni dovranno stare sopra una curva razionale normale di ordine $r-1$, che sarà pur contenuta a sua volta in tutte le quadriche passanti per quegli stessi n punti. E dalla curva C^{r-1} di S_{r-1} si risale poi subito alle superficie F^{r-1} di S_r.

(6) Questi risultati ottenuti dal sig. Castelnuovo e qui ricordati si possono anche estendere al

2. Una curva di S_r la quale stia sopra meno di $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti non potrà dunque essere di genere massimo (π)— e non starà sopra una rigata razionale normale, nè sulla superficie di Veronese (se $r=5$) —.

Si presenta dunque, di per sè, la questione: *Sapendo che per una certa curva* C_p^n *appartenente a* S_r *passano solo* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti (o almeno non ne passano di più), determinare per il genere* p *di questa stessa curva un limite superiore* (possibilmente diverso da π, e precisamente inferiore a questo, se $\delta > 0$).

A questa domanda si può rispondere facilmente, con un ragionamento analogo a quello con cui il Castelnuovo giunse alla determinazione del genere π. E noi dimostreremo precisamente che:

Il genere p *di una curva normale* (1) *d'ordine* n *appartenente a* S_r *per la quale passino non più di* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti non può mai superare il limite*

$$\chi_\delta \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi_\delta \frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi_\delta - 1 \right\} \delta$$

dove χ_δ *è il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-r-\delta}{r-1}$.

Questo risultato comprenderà come caso particolare ($\delta = 0$) quello già ottenuto dal sig. Castelnuovo.

Infatti, per le nostre ipotesi, la serie lineare (di ordine $2n$) segata sulla curva C_p^n dal sistema di tutte le quadriche di S_r sarà di dimensione

---

caso in cui, invece di quadriche, si vogliano considerare varietà pure di dimensione $r-1$, ma di un ordine qualunque $k \geq 2$. E si ha precisamente:

Per ogni curva appartenente ad S_r *e del genere massimo passano almeno*

$$\binom{r+k}{k} - \binom{k+1}{2} r + \binom{k}{2} - 1$$

varietà M_{r-1}^k *linearmente indipendenti.* Indicando questo numero per brevità con (r, k), possiamo aggiungere:

Quando l'ordine della curva di genere massimo è superiore a $k(r-1)$ *per essa passano precisamente* (r, k) *varietà* M_{r-1}^k *indipendenti;* e ogni altra M_{r-1}^k che la contiene appartiene al sistema lineare di queste. La dimostrazione si può fare per induzione completa da k a $k+1$, osservando che le M_{r-1}^k passanti per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r e per un dato S_{r-1} (di questo S_r) sono tante quante le M_{r-1}^{k-1} che contengono quella stessa curva. E infine:

Se per una curva appartenente ad S_r *e di ordine* $n > k(r-1)+2$ *passano* (r, k) *varietà* M_{r-1}^k *indipendenti, questa curva starà su di una superficie razionale normale di ordine* $r-1$ *comune a tutte quelle varietà.* Questa proposizione si applica in particolare alle curve di genere massimo; da essa deduciamo altresì che, se una curva di S_r è contenuta in (r, k) varietà indipendenti di un certo ordine k, ed è a sua volta di ordine $> k(r-1)+2$, essa dovrà anche stare sopra almeno (r, k') varietà indipendenti di ogni altro ordine $k' \geq 2$.

Anche le ricerche che andremo ora facendo per curve contenute in sistemi lineari di quadriche di dimensione inferiore a $\binom{r-1}{2} - 1$ potrebbero estendersi al caso di sistemi di varietà M_{r-1}^k; ma già il calcolo analogo a quello che faremo nel n° 2 riuscirebbe molto complicato; ci basti quindi di aver accennata la possibilità di questa estensione.

(1) Si potrebbe anche omettere questa restrizione, e supporre la curva normale per un S_{r+i}, modificando solo opportunamente il limite superiore che segue. Ho preferito tuttavia dare al teorema questa forma (più semplice) perchè sarà solo a curve normali che dovremo applicarlo. Si può anzi ritenere, come sappiamo, che una curva speciale (di quelle non speciali non avremo ad occuparci) sia anche, *in generale*, una curva normale.

$$d \geq \binom{r+2}{2} - \binom{r-1}{2} + \delta - 1$$

ossia

$$d \geq 3r + \delta - 1.$$

Supponiamo che questa serie g_{2n}^d sia *speciale*. Sarà allora speciale — perchè contenuta in quest'ultima — anche la g_n^r segata su C_p^n dagli iperpiani (S_{r-1}) di S_r, e speciale la curva stessa. Essendo questa normale, ogni gruppo di quella g_n^r imporrà a un gruppo della serie *canonica* (g_{2p-2}^{p-1}) che debba contenerlo un numero μ_1 di condizioni precisamente uguale a $n - r$. D'altra parte, se indichiamo con μ_2 il numero (minimo) delle condizioni imposte pure da un gruppo di g_n^r a un gruppo della serie residua $g_{2p-2-n}^{p-n+r-1}$ che debba contenerlo (e di gruppi così fatti ve ne saranno certo) avremo, per una delle relazioni stabilite dal Castelnuovo (1),

$$d \leq 2n - (\mu_1 + \mu_2)$$

(e ciò risulta anzi evidente, quando si pensi al significato della somma $\mu_1 + \mu_2$); e quindi, *a fortiori,*

$$3r + \delta - 1 \leq 2n - (\mu_1 + \mu_2)$$

ossia

$$\mu_1 + \mu_2 \leq 2n - 3r - \delta + 1.$$

E tenendo conto infine della relazione $\mu_1 = n - r$ ossia

$$(\gamma_1) \qquad \mu_1 = n - (r-1) - 1$$

se ne deduce quest'altra:

$$(\gamma_2) \qquad \mu_2 \leq n - 2(r-1) - \delta - 1.$$

Osserviamo poi che sarà precisamente $2n - (\mu_1 + \mu_2)$ la dimensione della serie completa di ordine $2n$ che contiene la g_{2n}^d — se questa già non è completa (2) — e quindi le varie coppie di gruppi di g_n^r (3).

Se si ha poi ancora

$$(\alpha_3) \qquad \mu_1 + 2\mu_2 - (r-1) < p$$

si dimostra facilmente (cfr. Castelnuovo, l. c., n^i 25 e seg.; Bertini, n^i 5 e seg.) che anche a un gruppo della serie $g_{2p-2-2n}^{p-(\mu_1+\mu_2)-1}$ residua della $g_{2n}^{2n-(\mu_1+\mu_2)}$ si può imporre di contenere un gruppo arbitrario G_n di g_n^r; e che, indicando con μ_3 il numero minimo di

---

(1) La relazione generale (loc. cit., 28) sarebbe

$$\rho \leq kn - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_k)$$

dove ρ è la dimensione della serie lineare segata su C_p^n dal sistema di tutte le M_{r-1}^k di S_r. Questa formola si applica qui per $k = 2$.

(2) E sarebbe completa appunto nel caso estremo $d = 2n - (\mu_1 + \mu_2)$.

(3) Di queste *serie multiple* di una data serie lineare si è occupato recentemente (e in modo più particolare) lo stesso sig. Castelnuovo, nella Nota: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (" Rend. di Palermo ", t. VII). In questo lavoro si trova anche determinato nuovamente il valore del genere massimo π, per una via sostanzialmente non diversa, ma forse più semplice, di quella tenuta nelle *Ricerche* (2 novembre).

punti di un tal gruppo che devono stare nel primo, perchè questo lo contenga per intiero, si dovrà avere

$$\mu_3 \leq \mu_2 - (r-1)$$

ossia

$$(\gamma_3) \qquad \mu_3 \leq n - 3(r-1) - \delta.$$

Segue pure da ciò che le terne di gruppi G_n sono a lor volta *gruppi speciali*, e appartengono precisamente a una serie speciale *completa* di ordine $3n$ e dimensione $3n - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

E se ora estendiamo alle $\mu_4 \ldots\ldots \mu_k \ldots\ldots$ le definizioni date per μ_1, μ_2, μ_3, nell'ipotesi, s'intende, che siano soddisfatte le successive relazioni

$$(\alpha_4) \qquad \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - (r-1) < p$$

$$\ldots\ldots \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(\alpha_k) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-2} + 2\mu_{k-1} - (r-1) < p \text{ (1)}$$

troveremo facilmente che anche per queste nuove μ si ha in generale

$$\mu_i \leq \mu_{i-1} - (r-1)$$

e quindi

$$(\gamma_4) \qquad \mu_4 \leq n - 4(r-1) - \delta - 1$$

$$(\gamma_5) \qquad \mu_5 \leq n - 5(r-1) - \delta - 1$$

$$\ldots\ldots \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(\gamma_k) \qquad \mu_k \leq n - k(r-1) - \delta - 1$$

dalle quali relazioni si deduce immediatamente

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \leq (k+1)\, n - \binom{k+2}{2}(r-1) - k\delta - (k+1)$$

ovvero anche

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \leq (k+1)\left\{ n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k\delta.$$

Il numero k si supponga ora precisamente tale che, essendo pur verificate le relazioni α_i) per $i \leq k$, non lo sia più la α_{k+1}); ma si abbia invece

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \geq p \text{ (2)}.$$

---

(1) Supposto cioè che si verifichi la (α_4), chiameremo μ_4 il numero minimo di punti di G_n che devono trovarsi in un gruppo della serie residua della $g_{3n}^{3n-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}$ perchè questo gruppo contenga tutto G_n medesimo, ecc. ecc.

(2) È chiaro che un valore così fatto di k dovrà sempre esistere (cfr. anche Castelnuovo, loc. cit.). Potrebbe però essere $k = 2$ (non essere cioè già più soddisfatta nemmeno la (α_3)), — e allora dovremmo naturalmente fermarci alla relazione (γ_2) —.

Allora da queste ultime due relazioni seguirà immediatamente

$$(a) \qquad p \leq \left\{ k + 1 \right\} \left\{ n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k\delta$$

e questa stessa disuguaglianza sarà anche soddisfatta, per $h = 1$, se la g^d_{2n} è *non speciale.* In tal caso si avrebbe infatti, per un noto teorema, $p \leq 2n - d$; e quindi, *a fortiori,* $p \leq 2n - 3r + 1 - \delta$.

Esisterà dunque certo, in ogni caso, un valore di k soddisfacente alla relazione (a). Ma il secondo membro di questa stessa relazione può scriversi anche così:

$$\frac{2}{r-1} \left\{ (k+1)\frac{r-1}{2} \left(n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} - \delta \right) + \frac{r-1}{2}\delta \right\}$$

e diventa perciò massimo quando i due fattori

$$(k+1)\frac{r-1}{2} \quad \text{e} \quad n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} - \delta$$

la cui somma è costante sono uguali fra loro ed eguali quindi entrambi a

$$\frac{1}{2}\left\{ n - \frac{r+1}{2} - \delta \right\} = \frac{1}{2}\left\{ n - r - \delta + \frac{r-1}{2} \right\}.$$

Questo si otterrebbe prendendo $k + 1 = \frac{n-r-\delta}{r-1} + \frac{1}{2}$; ma dovendo nel nostro caso k (e quindi $k+1$) essere un numero intero, basterà che prendiamo per esso l'intero più vicino al valore medesimo $\frac{n-r-\delta}{r-1} + \frac{1}{2}$, ossia *il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-r-\delta}{r-1}$ (1).

Indicando perciò questo stesso intero con χ_δ, è chiaro che si dovrà avere in ogni caso

$$p \leq \chi_\delta \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi_\delta \frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi_\delta - 1 \right\} \delta$$

e questo è appunto quanto si voleva dimostrare.

Come conseguenza (sebbene quasi evidente) di questo teorema e di quelli ricordati al n° 1, abbiamo:

Una curva di S_r *la quale sia di ordine* $n > 2r$ *e di genere*

$$p > \chi_1 \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi_1 \frac{r-1}{2} \right\} - \chi_1 + 1$$

(dove χ_1 *è il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-r-1}{r-1}$*) sta sempre su di una superficie di ordine* $r - 1$ *comune a tutte le quadriche che la contengono.*

(1) Se $\frac{n-r-\delta}{r-1}$ fosse precisamente un numero intero, l'espressione considerata di sopra assumerebbe lo stesso valore massimo per $k+1$ eguale a questo intero, o anche al successivo (all'intero cioè immediatamente superiore).

§ 2.

Sull'ordine di una curva per la quale deve passare un dato numero di quadriche.

3. Il risultato semplicissimo ottenuto nel § precedente ci permetterebbe di stabilire subito un *minimum* per il numero delle quadriche che passano per una curva di dato ordine e genere e appartenente a un dato spazio (o almeno di stabilire un tal *minimum* in modo nuovo, se la curva è non speciale). Ma per noi ha molto maggior importanza lo studio della questione seguente: *Determinare possibilmente un ordine dal quale in su una curva di* S_r, *supposta normale* (1) *e di genere* $\pi - k$ (*dove* k *ha un valore assegnato ad arbitrio*) (2), *stia necessariamente sopra almeno* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti.* Di una tale ricerca ci converrà ora occuparci.

Sarà condizione *sufficiente* per quanto si richiede che si abbia:

$$\pi - k > \chi' \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi' \frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi' - 1 \right\} \left\{ \delta + 1 \right\}$$

dove n è l'ordine della curva e χ' indica il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}$ (3).

È chiaro che, quando nessuno dei numeri

$$\frac{n-r-\delta-1}{r-1}, \quad \frac{n-r-\delta}{r-1}, \ldots\ldots \frac{n-r-1}{r-1}$$

sia intero, lo stesso χ' è anche il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$, e perciò la relazione scritta testè — sostituendo a π il suo valore — si riduce subito a quest'altra

$$\left\{ \chi' - 1 \right\} \left\{ \delta + 1 \right\} > k$$

ossia $\chi' > \frac{k}{\delta+1} + 1$. Se dunque indichiamo con l il resto della divisione di k per $\delta + 1$, basterà che sia $\chi' \geq \frac{k-l}{\delta+1} + 2$, e per questo è sufficiente (e anche necessario) $\frac{n-r}{r-1} > \frac{k-l}{+1} + 1$, ossia

$$n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + 2. \qquad (1)$$

---

(1) Questa condizione la troveremo però, nella maggior parte dei casi, già di per sè soddisfatta (cfr. anche la nota seg.).

(2) Il genere di questa curva sarà dato dunque dall' espressione $\chi \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi \frac{r-1}{2} \right\} - k$ dove χ ($= \chi_0$) indica il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$. Avvertiamo poi che la curva stessa sarebbe *certo* normale quando il suo ordine superasse un certo limite (che dipenderà dal valore di k, e sarebbe anche facile da determinare).

(3) Scriviamo per brevità χ' anzichè $\chi_{\delta+1}$ (cfr. § preced.).

Se dunque nessuno dei numeri $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}, \ldots . \frac{n-r-1}{r-1}$ è intero, basterà che l'ordine della curva considerata non sia inferiore a

$$\left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + 2.$$

4. Supponiamo ora che fra quegli stessi numeri ve ne sia uno ed uno solo intero (non ve ne sarà certo più di uno se $\delta < r-1$); e sia questo $\chi' = \frac{n-r-h-1}{r-1}$, dove $0 \leq h \leq \delta$ (1). Sarà quindi

$$n = (\chi'+1)(r-1) + h + 2;$$

e allora basterà che si abbia

$$\left\{ \chi'+1 \right\} \left\{ n - \frac{r+1}{2} - (\chi'+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k > \chi' \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi'\frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \chi+1 \right\}$$

ossia

$$n - \frac{r+1}{2} - \left\{ 2\chi'+1 \right\} \frac{r-1}{2} - k > - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \delta+1 \right\},$$

ovvero ancora

$$n - r - (n-r-h-1) - k > - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \delta+1 \right\},$$

che si riduce a

$$' > \frac{k-h-1}{\delta+1} + 1.$$

E questa condizione è certo soddisfatta se il numero χ' si prende uguale o superiore a $\frac{k-l}{\delta+1} + 2$ (2), e lo è anche per $\chi' = \frac{k-l}{\delta+1} + 1$, purchè però sia $h \geq l$. È dunque sempre soddisfatta per

$$(2) \qquad n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + l + 2$$

nella qual disuguaglianza è contenuta anche la (1).

Concludiamo dunque che: *Una curva normale di ordine* n *e genere* $\pi - k$, *la quale appartenga allo spazio* S_r, *sta sempre sopra* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti* ($\delta < r-1$) *quando*

$$n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + l + 2$$

dove l *è il resto della divisione di* k *per* $\delta+1$ (3).

---

(1) Qui ancora dunque χ' è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}$.

(2) Con l indichiamo sempre il resto della divisione di k per $\delta+1$.

(3) Si potrebbe determinare un limite analogo per l'ordine n anche nel caso di $\delta \geq r-1$; ma il calcolo (pur non offrendo alcuna difficoltà) riuscirebbe alquanto più complicato, sicchè, per il momento, non ce ne occupiamo.

Come primo caso particolare molto notevole abbiamo:

Una curva $C^n_{\pi-k}$ *di* S_r *sta sempre sopra* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche indipendenti — e quindi sopra una rigata razionale normale o una superficie di Veronese comune a queste quadriche — quando*

$$n \geq (k+2)(r-1)+2 \qquad (1)(2)(3).$$

E così pure: *Una* $C^n_{\pi-k}$ *normale di* S_r *sta sempre sopra non meno di* $\binom{r-1}{2} - 1$ *quadriche indipendenti quando*

$$n \geq \frac{k+4}{2}(r-1)+2 \quad \text{oppure} \quad n \geq \frac{k+3}{2}(r-1)+3$$

secondo che k *è numero pari o dispari.*

Per $\delta = k-1$, abbiamo: *Nello spazio* S_r *una curva normale di genere* $\pi - k$ $(k < r)$ *e di ordine non inferiore a* $3r-1$ *sta sempre sopra almeno* $\binom{r-1}{2} - k + 1$ *quadriche indipendenti.*

Ponendo infine $\delta = k$ si ha: *Per una curva normale* $C^n_{\pi-k}$ *di* S_r *(dove* $k < r-1$*) passano sempre almeno* $\binom{r-1}{2} - k$ *quadriche indipendenti, quando sia* $n \geq 2r+k$. Però un ragionamento quasi ovvio ci convince facilmente che una tal curva *sta sempre sopra non meno di* $\binom{r-1}{2} - k$ *quadriche indipendenti* (qualunque ne sia l'ordine). — L'ordine $2r+k$ è quello dal quale in su la curva $C^n_{\pi-k}$ è necessariamente *speciale.*

§ 3.

Alcune osservazioni sulle curve contenute in una rigata razionale normale.

5. Dalle poche cose esposte finora appare già come, fra tutte le curve di S_r, debbano avere una certa importanza quelle contenute in una rigata razionale normale R^{r-1} (perchè su di una tal superficie (4) stanno appunto le curve di S_r di genere $\pi - k$, da un certo ordine in poi). Mi sembra perciò opportuno di fare qui senz'altro su queste curve alcune osservazioni, per quanto semplici, delle quali avrò a valermi (e spesso) in seguito.

---

(1) La parte relativa alla superficie F^{r-1} cessa però di sussistere, per $k=0$, nel caso estremo $n=2r$.

(2) In questo caso il limite inferiore dato per l'ordine n è tale che la curva $C^n_{\pi-k}$ risulta già di per sè normale.

(3) In particolare una curva $C^n_{\pi-1}$ dello spazio S_3 starà certo sopra una quadrica quando $n \geq 8$ (se di genere $\pi-2$ invece, quando $n > 10$; ecc.). Questi risultati rientrano in quelli ottenuti dal sig. Alphen e già accennati da lui nei Compt. Rend.

(4) Colla sola eccezione, per $r=5$, della superficie di Veronese.

Sulla rigata razionale normale di S_r si abbia una curva di ordine n e genere $p = \pi - k$, la quale incontri ogni generatrice in m punti e sia priva di punti doppi (1). Allora, oltre alla relazione

$$p = \pi - k = \chi \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi \frac{r-1}{2} \right\} - k$$

dove χ è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$, avremo anche quest'altra:

$$p = (m-1) \left(n - \frac{r+1}{2} - (m-1) \frac{r-1}{2} \right) \ (2).$$

Uguagliando fra loro queste due espressioni del genere p della nostra curva, si deduce facilmente

$$(1) \qquad \left\{ \chi - m + 1 \right\} \left\{ n - 1 - \left\{ \chi + m \right\} \frac{r-1}{2} \right\} = k.$$

Questa relazione può sussistere qualunque sia n, se k è nullo, purchè si abbia $\chi = m - 1$ (ossia $m = \chi + 1$) (3). In casi particolari potrebbe annullarsi anche il secondo fattore, ma si vede subito che, fra le soluzioni che se ne ricaverebbero, la sola di cui si debba tener conto è quella che si avrebbe per $m = \chi + 2$ (e questo anche va d'accordo con quanto si è detto nella nota (4) a pag. 5). Ma se invece k è diverso da zero, l'ordine n della nostra curva dovrà soddisfare a certe condizioni che ora determineremo; e così pure, volendo che esista sulla rigata R^{r-1} una curva C^n_p priva di punti doppi, non potremo più dare ad arbitrio il numero k per cui $p + k = \pi$. Pongasi infatti

$$n = \chi \left\{ r - 1 \right\} + l + 1$$

(essendo perciò $0 < l \leq r - 1$). Allora la relazione (1) potrà anche scriversi:

$$k = \frac{\left\{ \chi - m + 1 \right\} \left\{ \chi - m \right\}}{2} (r-1) + \left\{ \chi - m + 1 \right\} l$$

e ponendo ancora per brevità $\chi - m + 1 = h$, vediamo che il numero k dovrà sempre essere del tipo

$$(2) \qquad k = \frac{h(h-1)}{2} (r-1) + hl$$

(1) Sulla rigata razionale normale un punto che sia doppio per una curva tracciata su di essa conta sempre come due fra le intersezioni della stessa curva colla generatrice che lo contiene (e influisce quindi *direttamente* sul genere della curva). Ciò perchè la rigata razionale normale non può avere essa punti doppi (cfr. anche C. Segre: *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques;* II^e partie; " Math. Annalen ", XXXIV).

(2) Che si ottiene applicando una formola del sig. Segre già ricordata in una nota preced. (n° 1).

(3) E così appunto si ottengono, sulla rigata R^{r-1}, le curve di genere π appartenenti a S_r.

dove h è intero (e non nullo, se vogliamo sia $k > 0$). Dalla stessa relazione $n = \chi \{ r - 1 \} + l + 1$ si ricava poi

$$(3) \qquad n \equiv l + 1 \qquad (\text{mod. } r - 1).$$

Perchè possa dunque esistere sulla rigata R^{r-1} *di* S_r *una curva* $C^n_{\pi-k}$ $(k > 0)$ *priva di punti doppi è necessario che il numero* k *e l'ordine* n *siano nello stesso tempo l'uno del tipo* (2) *e l'altro del tipo* (3) (1). Questo stesso risultato può ritenersi valido anche nel caso di $k = 0$, perchè allora la relazione (2) è sempre soddisfatta per $h = 0$, e lascia anzi del tutto indeterminato il numero l, sicchè la (3) non impone più all'ordine n alcuna restrizione.

6. Ma se la relazione (2), per un dato valore k, è soddisfatta da una certa coppia di valori particolari di h e di l (2), essa rimarrà del pari soddisfatta quando le stesse h e l si mutino rispett. in $h' = -h$ e $l' = r - 1 - l$ (3); perciò, per un dato valore

$$k = \frac{h(h-1)}{2}(r-1) + hl$$

non saranno *possibili* (4) soltanto gli ordini n dati dalla (3), ma anche quelli per cui

$$(3') \qquad n \equiv -l + 1 \qquad (\text{mod. } r - 1).$$

Nelle relazioni (3) e (3′) sono però compresi tutti i casi possibili.

Le curve $C^n_{\pi-k}$ delle quali è così prevista come possibile l'esistenza esistono anche effettivamente, almeno a partire da un certo ordine, da un certo multiplo cioè di $r - 1$ aumentato di $l + 1$ o diminuito di $l - 1$ (ordine e multiplo che dipenderanno naturalmente dal numero k). Le curve il cui ordine è del tipo (3′) si possono tutte ottenere segando la rigata con una varietà M^x_{r-1} che non la contenga e non le sia tangente in alcun punto, ma passi per $h(r-1) + l - 1$ sue generatrici (5). L'ordine x della varietà sarebbe il numero dei punti in cui si vuole che la curva seghi ogni generatrice (6). — Invece le curve il cui ordine è del tipo (3) non si possono più segare con varietà di ordine eguale al numero dei punti in cui esse tagliano ogni generatrice, ma solo con varietà di un ordine alquanto più ele-

---

(1) Ed è chiaro che, dati ad arbitrio k e n (ed r), non esisteranno in generale due numeri interi h e l per cui queste condizioni siano soddisfatte. Dato n è determinato l, e dato k è determinato h (colla condizione $0 < l \leq r - 1$); ma nell'uno e nell'altro caso il valore di h o rispett. l che ci è dato poi dalla (2) non sarà in generale intero.

(2) Valori che, ove esistano, saranno sempre determinati e in modo unico, quando sia $k > 0$ e si voglia altresì $h > 0$; $0 < l \leq r - 1$.

(3) Nel caso limite $l = r - 1$ si potrebbe anche mutare h in $-(h+1)$ e ritenere $l' = r - 1$; allora anche per l' si avrebbero i limiti $0 < l' \leq r - 1$.

(4) *Possibili*, in quanto cioè possano esistere sulla rigata R^{r-1} curve di ordine n e genere $\pi - k$ prive di punti doppi.

(5) Essendo h e l definiti dal valore dato di k (cfr. anche la nota (2) qui sopra).

(6) Si può dimostrare anzi, più generalmente, che *ogni curva priva di punti doppi e tracciata su di una rigata razionale normale* R^{r-1} *in modo da incontrarne ogni generatrice in* x *punti può ottenersi come intersezione della stessa rigata con una varietà* M^x_{r-1} *quando il suo ordine non sia supe-*

vato (1); e l'intersezione residua deve essere precisamente una curva di ordine $h(r-1)-l-1$ incontrata da ogni generatrice in $2h-1$ punti, quando sia $l<r-2$; e una curva di ordine $(h+1)(r-1)$, o rispett. $(h+1)(r-1)-1$, incontrante ogni generatrice in $2h+1$ punti quando sia invece $l=r-2$ o $r-1$. Curve così fatte esistono sempre sulle rigate (o almeno su quelle di uno o più *gruppi*) (2); potranno però essere riduttibili, e anzi nella maggior parte dei casi dovranno essere tali.

In particolare, *noi potremo segare sulla rigata* R^{r-1} *delle curve di genere* $\pi-k$, *dove* $0\leq k<r-2$, *mediante varietà* M^x_{r-1} *condotte per* $r-2+k$ *generatrici di detta rigata, o per una direttrice di questa di ordine* $r-2-k$.

Se la varietà M^x_{r-1} si conduce invece per $2r-4$, $2r-3$, $2r-2$, $2r-1$, ecc. generatrici, la curva d'intersezione residua sarà del genere massimo (π) diminuito rispett. di $r-2$, $r-1$, $r+1$, $r+3$, ecc. unità.

Si vede facilmente che le due serie di ordini n date dalle relazioni (3) e (3′) non possono coincidere, se $r>3$, che per $l=r-1$; quando cioè k è del tipo $\frac{h(h+1)}{2}(r-1)$ (3). Invece per $r=3$ questa coincidenza ha luogo sempre (tanto se $l=1$, quanto se $l=2$). E nello spazio ordinario si trova precisamente che: *Il genere di una curva priva di punti doppi e giacente su di una quadrica è superato dal genere massimo corrispondente all'ordine di essa di un numero che è sempre quadrato perfetto o prodotto di due numeri naturali consecutivi, secondo che l'ordine anzidetto è pari o dispari* (4).

Osserviamo infine che le cose dette in questo § per curve prive di punti doppi valgono anche per curve di genere $\pi-k$ e con un certo numero k' di punti doppi, purchè al valore k dianzi considerato si sostituisca la differenza $k-k'$. Ciò segue immediatamente dalla formola cit. del sig. SEGRE (Rend. Lincei, 1887), dalla quale si deduce anche subito che la differenza $k-k'$ non può mai essere negativa (5).

---

riore a $x(r-1)$. — Il genere di una tal curva (supposta di ordine n) sarebbe infatti $=(x-1)n-\binom{x}{2}r+\binom{x-1}{2}$. Di più, se $n\leq x(r-1)$, la g_{xn} segata su di essa dal sistema di tutte le M^x_{r-1} di S_r è certo non speciale; la dimensione di questa serie sarà perciò $\leq n+\binom{x}{2}r-\binom{x-1}{2}$, e per la curva stessa dovranno passare almeno $\binom{r+x}{x}-n-\binom{x}{2}r+\binom{x-1}{2}-1$ varietà M^x_{r-1} indipendenti. Ma per la rigata non ne passano che $\binom{r+x}{x}-\binom{x+1}{2}r+\binom{x}{2}-1$ (cfr. anche l'ultima nota al n° 1); vi sarà quindi, nelle nostre ipotesi, un sistema lineare almeno $\infty^{x(r-1)-n}$ di varietà M^x_{r-1} passanti per la curva C^n e non per la rigata, — il che basta a provare il nostro asserto. Questa proposizione fu già dimostrata nel caso di $x=2$ (e in questo stesso modo) dal sig. SEGRE (*Recherches générales etc.*, I, 20; " Math. Ann. ", XXX).

(1) E un ordine certo abbastanza elevato possiamo determinarlo facilmente in ogni caso, osservando che una curva priva di punti doppi e tracciata su di una rigata razionale normale in modo da incontrarne ogni generatrice in x punti può sempre ottenersi come intersezione della stessa rigata con una varietà $M^{x+x'}_{r-1}$, purchè il suo ordine sia inferiore a $\left\{x+\frac{x'}{2}\right\}\left\{r-1\right\}+1$. La dimostrazione si conduce in modo affatto analogo a quella della nota precedente.

(2) Per la distinzione delle rigate razionali in *gruppi*, v. C. SEGRE: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XIX). — E si noti che questa diversità fra i varî gruppi si presenta già, come vedremo subito, per i valori più piccoli di k.

(3) Allora infatti la (3) e la (3′) si riducono entrambe a $n\equiv 1\ldots(\mathrm{mod.}\ r-1)$.

(4) Questa proposizione si trova sostanzialmente già in HALPHEN (" Compt. Rend. ", t. 70).

(5) Il sig. CASTELNUOVO nella Nota cit. dei Rend. di Palermo (n° 10) ha dimostrato anzi che questa stessa differenza $k-k'$ è sempre ≥ 0 per qualsiasi curva (irriduttibile) C^n di S_r (in altri termini, che il numero k' dei punti doppi di una C^n_p deve essere $\leq\pi-p$).

§ 4.

Varietà basi di un sistema lineare $\infty^{\binom{r-1}{2}-i}$ di quadriche. Dimostrazione di un teorema relativo a questi sistemi.

7. Fatte queste poche osservazioni sulle curve contenute in una rigata razionale normale R^{r-1} di S_r, e quindi in $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti (e non in un numero maggiore, se l'ordine loro supera $2r-2$), torniamo allo studio delle curve C_p^n di S_r contenute in sistemi di quadriche di dimensione soltanto $\binom{r-1}{2}-i$; $(i>1)$.

E proponiamoci anzitutto la questione analoga a quella di cui si occupa il sig. Castelnuovo al n° 30 delle sue *Ricerche:* la determinazione cioè delle possibili varietà basi di questi sistemi. Si vede facilmente che nello spazio S_r un sistema lineare di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$ non può avere (almeno per $i \leq r-2$) una varietà base appartenente a S_r stesso e di dimensione superiore a *due*. Supponiamo infatti che un tal sistema di quadriche abbia una M_3^x base (irriduttibile) appartenente a S_r. Segandolo con un S_{r-3} non contenuto in alcuna sua quadrica, — il che (come osserva anche il sig. Castelnuovo per il caso di $i=1$) è sempre possibile —, avremo in questo spazio un sistema lineare di quadriche (M_{r-4}^2) pure di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$, e con x punti basi — in generale — dei quali possiamo anche supporre che mai $k+1$ $(k \leq r-3)$ stiano in uno stesso S_{k-1}. Se fosse dunque $x>i-1$, bisognerebbe che le M_{r-4}^2 passanti per $i-1$ (e forse anche meno) di quegli x punti passassero di conseguenza anche pei rimanenti, e ciò per $i \leq r-2$ ossia $i-1 \leq r-3$ (come qui supponiamo) non è certo possibile. Dovrà dunque essere $x \leq i-1$ e quindi, a fortiori, $\leq r-3$, mentre invece è noto che una M_3 appartenente a S_r deve essere di ordine almeno uguale a $r-2$. Concludiamo perciò:

Se un sistema lineare di quadriche di S_r *di dimensione* $\binom{r-1}{2}-\mathrm{i}$ *ha infiniti punti basi, questi, finchè* $\mathrm{i} \leq \mathrm{r}-2$, *non possono costituire, di varietà appartenenti a* S_r, *che curve o superficie. Se vi è una varietà base di dimensione superiore a due, questa deve essere contenuta in uno spazio inferiore a* S_r (1).

8. Ciò posto, seghiamo la curva C_p^n (che supponiamo irriduttibile) con un iperpiano (S_{r-1}) tale che delle sue n intersezioni con essa r qualunque siano linearmente indipendenti. Il sistema di quadriche proposto verrà segato dallo stesso S_{r-1} in un nuovo sistema, pure di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$, e con quelle n intersezioni per punti basi; e poichè le quadriche tutte di S_{r-1} formano un sistema di dimensione $\binom{r+1}{2}-1$, è chiaro che in questo nuovo sistema ogni quadrica passante per

$$\left\{\binom{r+1}{2}-1\right\}-\left\{\binom{r-1}{2}-i\right\}=2(r-1)+i$$

(1) Si può dimostrare anzi più generalmente (e in modo affatto analogo) che *un sistema lineare di quadriche* (*di* S_r) *di dimensione uguale o superiore a* $\binom{r-k+1}{2}$ *non può avere una varietà base di dimensione* (*uguale o superiore a*) k *e appartenente pure a* S_r.

di quegli stessi n punti dovrà (se $n > 2(r-1)+i$) contenere di conseguenza i rimanenti (1).

Si può prevedere fin d'ora che, se n supererà un certo limite, quelle quadriche di S_{r-1} dovranno avere, non solo questi n, ma infiniti punti (ossia tutta una curva) a comune (2); ciò perchè un sistema lineare di quadriche di data dimensione e con un numero finito di punti basi ammette necessariamente, per questo stesso numero, un *massimo* (3). Si tratterebbe ora di trovare appunto questo massimo per il nostro sistema, di dimensione $\binom{r-1}{2} - i$, in S_{r-1} (essendo pur sempre $i \leq r-2$).

La questione è piuttosto complicata, ma possiamo dare tuttavia un teorema che ci sembra notevole e dal quale potremo poi ricavare nei §§ seg. (almeno per i casi di $i = 2$ e $i = 3$) risultati della natura di quelli che testè andavamo cercando, e che si collegheranno anche con quelli già ottenuti nei §§ precedenti. Ragioneremo, per comodità, nello spazio S_r, e supporremo perciò il sistema di quadriche assoggettato a $2r + i$ (anzichè a $2(r-1)+i$) condizioni.

9. Il teorema del quale intendiamo parlare è il seguente:

Se nello spazio S_r *si ha un gruppo di* $2(r+i)+1$ *punti indipendenti* (4) *e tali che le quadriche passanti per* $2r + i$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza per i rimanenti* $i+1$, *questi punti staranno tutti sopra una varietà* $M_i^{r-i+1} \equiv \infty^1$ *razionale normale di* S_{i-1}, *che sarà anche segata in una* M_{i-1}^{r-i} *dall'* S_{r-2} *di* $r-1$ *qualunque fra quei punti* (5).

Consideriamo infatti l'S_{r-2} di $r-1$ qualunque fra i punti proposti $(A_1, A_2, \ldots, A_{r-1})$, e chiamiamolo α. Costruiamo poi le curve razionali normali di ordine r che hanno α per spazio $(r-1)$ - secante e passano per altri $r+1$ fra i punti dati $(B_1, B_2, \ldots, B_{r+1})$ e rispett. per altri i ancora fra quegli stessi punti $(C_1, C_2, \ldots, C_i)$. Congiungendo i vari gruppi di punti di queste curve che stanno in un iperpiano variabile attorno

---

(1) Si può dire anzi che, se l'S_{r-1} di cui sopra è stato scelto in modo generale, ogni quadrica passante per $2(r-1)+i$ *qualunque* fra questi n punti dovrà passare di conseguenza anche pei rimanenti; impongano pure o non impongano quei primi $2(r-1)+i$ condizioni tutte distinte.

(2) E quindi le quadriche di S_r passanti per la curva C_p^n dovranno avere a comune tutta una superficie.

(3) La questione, trasportata sulla varietà $M_{r-1}^{\binom{r-1}{2}}$ di $S_{\frac{(r-1)(r+2)}{2}}$ che rappresenta il sistema di tutte le quadriche di S_{r-1}, si tradurrebbe così: *Se la varietà* M *ha comune con uno spazio* S_k *un numero finito di punti, questo numero non potrà superare un certo limite;* e questo può ritenersi evidente. E alla stessa questione può anche darsi la forma seguente, pure notevole: *Sulla curva di ordine* 2^{r-2} *(e di genere* $(r-4)2^{r-3}+1$*) intersezione generale di* $r-2$ *quadriche in* S_{r-1} *l'ordine di una serie lineare di gruppi di punti di data dimensione non può scendere al di sotto di un certo limite* (che dipenderà naturalmente da questa dimensione).

(4) Anche per i punti, come già per le quadriche, ci permettiamo di dire semplicemente *indipendenti*, sottintendendo per brevità il *linearmente.* Avvertiamo poi che, per i punti, questa *indipendenza* dovrà sempre intendersi come *relativa* (per così dire) *allo spazio in cui si sa che i punti stessi sono contenuti.* Se siamo quindi in S_k, intenderemo (soltanto) che mai $k+1$ fra quei punti stiano in uno stesso S_{k-1}.

(5) Variando questi ultimi punti, potrà variare però la M_i^{r-i+1}; e questo apparirà anche dalla dimostrazione che ora daremo.

ad α mediante altrettanti S_{i-1}, otterremo una serie semplice razionale di spazi, il cui insieme costituirà una M_i^{r-i+1} normale (1). Lo spazio α incontrerà quei vari S_{i-1} secondo altrettanti S_{i-2}, quindi la varietà M_i secondo una M_{i-1} che risulterà di ordine $r-i$, e potrà anche scindersi in una M_{i-1}^{r-i-h} irriduttibile e in h spazi S_{i-1} (contenenti rispett. altrettanti S_{i-2} di questa M_{i-1}).

Ora, la varietà M_i^{r-i+1} è contenuta in $\binom{r-i+1}{2}$ quadriche indipendenti di S_r (2), e di queste si vede facilmente che, se $i \leq r-1$ (3), ve ne sono certo almeno ∞^{r-i-1} che contengono lo spazio α. Nel caso estremo $i=r-1$ la varietà M_i^{r-i+1} è essa stessa una quadrica passante per questo spazio; se invece $i \leq r-2$ (e così noi supporremo sempre in seguito), vi saranno certo infinite quadriche passanti per la varietà M_i^{r-i+1} e per lo spazio α, e queste non passeranno di conseguenza per nessun altro punto (e saranno *precisamente* ∞^{r-i+1}) (4). Ma queste quadriche passano già tutte per i $2r+i$ punti $A_1 \dots A_{r-1}$, $B_1 \dots B_{r+1}$, $C_1 \dots C_i$; dovranno dunque passare anche per gli altri $i+1$ punti proposti ($D_1, D_2, \dots, D_{i+1}$); e questi ultimi, non potendo alcuno di essi stare nello spazio α, saranno tutti contenuti nella varietà M_i^{r-i+1}. Faremo vedere ora che questa stessa varietà (ossia la M_{i-1}^{r-i} sua intersezione collo spazio α) deve contenere anche gli $r-1$ punti A.

Lo spazio α, come abbiamo già detto, sega infatti la varietà M_i^{r-i+1} in una M_{i-1}^{r-i} che può anche spezzarsi in una M_{i-1}^{r-i-h} irriduttibile e in h spazi S_{i-1}. È chiaro che fra gli S_{r-3} determinati dai punti A a $r-2$ per volta ve ne sarà certo (almeno) uno non contenente (per stare nel caso più generale) la M_{i-1}^{r-i-h} ($h \geq 0$); questo stesso spazio (che chiameremo α_1) potrà contenere tuttavia un certo numero h' degli h spazi S_{i-1}, e segherà allora i rimanenti $h-h'$ in altrettanti S_{i-2}, e la varietà M_{i-1}^{r-i-h} in una $M_{i-2}^{r-i-h-h'}$ dalla quale potrà ancora staccarsi qualche altro S_{i-2}; l'ordine complessivo però di questa M_{i-2}, compresivi tutti gli S_{i-2} (anche quei primi $h-h'$), sarà $r-i-2h'$. — Fra gli $r-2$ punti A con cui si è determinato lo spazio α_1 scegliamone ora $r-3$ il cui S_{r-4} (α_2) non contenga la M_{i-2} *irriduttibile* testè ottenuta; questo spazio α_2 potrà contenere della sezione precedente un certo numero h'' di S_{i-1} e un certo numero l' di S_{i-2} (oltre agli $h'-h''$ in cui sega i

---

(1) L'ordine di questa varietà si può stabilirlo con successive induzioni, partendo dai valori più semplici di i. Che se poi il gruppo delle i intersezioni variabili di cui sopra fosse sempre contenuto in un S_{i-2}, si giungerebbe a una varietà M_{i-1}^{r-i+2} per la quale potrebbero farsi passare infinite M_i^{r-i+1}, segate anche da α altrettanti una M_{i-1}.

(2) Ciò essendo vero per i valori più semplici di i ($i=0, 1, 2$) ne segue facilmente che per la M_i^{r-i+1} non possono certo passare più di $\binom{r-i+1}{2}$ quadriche indipendenti. Osservato poi che, perchè una quadrica contenga la M_i^{r-i+1}, è certo *sufficiente* che ne contenga due *sezioni piane* e un punto fuori di queste, si può tosto concludere (ammessa sempre la proposizione per i valori più piccoli di i) che il numero di quelle quadriche non può nemmeno essere inferiore a $\binom{r-i+1}{2}$. La proposizione sussiste tanto se la M_i è irriduttibile, quanto se da essa si stacca un numero qualunque di S_i (passanti per altrettanti S_{i-1} della M_i residua irriduttibile).

(3) Restrizione che corrisponde alla $i \leq r-2$ del n° 7, perchè qui siamo passati da S_{r-1} a S_r.

(4) Se queste quadriche passassero infatti tutte per un altro punto qualsiasi di S_r, segando coll'S_{r-1} di questo punto e di α, si avrebbero nello stesso iperpiano almeno ∞^{r-i-1} quadriche contenenti un dato S_{r-2}, un dato S_{i-1} (intersezione residua dell'S_{r-1} colla varietà M_i) e un dato punto fuori di questi due spazi, il che è assurdo. Lo stesso ragionamento, astraendo da quest'ultimo punto, prova altresì che quelle quadriche sono precisamente ∞^{r-i-1} (e non di più).

rimanenti S_{i-1}), e l' incontrerà poi ancora in una $M_{i-3}^{r-i-2h'-h''-2l'}$ dalla quale potrà staccarsi un certo numero di S_{i-3}. Così continuando, giungeremo a un S_{r-i-1} (β) passante per $r-i$ punti A e incontrante la varietà M_i^{r-i+1} secondo un certo numero n_{i-1} di spazi S_{i-1}, un certo numero n_{i-2} di spazi S_{i-2}, ... un certo numero n_0 di punti.

Per la sezione determinata dallo spazio α_1 (h' spazi S_{i-1} e una $M_{i-2}^{r-i-2h'}$) si ha la relazione:

$$2 \,.\, h' + 1 \,.\, (r-i-2h') = r-i.$$

Per quella successiva (h'' spazi S_{i-1}, $h'-h''+l$ spazi S_{i-2} e una $M_{i-3}^{r-i-2h'-h''-2l'}$) si ha del pari

$$3 \,.\, h'' + 2 \,.\, (h'-h''+l') + 1 \,.\, (r-i-2h'-h''-2l') = r-i$$

e così via. Per l'ultima si avrebbe (e lo si potrebbe provare facilmente col solito metodo dell'induzione da un caso qualunque al successivo)

$$i \,.\, n_{i-1} + (i-1) \,.\, n_{i-2} + \ldots\ldots + 2 \,.\, n_1 + 1 \,.\, n_0 = r-i \quad (1).$$

Quest'ultima sezione potrebbe essere costituita in particolare da un gruppo di $r-i$ punti; ma le nostre considerazioni più generali sono egualmente necessarie, non potendosi asserire *a priori* che fra gli S_{r-i-1} determinati da $r-i$ fra i punti A ve ne debba sempre essere uno che incontri M in soli $r-i$ (e non in infiniti) punti.

D'altra parte, dal fatto che per la varietà M_i^{r-i+1} e per lo spazio α passano precisamente ∞^{r-i-1} quadriche segue tosto che si può scegliere (e in infiniti modi) un sistema lineare di dimensione $\binom{r-i}{2}-1$ costituito da quadriche passanti tutte per la varietà M_i^{r-i+1} e non per α; e perciò *ogni* quadrica di quest'ultimo spazio passante per la M_{i-1}^{r-i} di cui sopra potrà ottenersi come sezione di una quadrica di S_r passante per la M_i stessa (e non per α). — Analogamente, fra le $\infty^{\binom{r-i}{2}-1}$ quadriche di α che passano per la sezione M_{i-1}^{r-i} ve ne sono $\infty^{h'-1}$ che contengono lo spazio α_1 (2); si potrà quindi dal loro sistema stralciarne uno, pure lineare, di dimensione $\binom{r-i}{2}-h'-1$, nel quale nessuna quadrica contenga quest' ultimo spazio. E questo stesso (ossia $\infty^{\binom{r-i}{2}-h'-1}$) è anche il numero delle quadriche dello spazio α_1 che passano per la sezione determinata da esso nella varietà M_{i-1}^{r-i} (o nella M_i^{r-i+1}) (3); ciascuna di queste

---

(1) In termini meno esatti ma forse più espressivi si potrebbe dire (ed è, d' altronde, anche quasi evidente) che una retta contenuta in un S_{i-1} della M_i conta in questa sezione come *due* punti, un piano come *tre*, ecc.

(2) E sono quelle che si spezzano in α_1 stesso e in un S_{r-3} variabile attorno all'$S_{(r-i-h')+(i-1)-1} \equiv S_{r-h'-2}$ della $M_{i-1}^{r-i-h'}$ costituita dalla stessa M_{i-1}^{r-i} meno gli h' spazi S_{i-1} che sono già contenuti in α_1.

(3) Infatti le quadriche indipendenti che contengono la $M_{i-2}^{r-i-2h'}$ sono, nello spazio $S_{r-2h'-3}$ cui questa appartiene, $\binom{r-i-2h'}{2}$; e nello spazio $S_{r-3} \equiv \alpha_1$

$$\binom{r-i-2h'}{2} + (r-2h'-1) + (r-2h') + \ldots\ldots + (r-2) = \binom{r-i}{2} + 2h'(i-1).$$

Queste ultime devono ancora assoggettarsi a contenere h' spazi S_{i-1}, di ciascuno dei quali contenultime sarà dunque sezione di una delle prime, ossia di una quadrica di S_r passante per M_i^{r-i+1} e non per α_1. Fra quelle stesse quadriche dello spazio α_1 possiamo ora trovarne un sistema lineare di dimensione $\binom{r-i}{2} - h' - 2h'' - l' - 1$, nel quale nessuna varietà contenga lo spazio α_2 (1); e questo numero è anche quello delle quadriche di α_2 stesso che passano per la sezione determinata nella varietà M_i da quest'ultimo spazio (2). Così continuando, si conclude facilmente che le quadriche dello spazio β passanti per la sezione determinata da questo stesso spazio in M_i sono precisamente tante quante quelle di S_r che passano per M_i^{r-i+1} e non per β (3); e perciò una qualunque delle prime può sempre ottenersi come sezione di una di queste ultime. In particolare, se fra quelle prime quadriche ne consideriamo una passante per un certo numero, ad es. per $r-i-2$ fra gli $r-i$ punti A che stanno in β — supposta la cosa possibile —, la quadrica di S_r (passante per M_i) di cui quest'ultima quadrica può considerarsi come sezione dovrà pure contenere quegli stessi punti. Ma questa quadrica di S_r passerà allora per la varietà M_i^{r-i+1}, quindi per tutti i punti B_1..... C_1..... D_1..... (in numero di $r+2i+2$), e conterrà perciò complessivamente già $2r+i$ fra i punti proposti; essa dovrà dunque contenere anche i rimanenti $i+1$, e in particolare quegli altri due punti A che stanno in β. Questi ultimi staranno perciò anche sulla quadrica di β prima considerata, ossia:

" Le quadriche dello spazio β passanti per la sezione che questo spazio determina nella varietà M_i e per $r-i-2$ qualunque fra i punti A in esso spazio contenuti passano anche tutte per gli altri due fra questi stessi punti ".

---

gono già un S_{i-3} fisso, e ciò equivale a nuove $h'(2i-1)$ condizioni, che è facile anche riconoscere come tutte distinte. E si ha precisamente:

$$\binom{r-i}{2} + 2h'(i-1 - h'(2i-1) = \binom{r-i}{2} - h'.$$

(1) E ciò perchè quest'ultimo spazio è a sua volta contenuto in un sistema lineare di quelle stesse quadriche di dimensione $2h''+l'-1$. Questo numero deve essere infatti quello degli S_{r-4} di α_1 che passano per la sezione determinata da α_1 stesso in M, astrazion fatta dagli h'' spazi S_{i-1} e dagli l' spazi S_{i-2} già contenuti in α_2. Ora la M_{i-2} di α_1 (compresivi tutti gli S_{i-2}) è di ordine $r-i-2h'$; senza quegli l' spazi resterà dunque di ordine $r-i-2h'-l'$, e apparterrà perciò a un $[r-2h'-l'-3]$. E quest'ultimo spazio, insieme ai rimanenti $h'-h''$ spazi S_{i-1}, determina un $[r-2h''-l'-3]$ pel quale in α_1 passano appunto $\infty^{2h''+l'-1}$ S_{r-4}.

(2) Per la sola M_{i-3} di α_2 (che, compresivi tutti gli S_{i-3}, è di ordine $r-i-2h'-h''-2l'$) passano, nello spazio cui essa appartiene, $\binom{r-i-2h'-h''-2l'}{2}$ quadriche indipendenti; nello spazio α_2 ne passano invece $\binom{r-i}{2} + (2h'+h''+2l')(i-2)$. Queste ultime devono ancora obbligarsi a passare per $h'-h''+l'$ spazi S_{i-2} e per h'' spazi S_{i-1} (già segati in altrettanti S_{i-4} fissi); il che equivale complessivamente a $(h'-h''+l')(2i-3)+h''(3i-3)$ condizioni (e ancora tutte distinte). E il numero

$$\binom{r-i}{2} + (2h'+h''+2l')(i-2) - (h'-h''+l')(2i-3) - h''(3i-3)$$

si riduce precisamente a

$$\binom{r-i}{2} - h' - 2h'' - l'.$$

(3) Questa proposizione sarebbe evidente o quasi quando lo spazio β segasse M_i^{r-i+1} in soli $r-i$ punti; allora non vi sarebbe anzi in α nessuna quadrica passante per la M_{i-1}^{r-i} e per β. Ma, come già si è detto, non possiamo asserire di poterci sempre ridurre a questo caso.

Da ciò noi dedurremo subito che gli $r - i$ punti A dello spazio β devono stare tutti sulla sezione che questo spazio determina in M_i (e quindi su M_i stessa).

Abbiamo già veduto infatti come tale sezione sia costituita. Consideriamo pertanto uno qualunque S_μ degli spazi in essa contenuti ($o \leq \mu \leq i - 1$) (1), e poniamo per brevità $r - i - 1 = \rho$. Fra gli $r - i = \rho + 1$ punti A dello spazio $S_\rho \equiv \beta$ possiamo sempre trovarne uno non contenuto in S_μ (2); poi un altro non contenuto nell' $S_{\mu+1}$ di S_μ e di questo primo punto, un terzo non contenuto nell'$S_{\mu+2}$ di questo $S_{\mu+1}$ e del secondo punto, ecc. Possiamo infine, fra gli stessi $\rho + 1$, trovarne $\rho - \mu$ i quali insieme allo spazio S_μ costituiscano un gruppo appartenente a S_ρ. Chiameremo questi punti $A^{(1)}_1$, $A^{(1)}_2, \ldots.., A^{(1)}_{\rho-\mu}$; i rimanenti, $A^{(2)}_0$, $A^{(2)}_1, \ldots.., A^{(2)}_\mu$.

Dalla relazione $i \,.\, n_{i-1} + \ldots.. + n_0 = r - i = \rho + 1$ segue altresì che, tolto lo spazio S_μ, i rimanenti che con esso concorrono a formare la sezione di β colla varietà M_i staranno certo in un $S_{\rho-\mu-1}$. Considero ora lo spazio $S_{\rho-1} \equiv \gamma$ determinato da questo $S_{\rho-\mu-1}$ e da μ qualunque fra i punti $A^{(2)}$ (escludendone perciò uno qualsiasi $A^{(2)}_s$) (3), e poi un altro $S_{\rho-1}$, che chiamo δ, determinato dall'S_μ di cui sopra e da $\rho - \mu - 1$ qualunque fra i punti $A^{(1)}$ (tutti ad es. meno $A^{(1)}_t$). Questa coppia di $S_{\rho-1}$ è una quadrica di S_ρ contenente già l'intera sezione $\beta \,.\, M_i$ e $\rho - 1$ fra i punti A (tutti meno $A^{(1)}_t$ e $A^{(2)}_s$); la stessa quadrica dovrà dunque passare anche per questi ultimi due punti. Ma $A^{(1)}_t$ non può stare in δ (perchè l'insieme di S_μ e dei punti $A^{(1)}$ appartiene a S_ρ); starà dunque in γ, e ciò qualunque sia l'indice t scelto fra i numeri $1, 2, \ldots, \rho - \mu$; in altri termini, lo spazio γ dovrà contenere tutti quanti i punti $A^{(1)}$; e contenendo perciò complessivamente già ρ punti A, non potrà più contenere $A^{(2)}_s$. Quest'ultimo punto starà dunque in δ, e ciò ancora qualunque sia fra gli indici $0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,\ldots..\, \mu$ quello designato con s; in altri termini, tutti i $\mu + 1$ punti $A^{(2)}$ dovranno stare nello spazio δ — e anzi in ciascuno dei $\rho - \mu$ spazi $S_{\rho-1}$ che congiungono l'S_μ considerato da principio a $\rho - \mu - 1$ qualunque dei punti $A^{(1)}$—; essi staranno perciò anche nell'S_μ stesso che è precisamente l'intersezione di tutti questi spazi.

Segue da ciò che uno spazio qualunque S_μ appartenente alla sezione $\beta \,.\, M_i$ deve contenere $\mu + 1$ fra i punti A dello spazio β; e questi punti varieranno anche tutti da uno di quegli spazi all'altro, perchè due qualunque di questi ultimi non si incontrano (4). Avendosi poi la relazione $\Sigma\,(\mu + 1)\, n_\mu = \rho + 1$, è chiaro che i $\rho + 1$ punti A verranno tutti assorbiti dai vari spazi S_μ e staranno perciò tutti sulla sezione $\beta \,.\, M_i$.

---

(1) Se detta sezione si componesse di (soli) $r - i$ punti, non potrebbe essere, naturalmente, che $\mu = 0$. Il nostro ragionamento vale però (come si vedrà subito) anche per questo caso.

(2) Farebbe eccezione il solo caso in cui fosse $\mu = \rho$; ma allora lo spazio $S_\rho \equiv \beta$ sarebbe tutto contenuto in M_i, e su questa varietà starebbero perciò senz'altro tutti i $\rho + 1$ punti A.

(3) Per il momento, non si potrebbe ancora asserire che lo spazio γ rimanga con ciò individuato; certo però che vi è qualche $S_{\rho-1}$ passante per quell'$S_{\rho-\mu-1}$ e per questi μ punti. Dal seguito del ragionamento apparirà poi che non può esservene che uno.

(4) I vari spazi S_μ sono contenuti infatti rispett. in altrettanti S_{i-1} di M_i^{r-i+1}; e due qualunque di questi S_{i-1} non si incontrano, a meno che la varietà stessa non sia un cono — nel qual caso ci converrà (e basterà) prendere lo spazio β non incidente all'asse (al più S_{i-2}) di questo cono.

La varietà M_i^{r-i+1} di S_r contiene dunque certo $(r-i)+(r+1)+i+(i+1)$ ossia $2r+i+2$ fra i punti proposti; conterrà perciò anche i rimanenti $i-1$ (perchè le quadriche passanti per essa non passano, di conseguenza, per nessun altro punto); e la proposizione enunciata al principio di questo n° rimane così dimostrata.

Il teorema si estende manifestamente al caso di un numero di punti anche superiore a $2(r+i)+1$, purchè sempre le quadriche passanti per $2r+i$ qualunque fra questi passino di conseguenza anche pei rimanenti. — Nel caso di $i=1$ questo teorema coincide con quello già dato dal sig. Castelnuovo nelle sue *Ricerche* (n° 30); veniamo quindi addirittura a svilupparne le conseguenze più importanti per il caso di $i=2$.

§ 5.

Sistemi lineari $\infty^{\binom{r-1}{2}-2}$ di quadriche e loro varietà basi. Superficie di ordine r a sezioni ellittiche.

10. Facendo nel teorema del n° 9 $i=2$, troviamo la proposizione seguente:

Se nello spazio S_r $(r \geq 4)$ *si ha un gruppo di* $2r+2+x$ *punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+2$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti* x, *questi punti, se* $x \geq 3$, *staranno tutti su di una rigata razionale normale* R^{r-1} *(che sarà anche segata in una curva di ordine* $r-2$ *dall'* S_{r-2} *di* $r-1$ *fra quei punti).*

Dico ora che, nella stessa ipotesi $x \geq 3$, le quadriche passanti per quei primi $2r+2$ punti devono avere non solo x, ma infiniti altri punti a comune. Infatti, se così non fosse, fra le quadriche passanti per quegli stessi punti se ne potrebbe certo trovare qualcuna che incontrasse la rigata R^{r-1} secondo una curva *irriduttibile* (di ordine $2r-2$ e genere $r-2$) (1). Su questa curva le quadriche di S_r segherebbe una g_{4r-4}^{3r-2} (2); imponendo loro perciò di passare per $2r+2$ fra i punti proposti (3), rimarrebbe una g_{2r-6}^{r-4} con x punti fissi; cosa che è evidentemente assurda per $x>2$.

Concludiamo pertanto:

Se nello spazio S_r $(r \geq 4)$ *si ha un gruppo di* $2r+5$ *o più punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+2$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, queste quadriche avranno a comune infiniti punti (e quindi tutta una linea, passante per una parte almeno di quegli stessi punti).*

---

(1) Se questa curva dovesse necessariamente spezzarsi, se ne concluderebbe tosto ch'essa deve contenere una parte fissa comune a tutte le quadriche passanti per i $2r+2+x$ punti proposti (e passante a sua volta per una parte almeno di questi punti). Non sarà forse inutile l'osservare che per questi stessi punti passa un sistema lineare (almeno) ∞^{r-3} di quadriche non contenenti la rigata R^{r-1}.

(2) Infatti la curva C_{r-2}^{2r-2} sta precisamente su $\binom{r-1}{2}+1$ quadriche indipendenti.

(3) Punti che possiamo supporre impongano condizioni tutte distinte (se no si cadrebbe nel caso di $i=1$).

Ovvero anche: *Se un sistema lineare di quadriche in* S_r *ha un certo numero* k $(\geq 2r+3)$ *di punti basi indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+2$ *qualunque fra essi contengano sempre di conseguenza anche i rimanenti (ma non contengano altri punti fissi) sarà certo* $k \leq 2r+4$.

11. Da questi risultati, riuniti alle considerazioni di cui al n° 8, deduciamo ancora:

Se per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r $(r \geq 5)$ *e di ordine* $n > 2r+2$ *passano* $\binom{r-1}{2}-1$ *quadriche indipendenti, queste quadriche avranno a comune tutta una superficie passante a sua volta per quella curva.* È facile anzi riconoscere che questa superficie non potrà essere di ordine superiore a r (1); ciò perchè un sistema lineare di quadriche (M^2_{r-3}) di S_{r-2} di dimensione $\binom{r-1}{2}-2$ non può avere più di r punti basi indipendenti, a meno di non averne infiniti. Dunque:

Se per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r $(r \geq 5)$ *e di ordine superiore a* $2r+2$ *passano* $\binom{r-1}{2}-1$ *quadriche indipendenti, la stessa curva dovrà stare su di una superficie di ordine* $\leq r$ *(e quindi di ordine* r *o* $r-1$*) comune a queste quadriche.*

O in altri termini: *Se nello spazio* S_r $(r \geq 5)$ *un sistema lineare di quadriche di dimensione* $\binom{r-1}{2}-2$ *ha infiniti punti basi, questi punti non potranno costituire (di varietà appartenenti ad* S_r*) che una curva di ordine* $\leq 2r+2$ *o una superficie di ordine* $\leq r$ (2).

Tenuto conto infine di quanto si è detto nel § 2 sull'ordine di una curva di genere $\pi - k$ per la quale si vuole che passino (almeno) $\binom{r-1}{2}-1$ quadriche indipendenti, abbiamo:

Una curva normale, la quale appartenga ad S_r $(r \geq 5)$ *e sia di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore a*

$$\frac{k+4}{2}(r-1)+2 \quad \text{oppure} \quad \frac{k+3}{2}(r-1)+3$$

secondo che k *pari o dispari, sta sempre su di una superficie di ordine* r *o* $r-1$ *(comune a tutte le quadriche che la contengono)* (3). Se non sta dunque sulla rigata R^{r-1} o sulla superficie di Veronese (nel caso di $r=5$), sarà certo contenuta in una superficie di ordine r. Supposto $k>0$, *fa eccezione il solo caso di* $k=1$ *nel quale, anzichè* $n > 2r+1$, *bisogna supporre* $n > 2r+2$.

12. Ora, una superficie di ordine r appartenente a S_r può avere le sezioni razionali od ellittiche. Nel primo caso si hanno le rigate razionali ma non normali, bensì proiezioni di quelle di ugual ordine appartenenti a S_{r+1}; e di più, per $r=4$,

---

(1) E la linea di cui è fatta parola nel penultimo enunciato del n° 10 non potrà quindi riescire di ordine superiore a $r+1$.

(2) Con questo non intendiamo però escludere che, almeno se quegli ordini massimi non sono raggiunti, vi possa essere anche qualche ulteriore punto base (isolato), oppure, nel secondo caso, oltre la superficie, anche una curva base non contenuta in questa.

(3) Sappiamo anzi che questa superficie può essere di ordine r solo quando l'ordine della curva sia $\leq (k+2)(r-1)+1$.

una superficie non rigata contenente una ∞^2 di coniche, proiezione precisamente della superficie di Veronese da un punto esterno ad essa (1). Ma per le rigate razionali di ordine r e appartenenti a S_r passano in generale solo $\binom{r-1}{2} - 3$ quadriche indipendenti se $r > 4$, e ne passa una sola se $r = 4$; e per la superficie di quart'ordine non rigata non ne passa, in generale, alcuna (2). Non sarà dunque sopra queste superficie che potranno stare le curve C_p^n considerate di sopra; esse saranno invece contenute (quando non stiano sopra F^{r-1}) in *superficie di ordine* r *a sezioni ellittiche.* E queste saranno anche le sole superficie di S_r che possano essere varietà basi per sistemi di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2} - 2$ (3).

D' altra parte è pur noto (cfr. Del Pezzo, loc. cit.) che una superficie d'ordine r (F^r) appartenente a S_r e colle sezioni ellittiche *è sempre rigata per* $r > 9$; e, se rigata, *è necessariamente un cono* (4). Per $r \leq 9$ esistono invece in S_r delle superficie di ordine r a sezioni ellittiche e non rigate, che sono razionali e, se di ordine inferiore a 9, si possono anche ottenere (con una sola eccezione, per $r = 8$) come proiezioni della F^9 di S_9. Queste superficie, studiate per la prima volta dal sig. Del Pezzo, sono quelle appunto che rappresentano i sistemi lineari di cubiche piane con $9 - r$ punti basi; e in quel caso speciale accennato per $r = 8$ (superficie F^8 *di seconda specie)* il sistema delle quartiche piane con due punti doppi fissi. Dunque:

Se nello spazio S_r *un sistema lineare di quadriche di dimensione* $\binom{r-1}{2} - 2$ *ha infiniti punti basi, questi punti, per* $r > 9$, *non potranno costituire (di varietà appartenenti ad* S_r*) che una curva di ordine non superiore a* $2r + 2$ (5), *oppure un cono*

---

(1) Per queste superficie, e per le altre (non rigate) pure di ordine r e appartenenti a S_r, cfr. ad es. Del Pezzo: *Sulle superficie del n° ordine immerse nello spazio di* n *dimensioni* (" Rend. Circolo Mat. di Palermo ", I).

(2) Infatti, se una superficie di S_r si può ottenere come proiezione di altra appartenente a S_{r+1}, è chiaro che le quadriche di S_r passanti per la prima saranno tante quanti i coni quadrici di S_{r+1} che passano per la seconda e hanno il vertice nel centro di proiezione. Nel nostro caso si tratta di superficie di ordine r che appartengono ad S_r e sono proiezioni di altre di egual ordine appartenenti a S_{r+1}; e fra le $\binom{r}{2}$ quadriche indipendenti (di S_{r+1}) che passano per una di queste ultime superficie non vi sono in generale (come si vede subito) che soli $\binom{r-1}{2} - 3$ coni col vertice nel centro di proiezione (che è un punto assolutamente arbitrario in S_{r+1}, purchè esterno alla F_r considerata). Però, se $r = 4$ e quindi $r + 1 = 5$ — e in questo solo caso —, *ogni* punto dello spazio $S_{r+1} \equiv S_5$ sta sopra una corda della rigata normale $R_r \equiv R^4$, corda che è asse di un cono quadrico di 2ª specie (S_1 - cono) passante per la rigata medesima; sicchè la R^4 di S_4 viene ad avere un punto doppio e a stare a sua volta in un cono quadrico col vertice in questo punto. — Questa stessa eccezione non si presenta invece per la F^4 non rigata, che non ha, in generale, punti doppi. Solo quando il centro di proiezione si sia preso nel piano di una conica della superficie normale (di Veronese), essa viene ad avere tutta una retta doppia (come può succedere anche per la rigata) e a stare perciò sopra un intero fascio di quadriche (in questo caso, di coni quadrici); ma allora essa può considerarsi (e così intenderemo che sia) come un caso particolare della F^4 a sezioni *in generale* ellittiche, che è intersezione generale di due quadriche di S_4.

(3) Intendiamo naturalmente (qui ed in seguito) che per queste superficie non passino altre quadriche all'infuori di quelle contenute nel sistema accennato.

(4) Cfr. C. Segre: *Sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (" Atti R. Acc. di Torino ", XXI) oppure la Mem. cit. nei " Math. Ann. ", XXXIV; n° 14.

(5) V. la nota (2) a pag. prec.

normale ellittico (e in questo caso anzi tutte le quadriche del sistema saranno coni, e collo stesso vertice del cono base) (1). *Per* $r \leq 9$ *la varietà base potrà anche essere una superficie razionale di ordine* r *a sezioni ellittiche* (2).

Una curva appartenente ad S_r *e di ordine* $n > 2r + 2$ *per la quale passino precisamente* $\binom{r-1}{2} - 1$ *quadriche indipendenti sta sempre sopra un cono normale ellittico, se* $r > 9$*;* (e quelle quadriche saranno tutte coni, ecc.). *Se* $r \leq 9$, *la curva potrà anche stare su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche.*

E in particolare: *Una curva normale di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore a* $\frac{k+4}{2}(r-1)+1$ *o* $\frac{k+3}{2}(r-1)+2$ *secondo che* k *è pari o dispari* ($2r+2$, se $k = 1$) *starà sempre su di una rigata razionale normale o su di un cono normale ellittico se lo spazio* (S_r) *cui essa appartiene è superiore a* S_9.

Se però $r \leq 9$, *la curva potrà stare anche su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche; e anche sulla superficie di Veronese, se* $r = 5$.

13. — Una curva tracciata su di un cono normale ellittico di S_r, in modo da avere un punto s^{plo} nel vertice di questo cono e da incontrarne ancora ogni generatrice in altri m punti, è di ordine

$$n = mr + s$$

e di genere

$$p = \binom{m}{2} r + 1 + s(m-1) - z$$

se con z indichiamo il numero dei suoi punti doppi (astrazion fatta dall'accennato punto s^{plo}) (3). Perchè dunque una curva di S_r di dato ordine n e dato genere $p = \pi - k$ possa stare su di un cono normale ellittico, è necessario che le due equazioni scritte siano soddisfatte da una medesima terna di valori interi e positivi di m, s e z (inclusovi per s e z anche lo zero). *A priori* si può dunque aspettarsi la cosa come non sempre possibile; si può aspettarsi cioè che qualche curva della quale siano assegnati ad arbitrio l'ordine ed il genere possa — qualunque siano gli altri suoi caratteri — non stare mai sopra un cono normale ellittico dello spazio a cui appartiene. Vedremo in seguito, esaminando alcuni casi particolari, che così è effettivamente; e che le curve giacenti su di un tal cono devono avere appunto certi ordini e certi generi particolari, o almeno particolarmente legati fra di loro.

---

(1) Ciò perchè i coni quadrici che necessariamente fanno parte del sistema bastano ad esaurirlo. Del resto, se il vertice del cono ellittico non fosse punto doppio per una quadrica qualsiasi di questo sistema, questa dovrebbe ammettere in quello stesso punto un S_{r-1} tangente ben determinato e contenente tutte le generatrici di quel cono; cosa che sarebbe assurda, perchè queste generatrici non stanno in un medesimo iperpiano.

(2) Questo si è dimostrato per $r \geq 5$. Per $r = 4$ poi il sistema di quadriche in discorso si ridurrebbe a un fascio, e avrebbe quindi per varietà base appunto una superficie F^4 a sezioni (in generale) ellittiche. Per $r < 4$ la dimensione $\binom{r-1}{2} - 2$ diventerebbe < 0.

(3) Ciò per la nota formola del sig. Segre, già più volte applicata. Per il caso in cui (come qui) la rigata è un cono, la formola era stata data anche dallo Sturm (" Math. Ann. ", XIX, p. 487).

Il caso di una curva per la quale si possa condurre un cono normale ellittico ci appare dunque, quasi direi, come eccezione. E si potrebbe anche asserire (e ciò apparirà meglio in seguito) che *per* $r > 9$ *una curva di* S_r *di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore ai limiti già più volte ricordati sta* IN GENERALE *sulla rigata razionale normale* R^{r-1}, *e quindi sulle* $\infty^{\binom{r-1}{2}-1}$ *quadriche che contengono quest' ultima superficie.*

§ 6.

Sulle curve di genere $\pi - 1$.

14. — I risultati ottenuti nel paragrafo precedente si applicano a lor volta alle curve di genere $\pi - 1$, per le quali (com'è noto) passano sempre almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti; e non riuscirà forse privo d'interesse l'esaminare un po' più da vicino i vari casi che queste curve possono presentare. Basterà naturalmente che ci occupiamo di quelle di ordine $n < 3r - 1$ (1); e potremo anche limitarci alle curve *speciali,* supporre cioè altresì $n > 2r$. Posto pertanto $n = 2r + i$ dove $0 < i < r - 1$, ed osservato che all'ordine $2r + i$ deve corrispondere il genere massimo $\pi = r + 2i + 1$, è chiaro che le curve da considerarsi saranno del tipo C^{2r+i}_{r+2i} (2).

E anzitutto: quali fra queste curve possono stare sul cono normale ellittico? È chiaro che una C^{2r+i}_{r+2i} contenuta in questo cono dovrebbe avere un punto i^{plo} nel vertice, e incontrare ancora ogni generatrice in *due* altri punti. Supposto pertanto che una tal curva abbia (all'infuori del vertice) r punti doppi, potremo scrivere

$$r + 2i = 1 \,.\, r + 1 + i \,.\, 1 - z$$

ossia $i = 1 - z$; relazione che (dovendo essere $i > 0$, $z \geq 0$) è soddisfatta solo per $i = 1$, $z = 0$. L'unica delle nostre curve che possa stare sul cono ellittico è dunque la C^{2r+1}_{r+2}; questa dovrà passare (semplicemente) pel vertice del cono, e non avrà punti doppi.

Ciò posto, osserviamo che la curva C^{2r+i}, essendo di genere $r + 2i$, conterrà come serie *canonica* una $g^{r+2i-1}_{2r+4i-2}$; e siccome su di essa gli iperpiani (S_{r-1}) segano una g^{r}_{2r+i}, così vi sarà pure, come *residua* di quest'ultima, una g^{i-1}_{3i-2} (3). La considerazione di questa serie residua sarà, come vedremo, fondamentale per lo studio che ci siamo proposti.

---

(1) Se l'ordine fosse più elevato ($n \geq 3r - 1$) la curva starebbe certo su di una superficie di ordine $r - 1$ (v. § 2).

(2) E queste curve sono anche tutte normali, perchè una C^{2r+i} di S_{r+1} non può essere di genere superiore a $(r + 1) + 2(i - 2) + 1 = r + 2i - 2$ (quando sia $i > 0$ e $\leq r + 1$).

(3) È nota la proprietà caratteristica di queste *serie* (reciprocamente) *residue;* che cioè un gruppo dell'una e un gruppo dell' altra, presi pur comunque, formano sempre insieme un gruppo della serie canonica $\left(g^{p-1}_{2p-2}\right)$.

15. E cominciamo col supporre $i=1$ (1). Avremo curve C^{2r+1}_{r+2} di S_r, nelle quali la serie lineare segata dagli iperpiani ha per residua una g^0_1. *Queste curve si possono dunque tutte ottenere come proiezioni delle* C^{2r+2}_{r+2} *(canoniche) di* S_{r+1} *rispett. da loro punti* (2). Sono in generale prive di punti doppi; ne acquistano uno soltanto quando contengono una g^1_3, il che non si verifica, in generale almeno, se $r+1>3$, ossia $r>2$ (3).

16. Poniamo $i=2$, quindi $r>3$ (4); avremo curve del tipo C^{2r+2}_{r+4}, e queste contengono una g^1_4. Potrebbe questa g^1_4 avere un punto fisso (5), e la nostra curva sarebbe allora proiezione di una C^{2r+3}_{π} di S_{r+1}, starebbe sopra una rigata razionale normale, e ne segherebbe ogni generatrice in *tre* punti; avrebbe anche sempre un punto doppio.

Escludiamo questo caso, e supponiamo quindi la g^1_4 priva di punti fissi. Si può domandare se e quando i suoi gruppi possano essere collineari. Supposto che lo siano, e applicando alla serie la formola più volte cit. del sig. SEGRE (Rend. Lincei, 1887), si vede che la cosa risulta possibile in due soli casi, cioè per una C^{10}_8 di S_4 con punto doppio e per una C^{12}_9 di S_5 priva di punti doppi; curve che stanno rispett. sulle rigate R^3 e R^4 e ne tagliano ogni generatrice in *quattro* punti (6).

Se poi i gruppi della g^1_4 non sono collineari, essi staranno però certo in altrettanti piani (cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche* ecc., 14); e questi piani costituiranno una serie ∞^1 razionale, normale (perchè è tale la nostra curva), e quindi di ordine $r-2$ (7); una varietà M^{r-2}_3 dunque, che conterrà la C^{2r+2}_{r+4}. E poichè le quadriche di S_r passanti per questa varietà formano un sistema lineare di dimensione $\binom{r-2}{2}-1$, vi sarà certo un altro sistema, pure lineare, di dimensione

$$\left\{\binom{r-1}{2}-2\right\}-\left\{\binom{r-2}{2}-1\right\}-1=r-4$$

e costituito da quadriche passanti tutte per la curva C^{2r+2}, ma non per la varietà M^{r-2}_3. Queste quadriche segheranno già ogni piano di M^{r-2}_3 in quattro punti fissi (formanti un gruppo della g^1_4); imporre dunque ad una di esse di contenere uno di

(1) Le proposizioni generali trovate precedentemente non sono applicabili ai casi di $i=1$ e $i=2$, nei quali la curva in discorso risulta di ordine $\leq 2r+2$. La trattazione di questi casi è però ugualmente interessante, e servirà nel tempo stesso a render più completo il nostro studio.

(2) In generale, una curva *speciale* C^n di S_r si può ottenere come proiezione di una C^{n+1} di S_{r+1} quando la serie residua (rispetto alla serie canonica) della g^r_n da essa rappresentata ha qualche punto fisso. È questa la traduzione (per le curve degli iperspazi) del teorema inverso del *Reductionssatz* di NOETHER.

(3) Se la C^{2r+2}_{r+2} di S_{r+1} sta (come può effettivamente stare) sul cono normale ellittico di ordine $r+1$ — epperò contiene (condizione *necessaria* e *sufficiente* a ciò) una serie ∞^1 ellittica di coppie di punti — la sua proiezione in S_r starà sul cono ellittico di ordine r; è così che si ottiene quell'unico caso già considerato di curva di genere $\pi-1$ giacente su di un tal cono.

(4) Essendosi supposto $i<r-1$, i risultati che otterremo per un dato valore di i varranno solo per $r>i+1$ (ossia per gli spazi superiori a S_{i+1}).

(5) Più di uno, si vede subito che non può averne.

(6) Queste curve si possono ottenere come intersezioni delle rigate che le contengono con varietà del quarto ordine condotte per *due* o rispett. *quattro* loro generatrici. Nel primo caso la varietà M^4_3 dovrebbe anche toccare la rigata R^3 in un suo punto.

(7) Da ciò segue altresì che mai tre punti di uno stesso gruppo della g^1_4 potranno essere collineari.

questi piani equivarrà ad imporle *due* (nuove) condizioni; e noi potremo perciò sempre trovare nell'ultimo sistema una quadrica la quale contenga almeno $\frac{r-4}{2}$ o $\frac{r-5}{2}$ (secondo che r è pari o dispari) fra quegli stessi piani. L'intersezione residua di questa quadrica colla varietà M_3^{r-2} sarà una superficie F di ordine (non superiore a) $\frac{3r-4}{2}$ rispett. $\frac{3r-3}{2}$; e su questa dovrà stare la curva proposta. La superficie stessa conterrà pure una ∞^1 razionale di coniche, e sarà perciò (a meno che la conica generica non si spezzi) *razionale, a sezioni iperellittiche;* sarà anche normale, perchè tali sono le sue sezioni (1). Il genere di queste sarà uguale all'ordine della superficie F diminuito di $r-1$; non potrà quindi essere superiore a $\frac{r-2}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$; ma, in generale, avrà precisamente l'uno o l'altro di questi valori. La curva C^{2r+2} (che dicemmo stare su F) si potrà ottenere come intersezione (completa o parziale) di F stessa e di una quadrica (altra del sistema ∞^{r-4}, e non contenente la superficie F (2)); e se di queste essa è intersezione solo parziale, l'intersezione residua sarà costituita da un certo numero $\left(\text{nel caso più generale } \frac{r-6}{2} \text{ o } \frac{r-5}{2}\right)$ di coniche. Infatti ogni quadrica passante per la curva C^{2r+2} e non per F sega ciascuna delle coniche di questa già in *quattro* punti fissi, posti su quella curva; sicchè la conica di F passante per un nuovo punto eventualmente comune a F stessa e a quella quadrica avrebbe comuni con quest'ultima già *cinque* punti, e starebbe perciò tutta su di essa (3).

L'ordine della superficie F potrà però qualche volta abbassarsi, — e altrettanto avverrà allora del genere delle sue sezioni —. Così, p. es., se la M_3^{r-2} fosse un cono — se cioè quegli ∞^1 piani passassero tutti per un medesimo punto — vi sarebbe certo nel sistema ∞^{r-4} una quadrica contenente anche $r-5$ fra quegli stessi piani; la superficie F risulterebbe allora di ordine $r+1$ e colle sezioni di genere *due,* e le sue ∞^1 coniche passerebbero tutte per un medesimo punto (4). La curva C^{2r+2} sarebbe allora intersezione completa di questa superficie con una quadrica.

Più particolarmente ancora può darsi che quelle ∞^1 coniche (passando pur sempre per uno stesso punto) si scindano tutte in coppie di rette (concorrenti in questo punto); allora la superficie F sarebbe un cono di ordine $r+1$ e genere *due,* e la C^{2r+2} sarebbe intersezione (completa) di questo cono con una quadrica non passante pel suo vertice. Questa curva conterrebbe allora una serie ∞^1 (di genere 2) di coppie di punti, e la g_4^1 sarebbe, in un certo senso, *composta* mediante quella serie (sarebbe cioè la g_2^1 entro la stessa ∞^1 di coppie di punti) (5).

---

(1) Sono infatti curve iperellittiche, ottenibili come intersezioni di una rigata razionale normale con una quadrica condotta per un certo numero di sue generatrici.

(2) E di quadriche così fatte ne esisteranno certo, se $r>4$.

(3) Abbiamo così anche un modo, e abbastanza semplice, per trovare delle curve piane atte a rappresentare queste C_{r+4}^{2r+2}, partendo cioè dalle note rappresentazioni delle superficie a sezioni iperellitiche (Cfr. alcuni lavori del Castelnuovo che verranno cit. più particolarmente in seguito).

(4) Questa superficie si rappresenterebbe precisamente con un sistema di sestiche piane aventi a comune un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo.

(5) Il ragionamento fatto è, come si vede, assai semplice; ma si può anche applicarlo (con poche e lievissime modificazioni) in molti casi analoghi, alcuni dei quali saranno pure accennati in seguito. Per questo appunto ho voluto esporlo qui per disteso.

Questo ragionamento non è più applicabile (tutto almeno) al caso di $r=4$. Dal fatto però che per la C_8^{10} di S_4 passano sempre ∞^1 quadriche (tutte quelle cioè di un fascio) segue senz'altro che questa curva dovrà stare sulla superficie F^4 comune a quelle stesse quadriche (e uno dei coni del fascio sarà precisamente costituito dai piani che contengono i singoli gruppi della g_4^1).

Riassumendo dunque, abbiamo: *Una curva* C_{r+4}^{2r+2} *di* S_r $(r>4)$ *la quale non stia sulla rigata* R^{r-1} *sta in generale su di una superficie razionale normale di ordine* $\frac{3r-4}{2}$ *o* $\frac{3r-3}{2}$ *(secondo che* r *è numero pari o dispari) a sezioni iperellittiche di genere* $\frac{r-2}{2}$ *o rispett.* $\frac{r-1}{2}$; *e può ottenersi precisamente come intersezione di questa superficie con una quadrica passante per* $\frac{r-6}{2}$ *o* $\frac{r-5}{2}$ *sue coniche. L'ordine della superficie, e corrispondentemente il genere delle sue sezioni e il numero di queste coniche, possono però abbassarsi e ridursi rispett. fino ai valori limiti* $r+1$, 2, 0; *in quest'ultimo caso la superficie può anche essere un cono di ordine* $r+1$ *e genere due. — Infine per* $r \leq 8$ *la curva* C_{r+4}^{2r+2} *può anche stare su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche comune a tutte le quadriche che la contengono (e ciò si verifica anzi sempre per* $r=4$) (1); *e per* $r=5$ *esiste anche una* C_9^{12} *contenuta in una* F_2^4 *di Veronese.*

Queste curve sono tutte prive di punti doppi, meno l'ultima (C_9^{12} di S_5) che ne ha uno (2).

17. Per $i \geq 3$ lo studio delle curve C_{r+2i}^{2r+i} di S_r rimane assai facilitato, potendo noi già asserire *a priori* (in forza di teoremi precedenti) che ciascuna di queste curve dovrà stare su di una superficie normale a sezioni razionali od ellittiche. Sappiamo anzi che questo secondo caso potrà presentarsi solo per $r \leq 9$ (e anzi solo per $r \leq 8$ se l'ordine $2r+i=18+i$ della curva in S_9 non è un multiplo di 3); ma possiamo anche ritrovare la stessa cosa per altra via.

---

(1) Questo ci è confermato (almeno in parte) anche dall'enumerazione delle costanti, la quale ci dice appunto che la C_{r+4}^{2r+2} generale non sta certo sulla F^r razionale a sezioni ellittiche se $r>4$, ma può forse starvi per $r=4$. Infatti le curve C_{r+4}^{2r+2} di S_r formano, tutte insieme, un sistema di dimensione *almeno* uguale a $(r+1)(2r+2)-(r+3)(r-3)$ ossia $r^2+4r+11$ (cfr. Castelnuovo: *Numero delle involuzioni razionali etc.;* " Rend. Acc. dei Lincei "; serie II, 1889). Quelle invece che stanno sopra una F^r a sezioni ellittiche (esclusa almeno la F^8 di seconda specie) ne formano uno di dimensione $(r^2+10)+(3r+5)=r^2+3r+15$. (Infatti le F^r di S_r a sezioni ellittiche sono ∞^{r^2+10} $(r \leq 9)$, e su ciascuna di queste le C_{r+4}^{2r+2} — che si rappresentano con C^7 piane aventi nei $9-r$ punti fondamentali rispett. *un* punto triplo e $8-r$ punti doppi — formano (per $r \leq 8$) $9-r$ sistemi lineari di dimensione appunto $35-6-3(8-r)=3r+5$). E questo secondo numero $(r^2+3r+15)$, inferiore al primo per $r \geq 5$, diventa invece eguale ad esso per $r=4$.

(2) Volendo fare a parte la ricerca delle C_{r+4}^{2r+2} con punto doppio, si potrebbe osservare che queste ultime contengono una g_{2r}^{r-1}, quindi (come residua), una g_6^2; e questa può essere *composta* mediante una g_3^1 (ma non altrimenti) — e allora si hanno le curve esistenti sulla rigata R^{r-1} e considerate da principio —, oppure *non composta* (e senza punti fissi). In tal caso la C^{2r+2} deve potersi riferire a una sestica piana, il che esige $r+4 \leq 10$, quindi $r \leq 6$, e anzi $r \leq 5$ perchè la sestica piana generale non contiene alcuna g_4^1. Per $r=4$ si ha allora la C_8^{10} di S_4 coi gruppi della g_4^1 collineari; per $r=5$, la C_9^{12} di S_5 posta sulla superficie di Veronese.

Abbiamo già osservato che la curva C^{2r+i}_{r+2i} contiene una serie lineare g^{i-1}_{3i-2}. Perciò, se questa serie non è composta e non ha punti fissi, quella curva sarà certo riferibile a una C^{3i-2}_{r+2i} (semplice) di S_{i-1}, sulla quale la g^{i-1}_{3i-2} verrà segata dagli S_{i-2} contenuti nel suo S_{i-1}.

La serie g^{i-1}_{3i-2} *non può essere composta.* Infatti, essendo $\frac{3i-2}{i-1} < 4$ (se $i > 2$), essa potrebbe tutt'al più essere composta con una serie ∞^1 di coppie o di terne di punti. Quest'ultimo caso si esclude subito, perchè l'ordine $3i-2$ non è certo multiplo di 3. Quanto al primo, esso potrebbe presentarsi soltanto quando i fosse pari; e, supposto allora $i = 2k$, il genere della serie di coppie di punti non potrebbe superare il limite $(3k-1)-(2k-1) = k$ (1). E questo ci porterebbe a concludere che le congiungenti di quelle stesse coppie di punti formerebbero una rigata di ordine $\leq r-1$, risultato che è manifestamente incompatibile colle nostre ipotesi (anche nel caso estremo dell'ordine $= r-1$).

La serie g^{i-1}_{3i-2} *può avere* un *punto fisso.* Allora la curva C^{2r+i}_{r+2i} è proiezione di una C^{2r+i+1}_{π} di S_{r+1}; sta quindi sulla rigata razionale normale e ha un punto doppio. Le generatrici di questa rigata determinano su di essa una g^1_3, e la g^{i-1}_{3i-3} che si ottiene dalla g^{i-1}_{3i-2} col fare astrazione dal punto fisso è precisamente composta con quest'ultima serie. — E possiamo anche dire, inversamente, che *ogni* C^{2r+i}_{r+2i} *di* S_r $(i < r-1)$ *tracciata sulla rigata* R^{r-1} *in modo da incontrarne ogni generatrice in tre punti deve avere un punto doppio e può ottenersi come proiezione di una* C^{2r+i+1} *di* S_{r+1}. — Più di un punto fisso la g^{i-1}_{3i-2} non può avere.

Escluse pertanto queste curve contenenti una g^1_3, non resteranno che quelle riferibili a una C^{3i-2} di S_{i-1}; e siccome d'altra parte il genere di questa C^{3i-2} non può essere superiore a 15, se $i=3$; a 16, se $i=4$; e a $3(i+1)$, se $i > 4$, potremo concludere che, fuori della rigata R^{r-1},

le curve C^{2r+3}_{r+6} possono esistere soltanto per $r+6 \leq 15$ ossia per $r \leq 9$ (dunque per $r = 5, 6, 7, 8, 9$);

le curve C^{2r+4}_{r+8} solo per $r+8 \leq 16$ ossia per $r \leq 8$ (dunque per $r = 6, 7, 8$);

le curve C^{2r+i}_{r+2i} $(i > 4)$ solo per $r+2i \leq 3(i+1)$ ossia per $r \leq i+3$ (dunque per $r = i+2, i+3$);

e anzi queste ultime (come si vede facilmente) se $r > 9$ dovranno stare anch'esse sulla rigata R^{r-1}, ma ne taglieranno ogni generatrice in *quattro* (anzichè in *tre*) punti (2).

---

(1) La serie g^{i-1}_{3i-2} si riduce infatti, su questa ∞^1 di coppie di punti, a una g^{2k-1}_{3k-1}; e quest'ultima serie è certo *non speciale* se $3k-1 < 2(2k-1)$ ossia se $k > 1$.

(2) Per $r \leq 9$ potranno invece essere contenute ancora in superficie di ordine r; ciò proviene dal fatto che la curva C^{3i-2} di S_{i-1}, pur essendo in generale contenuta in una rigata R^{i-2} e incontrando le generatrici di questa in *quattro* punti, può tuttavia, per valori particolari di i, incontrare queste stesse generatrici in *cinque* punti, o anche stare sulla superficie di Veronese. — E questo limite 9 (e anzi 8 quando l'ordine della curva, per $r=9$, non risulterebbe multiplo di 3) mi sembra veramente notevole. Certo che non ne abbiamo una nuova dimostrazione dei risultati già ottenuti dal sig. Del Pezzo per le superficie razionali a sezioni ellittiche (in quanto specialmente queste non

18. Possiamo riassumere i risultati ottenuti sulle curve di genere $\pi - 1$ e di ordine compreso fra $2r+1$ e $3r-2$ (limiti inclusi) — curve quindi del tipo C^{2r+i}_{r+2i} $(0 < i < r-1)$ — nel modo seguente:

Per ogni valore di r *e di* i esiste:

Una C^{2r+i}_{r+2i} con punto doppio e contenuta in una rigata razionale normale R^{r-1} della quale essa incontra ogni generatrice in *tre* punti;

Per ogni valore di r abbiamo ancora:

Una C^{2r+1}_{r+2}, in generale priva di punti doppi, che è sempre proiezione di una C^{2r+2}_{r+2} canonica di S_{r+1}. Può contenere una serie ellittica di coppie di punti, e allora sta sul cono normale ellittico di ordine r (e passa semplicemente pel vertice di questo cono);

Una C^{2r+2}_{r+4}, che contiene una g^1_4 (lineare) e sta (in generale) su di una superficie razionale normale a sezioni iperellittiche di genere $\leq \frac{r-1}{2}$. Questa stessa curva può contenere una serie ∞^1 di genere *due* di coppie di punti, ed è allora intersezione del cono normale di genere due (e ordine $r+1$) con una quadrica non passante pel vertice di questo cono. Anch'essa non ha, in generale, punti doppi;

Una C^{3r-3}_{3r-6}, anche priva di punti doppi, contenuta in una rigata R^{r-1} e incontrata da ogni generatrice di questa in *quattro* punti. Essa è riferibile (in generale) se r è pari, a una C^{r+1} piana con punto $(r-3)^{\text{plo}}$; se r è dispari, a una C^{r+2} piana con un punto $(r-2)^{\text{plo}}$ e un punto *triplo* (contiene dunque in questo caso una g^1_{r-1});

Una C^{3r-2}_{3r-4} con punto doppio, e contenuta pure in una rigata R^{r-1} di cui incontra ogni generatrice in *quattro* punti. Essa può riferirsi (in generale) a una C^{r+2} piana con un punto $(r-2)^{\text{plo}}$ e un punto doppio.

Per $r \leq 9$ si hanno poi ancora le curve seguenti:

---

possono esistere per $r > 9$); ma ne abbiamo però una conferma, notevole sopratutto per il modo in cui vi siamo giunti, partendo cioè da un ordine di idee affatto diverso da quello in cui era lo stesso sig. Del Pezzo. La stessa via, considerando le curve di genere $\pi - 2$, $\pi - 3$, ..., conduce ai limiti analoghi 11, 14, ...

Indicazione della curva		Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili (1)
Nello spazio S_4	C^{10}_{8}	—	Superficie F^4 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2)$
Nello spazio S_5	C^{12}_{9}	1	Superficie F^4 di *Veronese*	C^6 piana (A^2)
	C^{12}_{9}	—	„ F^5 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2)$
	C^{13}_{11}	—	„ „ „	„ $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2)$
Nello spazio S_6	C^{14}_{10}	—	Superficie F^6 a sezioni ellittiche	„ $(A^3 B_1^2 B_2^2)$
	C^{15}_{12}	—	„ „ „	„ $(A_1^2 A_2^2 A_3^2)$
	C^{16}_{14}	—	„ „ „	C^8 piana $(A_1^3 A_2^3 B^2)$
Nello spazio S_7	C^{16}_{11}	—	Superficie F^7 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B^2)$
	C^{17}_{13}	—	„ „ „	„ $(A_1^2 A_2^2)$
	C^{18}_{15}	—	„ „ „	C^8 piana $(A_1^3 A_2^3)$
	C^{19}_{17}	—	„ „ „	„ $(A^3 B^2)$
Nello spazio S_8	C^{18}_{12}	—	Superficie F^8 di prima specie	C^7 piana (A^3)
	C^{19}_{14}	—	„ „ „	„ (A^2)
	C^{21}_{18}	—	„ „ „	C^8 piana (A^3)
	C^{22}_{20}	—	„ „ „	„ (A^2)
	C^{18}_{12}	—	„ di seconda specie	„ $(A^4 B^3)$
	C^{20}_{16}	—	„ „ „	C^9 piana $(A_1^4 A_2^4)$
	C^{22}_{20}	—	„ „ „	C^{10} piana $(A^5 B^4)$
Nello spazio S_9	C^{21}_{15}	—	Superficie F^9 a sezioni ellittiche	C^7 piana generale
	C^{24}_{21}	—	„ „ „	C^8 piana „

(1) Le parentesi $\left(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2\right)$ ecc. di quest'ultima colonna — e così pure quelle dell'analoga tabella alla fine del § 8 — indicano i punti multipli delle varie curve piane. La prima C^7 avrebbe quindi un punto triplo (A^3) e quattro punti doppi $\left(B_1^2 \dots B_4^2\right)$ — la multiplicità essendo sempre data dall'indice superiore —. E da questo si deduce anche facilmente quali serie notevoli di gruppi di punti contengano le varie curve.

§ 7.

Sistemi lineari di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2} - 3$. Loro varietà basi. — Superficie di ordine $r + 1$.

19. — Lo stesso teorema del n° 9 ci dà ancora, per $i = 3$:

Se nello spazio S_r ($r \geq 5$) *si ha un gruppo di* $2r + 3 + x$ ($x \geq 4$) *punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r + 3$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, questi punti staranno tutti su di una* $M_3^{r-2} \equiv \infty^1$ *razionale normale di piani (che sarà anche segata in una rigata* R^{r-3} *dall'*S_{r-2} *di* $r - 1$ *fra quei punti).*

Si può mostrare anche qui che le quadriche passanti per quei primi $2r + 3$ punti dovranno averne comuni di conseguenza non solo x, ma infiniti altri. — Supponiamo infatti che il loro sistema lineare abbia soltanto un numero finito $2r + 3 + x$ di punti basi. Per questi punti passano certo $\binom{r+2}{2} - 2r - 3$ ossia $\binom{r}{2} - 2$ quadriche indipendenti, mentre per la varietà M_3^{r-2} non ne passano che $\binom{r-2}{2}$; vi sarà dunque un sistema lineare (almeno) ∞^{2r-6} (e quindi, se $r \geq 5$, di dimensione certo > 0) di quadriche passanti per i punti proposti e non per la varietà M_3^{r-2}. Fra queste prendiamone, possibilmente, una che seghi la M_3^{r-2} stessa in una superficie irriduttibile; superficie che risulterà di ordine $2r - 4$ e colle sezioni iperellittiche di genere $r - 3$, e passerà per quei certi punti. Si seghi ancora questa superficie con una quadrica che non la contenga, ma passi per questi stessi punti; si avrà così una curva di ordine $4r - 8$, per la quale passeranno $\binom{r-2}{2} + 2$ quadriche indipendenti. Su questa le quadriche di S_r segheranno una g^{4r-5}_{8r-16}; e obbligando queste stesse quadriche a passare per quei primi $2r + 3$ punti, rimarrà una g^{2r-8}_{6r-19} che dovrà avere x punti fissi. Se noi dimostreremo che questa serie (supposta almeno la C^{4r-8} irriduttibile) non può avere più di *tre* punti fissi, potremo dunque concluderne che, nel nostro caso, la superficie o la curva di cui sopra saranno necessariamente riduttibili, e che perciò le quadriche passanti per i punti proposti avranno certo infiniti punti a comune (1). Supposto pertanto che la g^{2r-8}_{6r-19} possa avere anche *tre* punti fissi, basterà mostrare che la g^{2r-8}_{6r-22} ottenuta astraendo da questi ultimi non può averne più alcuno. È questo appunto che ora faremo.

La superficie considerata di ordine $2r - 4$ si può infatti rappresentare sul piano col sistema delle curve di un certo ordine $r - 1 + \mu$ ($\mu \leq r - 3$) aventi a comune un punto $(r - 3 + \mu)^{plo}$ — che chiameremo P — e poi ancora μ punti doppi infi-

(1) Infatti, se la superficie F^{2r-4} fosse *necessariamente* riduttibile, la cosa sarebbe quasi evidente, perchè in ogni iperpiano — e precisamente sulla sezione determinata da questo nella M_3^{r-2} — vi sarebbe qualche punto comune a tutte quelle quadriche. Che se poi la superficie potesse prendersi irriduttibile, ma non così la curva sua sezione con una quadrica, le sezioni così ottenute (non potendo, come si vede facilmente, spezzarsi in curve di un fascio) avrebbero certo tutta una parte a comune (parte che passerebbe per alcuni almeno fra i punti proposti).

nitamente vicini a questo e $2r-4$ punti semplici (1). La sezione determinata da una quadrica in quella superficie — in particolare dunque la curva considerata di ordine $4r-8$ — si rappresenterà allora con una curva piana di ordine $2r-2+2\mu$ avente il punto P per $(2r-6+2\mu)^{plo}$ e poi ancora μ punti quadrupli (A) infinitamente vicini a questo e $2r-4$ punti doppi (B). Questa curva — che chiameremo C — è di genere $4r-11$, e contiene perciò come serie canonica una g_{8r-24}^{4r-12}; ad ogni g_{6r-22}^{2r-8} su di essa corrisponderà dunque come residua una g_{2r-2}^{2}. Fissato pertanto un gruppo arbitrario G_{2r-2} di quest'ultima serie, potremo segare su C la g_{6r-22}^{2r-8} col sistema lineare delle curve di ordine $2r-5+2\mu$ che passano per il gruppo G_{2r-2} e sono aggiunte a C stessa, hanno cioè il punto P per $(2r-7+2\mu)^{plo}$, i μ punti A per tripli, e passano ancora semplicemente per i $2r-4$ punti B (2). Da una qualunque di queste curve si staccheranno però le μ rette che congiungono P ai singoli punti A; e, facendo astrazione da queste, rimarrà una curva generica Γ di ordine $2r-5+\mu$ avente il punto P per $(2r-7+\mu)^{plo}$, i μ punti A per doppi, e passante ancora semplicemente per i $2r-4$ punti B. E qui possono darsi due casi:

1° La curva generica Γ è irriduttibile;

2° La curva stessa si spezza; e in tal caso, non potendo spezzarsi in curve di un determinato fascio (3), essa conterrà necessariamente una parte fissa. E questa parte può essere costituita soltanto:

a) Da un certo numero di rette uscenti dal punto P;

b) Da una curva di un certo ordine h avente in P la multiplicità $h-1$ (4).

Esaminando separatamente questi diversi casi — cosa che non presenta d'altronde alcuna difficoltà — si trova che ciascuno di essi conduce effettivamente a determinare sulla curva C delle serie g_{6r-22}^{2r-8}, ma prive tutte di punti fissi. Per non dilungarci troppo, ci limitiamo ad accennare in nota il ragionamento (5). — La

(1) Il numero μ è la differenza da $r-3$ dell'ordine della *direttrice minima* della superficie in discorso (ordine che è appuuto $\leq r-3$). Cfr. ad es. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche ecc.* (" Rend. di Palermo ", IV).

(2) La serie g_{6r-22}^{2r-8} è certo completa, essendo tale la g_{8r-16}^{4r-5} e quindi la g_{8r-19}^{2r-8} (v. pag. prec.).

(3) Perchè se no la g_{6r-22}^{2r-8} risulterebbe composta mediante una serie *lineare*, di ordine ≤ 3 se $r>5$ e ≤ 4 se $r=5$; e di serie così fatte sulla curva C non ne esistono. (Per $r=5$ sarebbe anche una g_4^1 diversa da quella che è segata dalle rette uscenti da P).

(4) Non da una curva di ordine h avente in P la multiplicità $h-2$, perchè se no la g_{6r-22}^{2r-8} dovrebbe risultare composta mediante la g_4^1 segata dal fascio P.

(5) Cominciamo col supporre che la curva generica Γ passante pel gruppo G_{2r-2} sia irriduttibile. — È facile riconoscere che un sistema lineare ∞^d di curve di un ordine qualunque n avente un punto $(n-2)^{plo}$ e μ punti doppi basi non può avere ancora, se $d \geq n-\mu-1$, più di $3(n-\mu)-(d+1)$ punti basi semplici, e non più di $4(n-\mu)-2(d+1)$ se invece $d<n-\mu-1$; ciò segue immediatamente dal fatto che la *serie caratteristica* del sistema (ossia la serie lineare segata sopra una curva generica di questo stesso sistema dalle rimanenti curve di esso) è non speciale nel primo caso, e speciale nel secondo (e quindi — fatta astrazione dai punti fissi — composta mediante la g_2^1). Nel nostro caso si ha $n=2r-5+\mu$, $d=2r-8$; sicchè i punti basi semplici non potranno essere in numero superiore a

$$4(2r-5)-2(2r-7)=4r-6,$$

e siccome tanti appunto ci sono già dati dai $2r-4$ punti B e dal gruppo G_{2r-2}, così è chiaro che la g_{6r-22}^{2r-8} non potrà avere in questo caso nessun punto fisso.

Supponiamo ora che le curve Γ passanti pel gruppo G_{2r-2} contengano tutte una certa retta a

serie g^{2r-8}_{6r-19} sulla curva $C^{(r-8}$ (supposta irriduttibile) non può avere dunque più di *tre* punti fissi, e questo ci permette di concludere:

Se nello spazio S_r $(r \geq 5)$ *si ha un gruppo di* $2r+7$ *o più punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+3$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, queste quadriche avranno certo a comune infiniti punti (e quindi tutta una linea, passante per una parte almeno di quei primi punti).*

Ovvero anche: *Se nello spazio* S_r $(r \geq 5)$ *si hanno* k $(\geq 2r+4)$ *punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+3$ *qualunque fra essi passino sempre pei rimanenti — ma non per altri punti fissi — dovrà essere altresì* $k \leq 2r+6$ (1).

20. Questi stessi risultati, uniti ad osservazioni precedenti, ci dànno ancora:

Una curva (irriduttibile) appartenente a S_r *e di ordine superiore a* $2r+4$ *per la quale passino* $\binom{r-1}{2}-2$ *quadriche indipendenti è sempre contenuta in una superficie comune a queste stesse quadriche.* Si può anche riconoscere facilmente che questa superficie sarà di ordine $\leq r+1$ (2); e sarà anzi (in generale) di ordine precisamente

---

passante per P. Astraendo da questa, la curva residua variabile (che supponiamo irriduttibile) dovrà essere di ordine $2r-6+\mu$, colla multiplicità $2r-8+\mu$ nel punto P, e coi soliti μ punti doppi (A) e $2r-4$ punti semplici (B) basi. Ma il sistema di queste curve non può avere (v. sopra) più di $4r-10$ punti basi semplici, e d'altra parte i punti B e il gruppo G_{2r-2} ne dànno già complessivamente $4r-6$; quattro di questi punti (e precisamente del gruppo G_{2r-2}) dovranno dunque stare sulla retta a (ossia il gruppo G_{2r-2} dovrà contenere tutto un gruppo della g^1_4); ma con tutto ciò la serie g^{2r-8}_{6r-22} non potrà avere ancora punti fissi. — Questo ragionamento suppone implicitamente che la retta a non passi per nessuno dei punti A e B; ma se passasse anche per uno di questi, le considerazioni stesse già esposte, con poche modificazioni, si potrebbero ancora ripetere e condurrebbero all'identica conclusione. E un ragionamento analogo si potrebbe anche fare quando dalla curva generica Γ si staccasse un numero maggiore qualsiasi di rette uscenti da P.

Se infine la curva generica Γ contiene una parte fissa di un certo ordine h e colla multiplicità $h-1$ nel punto P (parte che potrà essere irriduttibile, o anche contenere a sua volta qualche retta uscente da questo stesso punto) è chiaro che, astraendo da tutta questa parte, rimarrà un sistema lineare di curve γ di un certo ordine $k=2r-5+\mu-h$ e colla multiplicità $k-1$ nel punto P. Questo sistema sarà di dimensione $2r-8$ e avrà (fuori di P) precisamente

$$\frac{k(k+3)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}-2r+8=2k-2r+8$$

punti basi semplici. Ma fra le intersezioni della sua curva generica γ^k colla C ne cadono nel punto P sole $(k-1)(2r-6+2\mu)$; fuori di P dovranno dunque esservene

$$k(2r-2+2\mu)-(k-1)(2r-6+2\mu)=4k+2r-6+2\mu$$

Ammesso perciò (ed è il caso più sfavorevole) che fra quei $2k-2r+8$ punti vi siano tutti μ i punti A e che i rimanenti siano anche tutti punti B, è chiaro che da questi stessi punti potranno essere assorbite soltanto

$$4\mu+2(2k-2r+8-\mu)=4k-4r+16-2\mu$$

di quelle intersezioni, e perciò certo $6r-22$ fra esse cadranno fuori dei punti basi del sistema delle γ^k e saranno quindi *tutte variabili.* Questo caso *più sfavorevole* è anzi il solo che possa presentarsi (quando si voglia ottenere una g^{2r-8}_{6r-22}); ma esso ci conduce ancora a una serie priva di punti fissi.

(1) Il valore massimo $k=2r+6$ può essere però raggiunto; e se ne ha un esempio nel gruppo generale delle intersezioni di una quadrica con una curva (normale) di ordine $r+3$ e genere 3. Così pure, nell'ultimo enunciato del n° 10, può essere anche $k=2r+4$.

(2) E quindi di ordine $\leq r+2$ la linea considerata nel penultimo enunciato del n°. preced.

$= r + 1$, se per la curva proposta non passa un numero di quadriche superiore a quello indicato. — Avvertiamo però che in questo enunciato (e così pure in seguito) si dovrà sempre ritenere $r \geq 6$ —. Possiamo anche aggiungere:

Se un sistema lineare di quadriche di S_r *è di dimensione* $\binom{r-1}{2} - 3$ *e ha infiniti punti basi, questi punti non potranno costituire* (colle stesse riserve del teorema analogo dato al n° 11) *che una curva di ordine* $\leq 2r + 4$ *o una superficie di ordine* $\leq r + 1$.

La prima di queste due proposizioni si applica in particolare (cfr. § 2) alle curve (normali) di genere $\pi - k$ e di ordine superiore a

$$\left\{ \frac{k-l}{3} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + l + 1$$

dove l è il resto della divisione di k per 3.

21. Si vede subito però che dalle superficie di ordine $r + 1$ testè comparse nel nostro studio possiamo escludere senz' altro tutte quelle non normali (per le quali passano appunto, in generale, meno di $\binom{r-1}{2} - 2$ quadriche indipendenti). E, fra quelle normali, si devono anche escludere le rigate ellittiche, per le quali ne passano soltanto $\binom{r-1}{2} - 3$. Non rimangono perciò che le superficie (normali) a sezioni di genere due, cioè:

a) i coni normali di genere due:

b) le superficie non rigate, che sono razionali, ma esistono soltanto per $r \leq 11$ (1).

Nel caso estremo $r = 11$ queste superficie possono rappresentare:

il sistema delle quartiche piane con un punto doppio base;

„ delle quintiche con un punto triplo e un punto doppio;

„ delle sestiche con un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo.

Per $r < 11$ rappresentano invece i sistemi ottenuti da questi coll' aggiunta di uno o più punti basi semplici.

Quindi: *Una curva appartenente a* S_r *e di ordine superiore a* $2r + 4$ *per la quale passino precisamente* $\binom{r-1}{2} - 2$ *quadriche indipendenti — in particolare dunque una curva normale di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore al limite ricordato poc'anzi — sta sempre sopra un cono normale di genere due, o (se* $r \leq 11$*) su di una superficie razionale normale a sezioni di genere due comune a tutte quelle quadriche.*

Per il cono di genere due possiamo ripetere le stesse considerazioni già fatte per il cono ellittico (n° 13), e dedurne che il caso di una curva giacente su di esso si presenta solo, per così dire, come eccezione. Ne seguirà che le curve di genere $\pi - k$ e di ordine $n \geq \left\{ \frac{k-l}{3} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + l + 2$ dove l ha il noto signi-

(1) Più generalmente anzi, una superficie razionale colle sezioni di genere $p > 1$ non può appartenere a uno spazio superiore a S_{3p+5} (e se appartiene a un S_{3p+5} le sue sezioni devono essere curve iperellittiche). Questi risultati — e le loro traduzioni per i sistemi lineari di curve piane — si trovano in diversi lavori del sig. Castelnuovo; cfr. ad es.: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (“ Rend. di Palermo „, IV); *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* (“ Ann. di Mat. „, serie II, t. XVIII); e *Ricerche generali sui sistemi lineari di curve piane* (“ Mem. Acc. di Torino „, serie II, vol. XLII).

ficato staranno *in generale,* se $r > 11$, sopra almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti, e anzi precisamente sopra $\binom{r-1}{2}$ tali, ancorchè non abbiano l' ordine superiore a $(k+2)(r-1)+1$.

§ 8.

Sulle curve di genere $\pi - 2$.

22. I risultati ottenuti nel § precedente si applicano in particolare alle curve di genere $\pi - 2$, per le quali, come sappiamo, passano sempre almeno $\binom{r-1}{2} - 2$ quadriche indipendenti (e ne passano anzi *certo* almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ se l'ordine è superiore a $3r-2$, e $\binom{r-1}{2}$ se è superiore a $4r-3$; condizioni queste, s' intende, solo *sufficienti*). — Daremo ora un cenno su queste curve di genere $\pi - 2$ (come già si è fatto per quelle di genere $\pi - 1$); ma proponendoci di tenere, nei limiti del possibile, la massima brevità.

E cominciamo colle curve di ordine inferiore a $3r-1$, quindi del tipo C^{2r+i}_{r+2i-1} (supposto anche qui $0 < i < r-1$) (1). Esse contengono per $i \geq 2$ — come residua della g^r_{2r+i} segata dagli iperpiani — una g^{i-2}_{3i-4}, e di ciò avremo a valerci in seguito. Fra queste curve, come si vede facilmente, possono stare sul cono normale ellittico soltanto quelle di ordine $2r+1$ $(m=2,\ s=z=1)$ e $2r+2$ $(m=s=2,\ z=0)$; e sul cono normale di genere due soltanto quelle di ordine $2r+3 (m=2,\ s=1,\ z=0)$ (2).

23. Facendo $i=1$, abbiamo curve del tipo C^{2r+1}_{r+1}, e queste sono certo *non speciali.* Possono stare, come abbiamo veduto or ora, sul cono normale ellittico (3).

Per $i=2$ $(r > 3)$ abbiamo delle C^{2r+2}_{r+3}, che si possono tutte ottenere come proiezioni delle curve canoniche C^{2r+4}_{r+3} di S_{r+2} rispett. da loro corde. Non hanno in generale punti doppi, perchè se no dovrebbero contenere almeno una g^1_4, il che, in generale appunto, per $r+3 > 6$ ossia $r > 3$ non si verifica.

Per $i=3$ $(r > 4)$ abbiamo curve C^{2r+3}_{r+5} contenenti una g^1_5. E qui ci converrà distinguere vari casi: (4)

a) Curve con due punti doppi: Stanno tutte sulla rigata R^{r-1} e ne incontrano ogni generatrice in *tre* punti. Solo la C^{13}_{10} di S_5 può incontrare queste stesse rette in *quattro* (anzichè in *tre*) punti.

---

(1) Anche queste curve (come quelle di genere $\pi - 1$ considerate nel § 6) sono tutte normali.

(2) Per il significato di queste varie lettere cfr. n° 13.

(3) Sono di questo tipo anche le curve di ordine $2r+1$ che stanno sul cono razionale normale di ordine $r-1$ e hanno nel suo vertice un punto triplo (v. C. SEGRE: *Recherches générales etc.*, I; " Math. Ann. ", XXX).

(4) Possiamo supporre che la g^1_5 non abbia punti fissi, perchè se no la C^{2r+3}_{r+5} si potrebbe ottenere come proiezione di una C^{2r+4}_{r+5} di S_{r+1} (che è di genere $\pi - 1$, e quindi da noi già studiata). Questo caso si presenta anche quando la C^{2r+3} sta sul cono normale di genere due.

b) Curve con un (solo) punto doppio: Per ciascuno dei valori $r = 5, 6, 7, 8, 9$, abbiamo una C^{2r+3}_{r+5} contenuta in una F^r razionale a sezioni ellittiche (di prima specie, per $r = 8$); e di più, per $r = 6$, una C^{15}_{11} che sta sulla rigata R^5 e ne incontra ogni generatrice in 4 punti (1).

c) Curve prive di punti doppi: In queste curve i gruppi della g^1_5 non sono mai collineari; possono però stare in piani per $r \leq 11$ (e in questo caso vi sono precisamente $11 - r$ gruppi con una terna di punti collineari). La nostra curva è allora contenuta in una superficie di ordine $r + 1$ comune a tutte le quadriche passanti per essa; e la stessa superficie sarà anche luogo delle coniche determinate dai singoli gruppi della g^1_5, delle quali $11 - r$ si spezzeranno (naturalmente) in coppie di rette (2). — Infine i singoli gruppi della serie g^1_5 possono appartenere a spazi S_3 (non però a S_4). Applicando a questo caso un ragionamento analogo a quello già tenuto in altra occasione (v. n° 16), si trova che queste curve stanno allora (in generale) in una superficie contenente una ∞^1 razionale di quartiche ellittiche, e di ordine non superiore a $\frac{12(r-1)}{5}$.

24. Sia ora $i = 4$; $r > 5$. Avremo curve del tipo C^{2r+4}_{r+7}; e queste contengono una g^2_8, che possiamo anche supporre priva di punti fissi.

a) Questa serie g^2_8 *può essere composta:*

α) *Con una serie* ∞^1 *di coppie di punti di genere* $k \leq 3$. Questo è possibile solo per $k = 3$; e si ha così una curva di ordine $2r + 4$ (priva di punti doppi) che è l'intersezione generale di un cono normale di ordine $r + 2$ e genere 3 con una quadrica (non passante pel suo vertice);

β) *Con una serie lineare* g^1_4. I gruppi di questa possono essere collineari nei tre casi di $r = 6, 7, 8$; e troviamo così delle curve contenute rispett. nelle rigate razionali normali R^5, R^6, R^7. In ogni altro caso i gruppi della g^1_4 dovranno appartenere ad altrettanti piani; e la curva C^{2r+4}_{r+7} starà su di una superficie razionale normale di ordine (in generale) $\frac{3r-2}{2}$ o $\frac{3r-3}{2}$, a sezioni iperellittiche di genere $\frac{r}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$; e si potrà segare su questa stessa superficie con una quadrica condotta per $\frac{r-6}{2}$ o $\frac{r-7}{2}$ sue coniche. L'ordine della superficie, il genere delle sue sezioni, e il numero di queste coniche possono però abbassarsi fino ai limiti rispettivi $r + 2$, 3, 0, e in quest'ultimo caso la superficie può anche essere un cono (iperellittico) — il che rientra nel caso α) —. Per $r \leq 11$ l'ordine della superficie può anche ridursi a $r + 1$, e può ridursi anche ad r per $r \leq 9$, e a *quattro* per $r = 5$; in questi casi però la superficie stessa risulta comune a tutte le quadriche passanti per la curva proposta.

---

(1) Quest'ultima curva — e così pure la C^{13}_{10} di S_5 di cui all'al. *a*) — contengono evidentemente una g^1_4 e quindi infinite g^1_5 con un punto fisso; ma contengono pure rispett. *due* ed *una* g^1_5 prive di punti così fatti.

(2) E questo va d'accordo perfettamente con un risultato già ottenuto dal Castelnuovo (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, n° 5).

b) Se la g_8^2 *non è composta (e non ha punti fissi) la* C_{r+7}^{2r+4} *sarà riferibile a una* C^8 *piana.* Questo esige naturalmente $r+7 \leq 21$, ossia $r \leq 14$; e si hanno così vari casi semplicissimi, che saranno poi enumerati, alla fine di questo §, nella relativa tabella.

25. Per $4 < i < r-1$, sappiamo già che la curva C_{r+2i-1}^{2r+i} deve stare su di una superficie (razionale) di ordine $r-1$, r, o $r+1$ e colle sezioni di genere rispett. 0, 1, 2, comune a tutte le quadriche che la contengono. Si potrebbe però ritrovare questo per altra via e fare nel tempo stesso un'enumerazione dei vari casi che queste curve possono presentare, partendo dalla considerazione della serie g_{3i-4}^{i-2} su di esse. Basterebbe perciò osservare che questa serie non può essere in alcun modo composta (e ciò per ragioni analoghe a quelle già esposte al n° 17 per la serie g_{3i-2}^{i-1}); ma può essere costituita da una g_{3i-6}^{i-2}, composta con una g_3^1, più due punti fissi, o anche da una g_{3i-5}^{i-2} non composta e alla quale si sia aggiunto un punto fisso. Esclusi questi due casi che dànno luogo a curve proiezioni di altre già studiate, la C_{r+2i-1}^{2r+i} dovrà sempre essere riferibile a una C^{3i-4} (semplice) di S_{i-2}. E questo per $i=5$ o $i=6$ richiede $r \leq 11$; per $i > 6$, $r \leq i+4$. — Lo studio ulteriore di queste curve non presenta del resto alcuna difficoltà, e perciò appunto ci limitiamo ad enumerarle alla fine di questo §.

26. Le curve di S_r di genere $\pi-2$ e di ordine $n \geq 3r-1$ stanno, come già si è detto, sopra almeno $\binom{r-1}{2}-1$ quadriche indipendenti, e quindi su di una superficie (normale) di ordine r o $r-1$ comune a tutte queste quadriche (almeno se $r > 3$). E questo varrà in particolare per le curve di ordine $=3r-1$. Del resto, se anche non lo sapessimo, basterebbe osservare che queste curve contengono tutte (come residua della g_{3r-1}^r segata dagli iperpiani) una g_{3r-5}^{r-2} che non può essere in alcun modo composta. Prescindendo perciò dal caso in cui questa serie abbia un punto fisso — e la nostra curva sia quindi proiezione di una C_{3r-2}^{3r} di S_{r+1} (di genere π) — è chiaro che la C_{3r-2}^{3r-1} dovrà sempre essere riferibile a una C^{3r-5} (semplice) di S_{r-2}. Questa curva (che è pure di genere $\pi-2$, e corrisponde precisamente al tipo C_{3k+4}^{3k+1} di S_k) sta sempre sulla rigata razionale normale (R^{r-3}) del suo spazio, — o anche, per $r=7$, sulla superficie di Veronese (1) —. Da questo e dalle note proprietà delle curve tracciate sulle rigate razionali normali (v. § 3) si può dedurre senza alcuna difficoltà che:

In ogni spazio S_r esiste una C_{3r-2}^{3r-1} che sta (per $r > 3$) sulla rigata R^{r-1}, e ne incontra ogni generatrice in *tre* o in *quattro* punti (o, in casi particolari, anche in *cinque*);

Nello spazio S_5 esiste anche una C_{13}^{14} (con *due* punti doppi) contenuta in una superficie di Veronese;

E infine, per tutti i valori di r inferiori a 9, si hanno ancora delle curve C_{3r-2}^{3r-1} giacenti sulle superficie razionali di ordine r a sezioni ellittiche (di 1ª specie per $r=8$).

(1) Questo, per ora, lo ammettiamo, riservandoci di dimostrarlo fra poco (v. nⁱ 28 e 29).

27. Veniamo ora alle curve del tipo C^{3r}_{3r+1}. Quelle fra esse che stanno sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti saranno pur contenute (se $r > 2$) in una rigata R^{r-1}, della quale potranno incontrare ogni generatrice in *tre* o in *quattro* punti (e nei casi di $r = 4$ e $r = 5$ anche in *cinque* punti). Per altri particolari rimandiamo al quadro posto alla fine del §. Sulla superficie di Veronese invece la C^{3r}_{3r+1} (C^{15}_{16} per $r = 5$) non può stare.

La stessa curva può stare però sul cono normale ellittico, incontrandone ogni generatrice in *tre* punti (distinti dal vertice). Una tal curva sarà sempre priva di punti doppi, e si potrà ottenere (e lo si vede facilmente) come intersezione di questo cono con una varietà cubica (M^3_{r-1}) non tangente ad esso in alcun punto e non passante pel suo vertice.

Infine, per $r \leq 9$, le curve C^{3r}_{3r+1} possono anche stare su di una superficie razionale normale a sezioni ellittiche (di prima e seconda specie per $r = 8$), e sono allora precisamente l'intersezione (generale) di questa stessa superficie con una varietà cubica (M^3_{r-1}) di S_r (cfr. anche la tabella in fine del §) (1).

---

(1) La serie lineare g^r_{3r} segata dagli iperpiani sopra una C^{3r}_{3r+1} di S_r ha per residua rispetto alla serie canonica $\left(g^{3r}_{6r}\right)$ un'altra g^r_{3r}, — che può in particolare coincidere con essa —. Si dice in tal caso che questa serie è *autoresidua*, e l'insieme di due suoi gruppi qualunque è allora sempre un gruppo della serie canonica. Questa particolarità si presenta certo per tutte le C^{3r}_{3r+1} che stanno sopra sole $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti, perchè su queste curve la g^{3r}_{6r} canonica si può appunto ritenere segata dal sistema di tutte le quadriche di S_r. Invece sulle C^{3r}_{3r+1} che stanno sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti esistono due g^r_{3r} distinte e residue l'una dell'altra (come si vede subito ricorrendo p. e. alle rappresentazioni piane che dalle curve stesse si possono ottenere con successive proiezioni); e la g^{3r-1}_{6r} segata dalle quadriche è quindi una serie non speciale (completa). — Il signor Castelnuovo, nella Nota (II): *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* (" Rendiconti Ist. Lombardo ", serie II, vol. XXIV) ha determinato *quali sono le curve di genere* $3r$ *che contengono una* g^r_{3r-1} *autoresidua*. Questo corrispondeva al caso limite inferiore, dovendo l'ordine n di ogni g^r_n autoresidua essere $\geq 3r - 1$ (e quindi il genere ($= n + 1$) della curva $\geq 3r$). Noi possiamo ora fare la determinazione analoga per il caso successivo ($n = 3r$); e, tenuto conto altresì del fatto che una g^r_{3r} autoresidua non può essere in alcun modo composta (non con una g^1_3 lineare, se no la curva starebbe sulla rigata R^{r-1}; non con una serie di coppie di punti, perchè la formola del Segre condurrebbe a un risultato assurdo) e non può nemmeno avere punti fissi, concluderemo:

Qualsiasi curva di genere $3r + 1$ *che contenga una* g^r_{3r} *autoresidua è riferibile:*

Per $r = 2$: *A una sestica piana con tre punti doppi posti in linea retta* (poichè due rette qualunque del piano devono poter far parte, insieme, di una cubica aggiunta a questa sestica, è chiaro che non sono qui possibili altri casi);

Per $r > 2$: *All'intersezione generale di una superficie normale di ordine* r *a sezioni ellittiche con una varietà cubica di dimensione* r — 1. E questa superficie sappiamo pure che è certo un cono se $r > 9$; e solo per $r \leq 9$ può essere non rigata e razionale.

In particolare quindi: *Ogni* g^r_{3r} *autoresidua in cui sia* $r > 9$ *deve contenere una* g^{r-1}_{3r} *composta con una serie* ∞^1 *ellittica di terne di punti*, e perciò ogni curva contenente una tal g^r_{3r} deve potersi rappresentare con una curva ellittica C^r di S_{r-1} *tripla* (da contarsi cioè tre volte). Il fatto che quest'ultima curva ammette r^2 spazi S_{r-2} iperosculatori si traduce p. e. in quest'altro: *Nella serie* g^{r-1}_{3r} *vi sono* r^2 *gruppi costituiti rispett. da altrettanti gruppi della* g^1_3 *ellittica contati ciascuno* r *volte.*

28. Dimostreremo ora che le curve di genere $\pi - 2$ appartenenti a S_r, quando l'ordine loro n è superiore a $3r$ stanno sempre sulla rigata R^{r-1} o sulla superficie di Veronese.

Queste curve, per $n > 3r$, non possono stare infatti sul cono ellittico; già la curva di ordine $3r + 1$ (passante semplicemente pel vertice di tale cono) è di genere soltanto $\pi - 3$, e le successive sarebbero di genere ancora inferiore a $\pi - 3$. Rimane dunque solo da verificare se, per $r \leq 9$, queste stesse curve possano stare sulle superficie razionali normali di ordine r.

E si vede facilmente di no. Infatti, indicando con m l'ordine della curva piana cui verrebbe riferita la C^n nella solita rappresentazione della superficie, e supposto che questa γ^m abbia negli $i = 9 - r$ punti fondamentali (escludiamo la F^8 di seconda specie) rispett. le multiplicità $v_1, v_2, \ldots, v_i$, sarà $n = 3m - \Sigma v$; e perciò, se vogliamo che il genere p della curva C^n sia precisamente uguale a $\pi - k$, dovrà essere

$$p \geq \frac{(3m - \Sigma v - r)\ (3m - \Sigma v - 1)}{2(r-1)} - k \text{ (1)}.$$

Ma d'altra parte abbiamo pure

$$p \leq \frac{(m-1)\ (m-2)}{2} - \Sigma \binom{v}{2}.$$

Quindi, *a fortiori:*

$$\frac{(3m - \Sigma v - r)\ (3m - \Sigma v - 1)}{2(r-1)} - k \leq \binom{m-1}{2} - \Sigma \binom{v}{2}.$$

Risolvendo ora questa disuguaglianza rispetto a m, e determinando (il che non offre difficoltà) il limite superiore del secondo membro, si trova alla fine

$$m \leq 3 + 4\sqrt{k+1}.$$

Ossia: *Se sopra una superficie razionale normale a sezioni ellittiche (esclusa la* F^8 *di 2ª specie) si ha una curva di genere* $\pi - k$, *l'ordine* m *della sua rappresentante piana nella solita rappresentazione della superficie non può superare il limite* $3 + 4\sqrt{k+1}$.

In particolare, *le curve di genere* $\pi - 2$ *devono avere rappresentanti piane di ordine non superiore a* 9 (2).

Ciò posto, ne segue senz'altro la verità del nostro asserto, perchè già le curve C^{3r+1}_{3r+4} (ad es. la C^{25}_{28} di S_8) — e *a fortiori* le successive — dovrebbero avere le rappresentanti piane di ordine ≥ 10.

(1) La frazione che compare al secondo membro è infatti il valor *minimo* che può avere il genere π corrispondente all'ordine $n = 3m - \Sigma v$ (e questo valore lo si ha appunto quando $\frac{n-r}{r-1}$ è intero e quindi $= \chi$).

(2) Per le curve di genere $\pi - 1$ si avrebbe $m \leq 8$; e questo è confermato dai risultati ottenuti nel § 6.

Un ragionamento affatto analogo si potrebbe applicare alla F^8 di 2ª specie; ma per brevità lo omettiamo.

29. Possiamo però anche giungere allo stesso risultato per altra via, mediante considerazioni sopra serie lineari. Supponiamo infatti che per una curva $C^{3r+i}_{3(r+i)+1}$ (e sono di questo tipo appunto — per $0 < i < r - 2$ — quelle che ora dobbiamo considerare) (1) passino soltanto $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti. Il sistema di tutte le quadriche di S_r segherà allora sopra questa curva una g^{3r}_{6r+2i}; e siccome la serie canonica è in questo caso una $g^{3(r+i)}_{6(r+i)}$, è chiaro che la stessa curva dovrà anche contenere, come residua di quella prima serie, una g^i_{4i}. Faremo vedere che una tal serie essa non può contenerla, a meno di non stare sulla rigata R^{r-1}, — il che sarebbe contrario alle nostre ipotesi —.

La curva proposta non potrà infatti riferirsi a una C^{4i} di S_i, perchè quest'ultima avrebbe per genere massimo 21 se $i = 2$, 25 se $i = 3$, e $6(i+1)$ se $i \geq 4$; dovrebbero dunque verificarsi in questi casi rispett. le relazioni

$$\begin{array}{rll} 3r + 7 \leq 21 & \text{ossia} \quad r \leq 4\,, & \text{se } i = 2\,; \\ 3r + 10 \leq 25 & \quad \text{»} \qquad r \leq 5\,, & \text{se } i = 3\,; \\ 3r + 3i + 1 \leq 6i + 6 & \quad \text{»} \qquad r \leq i + 1, & \text{se } i \geq 4\,; \end{array}$$

le quali sono invece tutte incompatibili coll'ipotesi fatta $i < r - 2$ ossia $r > i + 2$.

La g^i_{4i} non può nemmeno essere composta mediante una serie ∞^1 di coppie di punti (di genere $\leq i + 1$), nè mediante una serie di terne di punti (se i è multiplo di tre), nè infine con una g^1_4 (lineare) i cui gruppi appartengano ad altrettanti piani, perchè sempre l'applicazione della formola del sig. Segre condurrebbe ad un risultato assurdo (si troverebbe cioè che la nostra curva, che abbiamo supposta appartenere ad S_r, dovrebbe stare sopra una rigata di ordine $< r - 1$, o su di una M_3 di ordine $< r - 2$). Nè la g^i_{4i} può avere qualche punto fisso, perchè, se ne avesse ad es. un certo numero k, astraendo da questi, rimarrebbe una g^i_{4i-k}, che dovrebbe essere rappresentabile mediante una C^{4i-k} di S_i, oppure composta mediante una serie ∞^1 di coppie o terne di punti; ipotesi tutte che conducono agli stessi risultati assurdi di prima.

Rimane dunque la sola ipotesi che la g^i_{4i} sia composta mediante una g^1_4 coi gruppi collineari. Ma allora le rette contenenti questi singoli gruppi dovrebbero formare una rigata razionale normale (di ordine $r - 1$), e perciò la curva dovrebbe stare sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti, mentre abbiamo supposto che stesse sopra sole $\binom{r-1}{2} - 1$. È dunque in ogni caso assurda quest'ultima ipotesi; e possiamo perciò asserire che:

Ogni curva appartenente a S_r $(r > 2)$ *la quale sia di genere* $\pi - 2$ *e di ordine* $n > 3r$ *sta su di una superficie razionale normale di ordine* $r - 1$ (comune a tutte le quadriche che la contengono).

---

(1) Se fosse $i \geq r - 2$, l'ordine della nostra curva risulterebbe $\geq 4r - 2$, e in questo caso sappiamo già che la proposizione che qui vogliamo dimostrare è vera.

30. I risultati ottenuti sulle curve (di S_r) di genere $\pi - 2$ e di ordine $\geq 2r + 1$ ma $\leq 3r$, su quelle curve cioè di genere $\pi - 2$ e ordine $> 2r$ che non stanno *necessariamente* su di una F^{r-1}, possono riassumersi così:

a) Curve del tipo C^{2r+i}_{r+2i-1} $(0 < i < r-1)$:

Per ogni valore di r *e di* i *esiste:*

Una C^{2r+i}_{r+2i-1} con *due* punti doppi, che sta sulla rigata R^{r-1} e ne incontra ogni generatrice in *tre* punti;

Per ogni valore di r *abbiamo ancora:*

Una C^{2r+1}_{r+1} (non speciale) che può presentare diversi casi, e può anche in particolare esser contenuta in un cono ellittico di ordine r. In questo caso avrebbe un punto doppio (non però nel vertice del cono);

Una C^{2r+2}_{r+3}, che è sempre proiezione di una C^{2r+4} canonica di S_{r+2}, e può anche stare sul cono ellittico di ordine r (pel cui vertice deve allora passare doppiamente);

Una C^{2r+3}_{r+5} priva di punti doppi e contenente una g^1_5. Questa curva può essere contenuta in un cono normale di genere *due;*

Una C^{2r+4}_{r+7} anche priva di punti doppi e contenente una g^1_4. Quest'ultima curva sta su di una superficie razionale normale a sezioni iperellittiche di genere $\leq \frac{r}{2}$; superficie che può anche essere sostituita da un cono normale iperellittico di genere *tre* (e ordine $r+1$);

Una C^{3r-4}_{3r-9} priva di punti doppi
Una C^{3r-3}_{3r-7} con *un* punto doppio
Una C^{3r-2}_{3r-5} con *due* punti doppi
} e contenuta in una rigata R^{r-1} di cui incontra ogni generatrice in *quattro* punti.

La prima di queste curve è riferibile (in generale) a una C^r piana con punto $(r-4)^{\text{plo}}$ se r è pari, e a una C^{r+1} con punto $(r-3)^{\text{plo}}$ e un punto triplo se r è dispari; la seconda pure a una C^{r+1} con punto $(r-3)^{\text{plo}}$ e un punto doppio; la terza a una C^{r+2} con punto $(r-2)^{\text{plo}}$ e due punti doppi.

Infine *per* r $\leq$ 11 *si hanno ancora le curve seguenti:*

	Indicazione delle curve	Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili
Nello spazio S_5	C^{13}_{10}	—	Superficie F^5 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3\,B_1^2\,B_2^2)$
	C^{13}_{10}	1	„ „ „ „	„ „ $(A_1^2\,A_2^2\,A_3^2\,A_4^2\,A_5^2)$
	C^{13}_{10}	—	„ F^6 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 \ldots B_6^2)$ (1)
Nello spazio S_6	C^{15}_{11}	—	Superficie F^6 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3\,B^2)$
	C^{15}_{11}	1	„ „ „ „	„ „ $(A_1^2\,A_2^2\,A_3^2\,A_4^2)$
	C^{15}_{11}	—	„ F^7 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2 B_5^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^6 „ ellittiche	C^7 „ $(A_1^2\,A_2^2)$
	C^{16}_{13}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A_1^3\,A_2^3\,B_1^2\,B_2^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^7 „ di genere *due*	„ „ $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2 B_5^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^8 „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2\,A_2^2 \ldots A_8^2)$
Nello spazio S_7	C^{17}_{12}	—	Superficie F^7 a sezioni ellittiche	C^7 piana (A^3)
	C^{17}_{12}	—	„ „ „ „	C^8 „ $(A^4\,B^3)$
	C^{17}_{12}	1	„ „ „ „	C^7 „ $(A_1^2\,A_2^2\,A_3^2)$
	C^{17}_{12}	—	„ F^8 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5\,A_2^5\,B_1^2\,B_2^2\,B_3^2\,B_4^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^7 „ ellittiche	C^7 „ (A^2)
	C^{18}_{14}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A_1^3\,A_2^3\,B^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^8 „ di genere *due*	„ „ $(A^3\,B_1^2\,B_2^2\,B_3^2\,B_4^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^9 „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2\,A_2^2 \ldots A_7^2)$
	C^{19}_{16}	—	„ F^7 „ ellittiche	C^9 „ $(A_1^4\,A_2^4)$
	C^{19}_{16}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A^3\,B_1^2\,B_2^2)$
	C^{19}_{16}	—	„ F^8 „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4\,B^3\,C_1^2\,C_2^2\,C_3^2)$
Nello spazio S_8	C^{19}_{13}	1	Superficie F^8 a sez. ell. di 1ª specie	C^7 piana $(A_1^2\,A_2^2)$
	C^{19}_{13}	—	„ F^9 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5\,A_2^5\,B_1^2\,B_2^2\,B_3^2)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	C^7 „ generale
	C^{20}_{15}	1	„ F^8 „ „ 2ª „	C^8 „ $(A_1^3\,A_2^3)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^9 „ di genere *due*	„ „ $(A^3\,B_1^2\,B_2^2\,B_3^2)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^{10} „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2\,A_2^2 \ldots A_6^2)$
	C^{21}_{17}	1	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	„ „ $(A^3\,B^2)$
	C^{21}_{17}	—	„ F^9 „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4\,B^3\,C_1^2\cdot C_2^2)$
	C^{22}_{19}	1	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	C^8 „ $(A_1^2\,A_2^2)$
	C^{22}_{19}	1	„ „ „ „ 2ª „	C^9 „ $(A^4\,B^3)$
	C^{22}_{19}	—	„ F^9 „ di genere *due*	„ „ $(A^4\,B_1^2\,B_2^2\,B_3^2)$

(1) Si noti (per questa curva, e per le analoghe che si troveranno più avanti) che i due punti quintupli potrebbero essere (in particolare) infinitamente vicini. Se non lo sono, l'ordine di questa rappresentante piana si può abbassare (per $r \leq 10$) con una trasformazione Cremoniana (e la superficie F^{r+1} (qui F^6) si potrà certo rappresentare con un sistema di quartiche piane).

	Indicazione delle curve	Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili
Nello spazio S_9	C^{21}_{14}	1	Superficie F^9 a sezioni ellittiche	C^7 piana (A^2)
	C^{21}_{14}	—	„ F^{10} „ di genere *due*	C^{10} „ $(A^5_1\, A^5_2\, B^2_1\, B^2_2)$
	C^{22}_{16}	—	„ „ „ „ „	C^8 „ $(A^3\, B^2_1\, B^2_2)$
	C^{22}_{16}	—	„ F^{11} „ „ *tre*	„ „ $(A^2_1 \ldots A^2_5)$
	C^{23}_{18}	—	„ F^{10} „ „ *due*	C^9 „ $(A^4\, B^3\, C^2)$
	C^{24}_{20}	1	„ F^9 „ ellittiche	C^8 „ (A^2)
	C^{24}_{20}	—	„ F^{10} „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4\, B^2_1\, B^2_2)$
	C^{25}_{22}	—	„ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^3\, C^2)$
Nello spazio S_{10}	C^{23}_{15}	—	Superficie F^{11} a sezioni di gen. *due*	C^{10} piana $(A^5_1\, A^5_2\, B^2)$
	C^{24}_{17}	—	„ „ „ „ „	C^8 „ $(A^3\, B^2)$
	C^{24}_{17}	—	„ F^{12} „ „ *tre*	„ „ $(A^2_1\, A^2_2\, A^2_3\, A^2_4)$
	C^{25}_{19}	—	„ F^{11} „ „ *due*	C^9 „ $(A^4\, B^3)$
	C^{26}_{21}	—	„ „ „ „ „	„ „ $(A^4\, B^2)$
	C^{27}_{23}	—	„ „ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^3)$
	C^{28}_{25}	—	„ „ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^2)$
Nello spazio S_{11}	C^{23}_{16}	—	Superficie F^{12} a sez. di gen. *due* di 1ª o 2ª specie (1)	C^{10} „ $(A^5_1\, A^5_2)$
	C^{26}_{18}	—	„ „ „ „ 2ª „	C^8 „ (A^3)
	C^{26}_{18}	—	„ F^{13} „ gen. *tre*	„ „ $(A^2_1\, A^2_2\, A^2_3)$
	C^{27}_{20}	—	„ F^{12} „ „ *due* 1ª specie	C^{10} „ $(A^5\, B^4)$
	C^{28}_{22}	—	„ „ „ „ „ 2ª „	C^9 „ (A^4)
	C^{29}_{24}	—	„ „ „ „ „ 1ª „	C^{11} „ $(A^6\, B^4)$
	C^{30}_{26}	—	„ „ „ „ „ 2ª „	C^{10} „ (A^5)
	C^{31}_{28}	—	„ „ „ „ „ 1ª „	C^{12} „ $(A^7\, B^4)$

e negli spazi S_{12}, S_{13} e S_{14} esistono ancora rispett. una C^{28}_{19}, una C^{30}_{20} e una C^{32}_{21} contenute in superficie razionali normali (di ordini 14, 15, 16) a sezioni di genere tre (di *prima* specie) (2) e riferibili a una C^8 piana con 2, 1 e 0 punti doppi.

---

(1) Per la distinzione delle superficie a sezioni di genere due (e, più generalmente, a sezioni iperellittiche) in *specie*, cfr. il lav. cit. del CASTELNUOVO (" Rend. di Palermo „, IV). La nostra superficie F^{12} si dirà di *prima specie* se non ammette direttrici di ordine < 3 (ma di direttrici cubiche ne ammetterà allora un fascio); e di *seconda specie* se ammette una direttrice conica o rettilinea, o se le sue ∞^1 coniche passano tutte per uno stesso punto (che sarà triplo per essa). In questo primo caso la F^{12} può essere tanto di prima quanto di seconda specie (con direttrice rettilinea); in seguito, dove è detto di *seconda specie*, deve intendersi *con direttrice conica*.

(2) Cfr. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre* (" Atti di Torino „, XXV).

b) Curve di ordine 3r — 1 *e genere* 3r — 2:

Queste curve, per ogni valore di r, possono stare sulla rigata R^{r-1}, incontrandone ogni generatrice in *quattro* punti. Hanno in tal caso *due* punti doppi, e sono riferibili a una C^{r+3} piana con un punto $(r-1)^{plo}$ e *due* punti doppi. Della rigata R^{r-1} esse possono però incontrare ogni generatrice anche in soli *tre* punti; hanno allora *un* punto doppio, e sono proiezioni di una C^{3r} di S_{r+1} — intersezione della rigata R^r di questo stesso spazio con una varietà cubica (M_r^3).

Abbiamo poi ancora:

1. Una C_{10}^{11} di S_4 contenuta in una rigata R^3 e incontrata dalle generatrici di questa in 5 punti. Non ha punti doppi ed è riferibile a una sestica piana generale;
2. Una C_{13}^{14} di S_5 con *due* punti doppi e contenuta in una F^4 di Veronese. È riferibile a una C^7 piana con *due* punti doppi;
3. Infine, per $r \leq 8$, una C_{3r-2}^{3r-1} contenuta in una F^r a sezioni ellittiche (di prima specie per $r=8$) e riferibile a una C^9 piana con punto quadruplo e $8-r$ punti tripli (1).

c) Curve di ordine 3r *e genere* 3r + 1:

Queste curve, *per ogni valore di* r, possono essere contenute:

1. In una rigata R^{r-1}, della quale incontrino ogni generatrice in *quattro* punti. Hanno allora *due* punti doppi e sono riferibili a una C^{r+4} piana con un punto r^{plo} e *due* punti doppi (2). Della stessa rigata R^{r-1} esse possono anche incontrare le varie generatrici in soli *tre* punti; non hanno allora punti doppi, e si possono ottenere (per $r \geq 6$) come intersezioni di questa rigata con una varietà di quarto ordine (M_{r-1}^4) passante per una sua direttrice di ordine $r-4$;
2. In un cono (normale) ellittico di ordine r; e sono allora l'intersezione di questo cono con una M_{r-1}^3 non passante pel suo vertice.

Per $r \leq 9$ le stesse curve possono anche essere intersezioni di una F^r a sezioni ellittiche con una M_{r-1}^3. Questa proprietà ne dà anche immediatamente le rappresentazioni piane (per questo caso).

E infine per $r=4$ e $r=5$ le curve C_{13}^{12} e C_{16}^{15} contenute rispett. in una rigata R^3 o R^4 possono anche incontrare ogni generatrice di questa stessa rigata in 5 punti. La C_{13}^{12} di S^4 ha allora *un* (solo) punto doppio, e la C_{16}^{15} di S_5 non ne ha alcuno (3) (4).

---

(1) Nel caso di $r=7$ questa rappresentazione non è però sempre possibile; quando non lo sia, la curva C_{19}^{20} si potrà invece riferire a una C^8 piana con *due* punti doppi. E anche per $r<7$ potrebbe la C_{3r-2}^{3r-1} riferirsi a una C^8 piana con $7-r$ punti tripli e due punti doppi; ma questa rappresentazione non differirebbe allora sostanzialmente dalla precedente.

(2) Per $r=3$ si avrebbe una C_{10}^9 contenuta in una quadrica, e che dalle generatrici di uno dei due sistemi di questa sarebbe incontrata effettivamente in *quattro* punti. Da quelle dell'altro sistema essa sarebbe però incontrata in *cinque* punti.

(3) Questa C_{16}^{15} di S_5 è riferibile alla curva di 10° ordine intersezione generale di una quadrica del nostro spazio con una superficie di quinto ordine (e anzi da una generatrice qualunque della rigata R^4 che la contiene essa si proietta precisamente in una curva così fatta).

(4) I risultati ottenuti in questo § risolvono completamente, nel loro insieme, la questione

Applicazione dei risultati precedenti alle rigate e congruenze di rette.

31. I risultati ottenuti in questo lavoro si riferiscono, in gran parte almeno, a curve e a superficie per le quali passa un sistema lineare di quadriche (in generale non tutte degeneri) di nota dimensione; le proprietà da noi stabilite potranno dunque tradursi facilmente in risultati di *Geometria della retta* (1). Rappresentandoci infatti — nel caso di $r = 5$ — una qualsiasi Q (purchè non degenere) fra quelle quadriche coll'insieme delle rette dello spazio S_3, è chiaro che ogni altra quadrica del sistema considerato determinerà nella prima una sezione rappresentata a sua volta da un *complesso quadratico;* e alla nostra curva o superficie corrisponderà (nella quadrica delle rette) una rigata o una congruenza di rette comune a tutti questi complessi (2).

---

della *determinazione di tutte le curve di genere* $\pi - 2$ (*e di ordine* $> 2r$) *dei vari spazi* (almeno per $r \geq 3$); — e l'analoga determinazione per le curve di genere $\pi - 1$ era a sua volta contenuta nei risultati che abbiamo esposti nel § 6. — Si potrebbe ora domandare di estendere queste ricerche alle curve di genere $\pi - 3$, o (più generalmente) di genere $\pi - k$ (almeno per k non superiore a un qualche limite). Premesso che non è mia intenzione di occuparmi per ora di questo argomento, voglio però aggiungere che l'unica difficoltà forse che così facendo si incontrerebbe sarebbe quella di dare per i sistemi lineari di quadriche di dimensione $\leq \binom{r-1}{2} - 4$ (in S_r) un teorema analogo a quelli che ai n$^{\text{i}}$ 11 e 20 si sono dati rispett. per i sistemi di dimensione $\binom{r-1}{2} - 2$ e $\binom{r-1}{2} - 3$. Questo teorema dovrebbe scaturire probabilmente da quello (più generale) del § 4; ma dalle considerazioni di cui abbiamo dovuto valerci in sul principio dei §§ 5 e 7 non appare ancora (è un fatto) nessun concetto che si possa generalizzare e applicare ai casi successivi. Molte ragioni mi indurrebbero a credere che quel massimo valore di n a cui ho accennato nel § 4 (n° 8) sia eguale precisamente a $2(r - 1 + i)$ — almeno per $i \leq r - 3$ —, e questo è ormai assodato per i casi di $i = 1, 2, 3$; per i casi successivi, è una questione che merita di essere studiata.

Quello stesso teorema non sarebbe però applicabile alle curve di genere $\pi - k$ che quando l'ordine loro fosse $> 2(r + k)$. Per le curve di ordine $\leq 2(r + k)$ si potrebbero fare delle ricerche analoghe a quelle accennate nei casi di $k = 1$ (n$^{\text{i}}$ 15 e 16) e $k = 2$ (n$^{\text{i}}$ 23-25), partendo cioè dalla considerazione di qualche serie lineare sopra le curve stesse. È notevole forse in particolar modo la curva $C^{2(r+k)}_{r+3k+1}$ (che è appunto di genere $\pi - k$ per $2k < r - 1$, ossia $k \leq \frac{r-2}{2}$). Essa contiene una g^k_{4k}, che può essere composta con una serie ∞^1 di coppie di punti di genere $k + 1$, o con una g^1_4 lineare (o anche con una serie ∞^1 di terne di punti, di genere $\leq \frac{k}{3}$, se k è multiplo di 3), e può anche non essere in alcun modo composta, se $r \leq 3k + 5$ ($k \geq 2$). In ciascuno di questi casi si può determinare facilmente in che superficie la curva deve essere contenuta.

(1) Cfr. ad es. la Mem. del sig. Klein già cit. nella prefazione. Alcuni fra i concetti contenuti in questa Memoria furono già applicati da me in un lavoro precedente (" Ann. di Mat. ", ser. II, t. XXI) allo *Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni*.

(2) La rigata avrà anzi lo stesso ordine e lo stesso genere della curva che rappresenta. Quanto poi alla congruenza, il suo ordine m e la sua classe n saranno dati rispett. dal numero dei punti in cui la superficie corrispondente è incontrata dai piani dei due sistemi della quadrica Q (sarà quindi $m + n$ l'ordine della stessa superficie); e il suo rango sarà dato dalla differenza $(m - 1)(n - 1) - (p + d)$, dove p è il genere delle sezioni di quella superficie e d l'ordine della sua linea doppia (se una tal linea esiste; se no, si dovrà ritenere $d = 0$).

Noi potremo quindi ricavare dai teoremi già ottenuti proprietà delle rigate e delle congruenze di rette per cui passa un dato numero (un sistema lineare cioè di data dimensione) di complessi quadratici; e precisamente le proprietà relative ad enti contenuti (per $r=5$) in ∞^k quadriche si applicheranno alle rigate e congruenze contenute a lor volta in ∞^{k-1} complessi quadratici.

Cogliamo l'occasione per dare l' analoga interpretazione anche dei risultati già ottenuti dal sig. CASTELNUOVO e qui ricordati al n° 1.

32. *Il genere massimo di una rigata algebrica di ordine* n *e non contenuta in un complesso lineare* (1) *è dato dal prodotto* $\chi \{ n - 2\chi - 3 \}$ *dove* χ *è il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-5}{4}$ (2).

Per una rigata algebrica di genere massimo (di genere cioè precisamente $= \chi \{ n - 2\chi - 3 \}$*) passano sempre almeno* ∞^4 *complessi quadratici di rette*, e ne passano precisamente tanti (e non di più) quando l'ordine di questa rigata non è inferiore a 10.

Ogni rigata algebrica di ordine superiore a 10 *e per cui passino* ∞^4 *complessi quadratici (in particolare quindi ogni rigata di genere massimo e di ordine sempre* > 10) *è contenuta in una congruenza di rette comune a tutti questi complessi* (3). Una tale congruenza può presentare due casi distinti:

a) Congruenza (2, 2) costituita da una serie ∞^1 di fasci di raggi coi centri su di una conica e i piani tutti tangenti a un medesimo cono quadrico (4). Questa

---

(1) È in questa restrizione appunto che si traduce quella che imporrebbe alla curva C^n di *appartenere* allo spazio S_5; essa è perciò indispensabile. Se la rigata stessa in *un* (solo) complesso lineare, il suo genere massimo sarebbe $\frac{\chi'}{2}(2n - 3\chi' - 5)$; e se stesse in infiniti (∞^1) complessi e quindi in *una* congruenza lineare, $\chi''(n - \chi'' - 2)$; — essendo χ' e χ'' i minimi interi non inferiori rispett. a $\frac{n-4}{3}$ e $\frac{n-3}{2}$ —.

(2) Da questo risultato e da quelli contenuti nella nota precedente segue ancora che, nello spazio ordinario, una rigata di ordine n e di genere superiore a $\frac{(n-3)^2}{8}$ sta sempre in un complesso lineare, e anzi in una congruenza lineare se il suo genere è superiore anche a $\frac{(n-2)(n-3)}{6}$. Infine, *una rigata di ordine* n *e di genere* $> \frac{(n-2)^2}{4}$ *è necessariamente un cono (o un inviluppo piano).* Di quest'ultima proposizione è fatto cenno anche in una Nota del sig. KÜPPER (" Math. Ann. ", XXXI); ma le considerazioni che hanno condotto l'A. a questo risultato sono affatto estranee alla geometria della retta; tant'è vero che per dedurre questo stesso risultato dalla proprietà corrispondente delle curve di ordine n egli ha ricorso ancora a un ragionamento semplice sì, ma affatto inutile, visto che non si trattava d'altro che di applicare a un caso (e precisamente *a uno spazio*) particolare un risultato generale già ottenuto.

(3) Per la rigata di genere massimo e di ordine $= 10$ (quindi di genere 6) il teorema non sarebbe più vero. Questa rigata può invece ottenersi in generale come intersezione di un complesso quadratico e di una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere *uno* (cfr. il mio lavoro cit., n° 6). Infatti la curva canonica generale di genere 6 (C_6^{10} di S_5) — che è riferibile a una sestica piana con quattro punti doppi — è contenuta in una superficie F^5 razionale a sezioni ellittiche, ed è precisamente intersezione di questa superficie con una quadrica non passante per essa.

(4) Quella conica non deve però passare pel vertice di questo cono —. L'insieme di tutte le tangenti a questo stesso cono che si appoggiano a quella curva si spezza precisamente in due congruenze (2, 2) così fatte; cfr. ad es. KUMMER: *Ueber die alg. Strahlensysteme ecc.* (" Abhand. der Berl. Ak. ", 1866) e STURM: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie ecc.*; vol. II (Leipzig, 1892).

congruenza corrisponde alla rigata razionale normale del quarto ordine di S_5, del *primo* o del *secondo gruppo* (con una direttrice rettilinea cioè, oppure con una semplice infinità di coniche direttrici) secondo che il vertice di quel cono cade nel piano stesso della conica, oppure è esterno ad esso. In quest' ultimo caso la congruenza contiene una serie razionale ∞^1 (di indici $\{2, 2\}$) di rigate quadriche, passanti tutte per quella conica e tutte tangenti ai singoli piani di quell'inviluppo (ossia di quel cono) quadrico. L'una e l'altra di queste congruenze corrisponde per dualità a sè stessa;

b) Congruenza (1, 3) delle corde di una cubica sghemba, — oppure il sistema reciproco di questo, una congruenza cioè (3, 1) le cui rette siano le intersezioni a due a due dei piani osculatori a una tal cubica (siano quindi, in altri termini, le congiungenti delle coppie di punti omologhi di due piani collineari in posizione generale) —. Questi due sistemi (reciproci) sono ben distinti fra loro, ma corrispondono entrambi alla superficie di Veronese (1). L'uno e l'altro di essi contiene una serie ∞^2 di rigate quadriche (corrispondenti alle ∞^2 coniche della F_2^4 di Veronese); e il sistema di queste quadriche (considerate rispett. nei due casi come luoghi e come inviluppi) è anzi *lineare* (2) (3).

---

(1) Cfr. C. Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ecc.* („ Atti della R. Acc. di Torino „, XX).

(2) Le rigate contenute in una congruenza di questo secondo tipo conterranno dunque a lor volta una cubica sghemba, incontrata da ogni loro generatrice in *due* punti, oppure saranno tali che per ciascuna di queste generatrici si possano condurre due piani osculatori a una determinata cubica. Possiamo anche dire che una qualsiasi di queste due proprietà dovrà sempre verificarsi per la rigata proposta o per una qualunque sua trasformata reciproca. *Questo caso non può presentarsi però che per rigate di ordine pari;* la metà di quest' ordine darebbe precisamente la multiplicità (per la rigata) della cubica dianzi considerata.

Invece le rigate contenute in congruenze del tipo *a*) avranno tutte indistintamente una conica direttrice; e anzi, se la rigata è di genere massimo, il numero χ (che sappiamo essere $\geq \frac{n-5}{4}$, ma $< \frac{n-1}{4}$) aumentato di un'unità ci darà, in generale, la multiplicità di questa stessa direttrice. Se però l'ordine della rigata fosse del tipo $4m+1$ (m essendo intero) la stessa multiplicità potrebbe anche essere uguale a $m+1$ (ossia a $\chi+2$).

(3) Per una rigata contenuta in *un* complesso lineare si può dire che, se è di ordine $n > 8$ e di genere massimo $\left(\text{quindi } = \frac{(n-4)(n-1)}{6} \text{ o } \frac{(n-3)(n-2)}{6}\right)$, dovrà stare in una congruenza (1, 2) o (2, 1) — costituita nel primo caso dalle rette che si appoggiano a una retta data e a una conica pure data e avente con quella retta un punto comune, nel secondo caso dalle tangenti a un cono quadrico che si appoggiano a una data tangente di questo stesso cono (quel complesso lineare sarà quindi in ogni caso *speciale*, e le rigate in discorso avranno sempre una direttrice rettilinea dotata di una certa multiplicità) —. Infine una rigata contenuta in una congruenza lineare e di genere massimo (quindi, se di ordine n, di genere $\frac{(n-2)^2}{4}$ o $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$, secondo che n è pari o dispari) avrà due direttrici rettilinee (in generale distinte) e multiple entrambe secondo $\frac{n}{2}$ se n è pari, secondo $\frac{n-1}{2}$ l'una e secondo $\frac{n+1}{2}$ l'altra se n è dispari. Questa proprietà si trova già nella Nota cit. del sig. Küpper; ad essa possiamo aggiungere che quelle stesse rigate si potranno sempre ottenere come intersezioni della congruenza lineare che le contiene con un complesso di grado $\frac{n}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ (e in quest' ultimo caso vi sarà, naturalmente, un fascio di rette come intersezione residua).

33. *Una rigata algebrica per la quale passino non più di* $\infty^{4-\delta}$ (1) *complessi quadratici non può essere di genere superiore a*

$$\chi_\delta \{ n - 2\chi_\delta - 3 \} - \{ \chi_\delta - 1 \} \delta$$

dove χ_δ *è il minimo intero non inferiore* $\frac{n-5-\delta}{4}$.

Da questo si deduce che per una rigata di genere uguale al massimo corrispondente al suo ordine (π) diminuito di k unità (dunque di genere $\pi - k$) passano sempre (almeno) ∞^4 complessi quadratici quando il suo ordine n è superiore o eguale a $4k + 10$; almeno ∞^3 se $n \geq 2k + 10$ o $n \geq 2k + 9$ secondo che k è pari o dispari; almeno ∞^2 quando $n \geq 4\frac{k-l}{3} + l + 10$ dove l è il resto della divisione di k per 3; almeno ∞^1 quando $n \geq k + 10$.

In particolare, per una rigata di ordine n e genere $\pi - 1$ passano sempre almeno ∞^3 complessi quadratici; e ne passano certo ∞^4 per $n \geq 14$. Quando ne passino soltanto ∞^3, essi potranno avere a comune la sola rigata R^n finchè $n \leq 12$; per $n = 13$ avranno a comune tutta una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere *uno*, contenente la rigata in discorso (qui $R^{13}_{(11)}$) — che non avrà in questo caso generatrici doppie —. Però la rigata $R^{13}_{(11)}$ può anche stare in ∞^4 complessi quadratici; allora ha sempre una generatrice doppia, e una conica direttrice tripla o quadrupla.

Anche la rigata $R^{12}_{(9)}$ può esser contenuta in ∞^4 complessi quadratici, e avere una conica direttrice tripla o quadrupla; in quest'ultimo caso però non avrà generatrici doppie. Esiste anche una rigata $R^{12}_{(9)}$ con una cubica sestupla incontrata da ogni sua generatrice in due punti, e con una generatrice doppia. — Se questa stessa rigata è contenuta in soli ∞^3 complessi quadratici, potrà ancora stare in una congruenza (2, 3) o (3, 2) — sempre di genere uno — comune a questi complessi; se no, sarà intersezione di un complesso quadratico con una congruenza (3, 3) di genere *due* (congruenza di Roccella) (2). — Non avremo invece una rigata $R^{11}_{(7)}$ corrispondente alla curva C^{11}_7 di S_5 che sta sul cono normale ellittico (di quinto ordine) perchè le quadriche passanti per questa curva sono tutte degeneri.

34. Similmente, per una rigata di genere $\pi - 2$ passano sempre almeno ∞^2 complessi quadratici; e anzi almeno ∞^3 se l'ordine di essa è superiore a 13, e certo ∞^4 se è superiore a 15. La rigata di 15° ordine (e genere 16) contenuta in soli ∞^3 complessi quadratici è intersezione generale di una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere uno con un complesso cubico. — Gli altri casi che queste rigate possono presentare si deducono anche facilmente dal quadro che abbiamo dato alla fine del § 8, sicchè crediamo inutile insistervi sopra più a lungo.

---

(1) Questa proposizione vale per $0 \leq \delta \leq 4$; e anche, se vogliamo, per $\delta = 5$, intendendo però allora che per la rigata non passi più nessun complesso quadratico. L'ipotesi che qui vien fatta esclude implicitamente che la congruenza possa stare in un complesso lineare.

(2) V. Roccella: *Sugli enti geometrici dello spazio di rette ecc.* (Piazza Armerina, 1882). Cfr. anche il mio lavoro cit., n° 9.