GINO FANO

# Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni

*Annali Mat. Pura Appl.*, Serie II, Vol. **21** (1893), p. 141–192

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1893_1>

# Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni.

(*Di* Gino Fano, *a Torino.*)

## § 1. Considerazioni generali sui sistemi di rette e oggetto di questo lavoro.

**1.** È noto che di ogni risultato relativo ad enti contenuti in una quadrica non degenere dello spazio a cinque dimensioni si può avere un'applicazione, e spesso anche notevole e interessante, immaginando che l'elemento o *punto* di questa quadrica (la cui natura, nelle ricerche, si lascia di solito indeterminata) sia precisamente la *retta* dello spazio ordinario ($S_3$) (e quella quadrica sia perciò l'insieme di queste rette) (*).

L'idea di considerare la geometria della retta come quella appunto di una quadrica dello spazio $S_5$ conta ormai parecchi anni di esistenza, e si può dire col sig. Segre (**) ch'essa compare già « in tutti i principali lavori che « dalla *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker in poi si scrissero sulla geo- « metria della retta (e più particolarmente in quelli, molto importanti, del « Klein e del Voss) ». Non è qui il luogo di passare in rassegna tutti questi lavori, poichè la cosa, per quanto interessante, ci trarrebbe troppo in lungo; ci basti quindi ricordare la classica Memoria del sig. Klein: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (già cit. alla nota (*)) (***) e l'altra del

(*) « *Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des $R_5$* » (cfr. Klein: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie;* Math. Ann., Bd. 5, pag. 261).

(**) Cfr. la prefazione alla Dissertazione di Laurea: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie 2.ª, vol. 36).

(***) Del Voss si hanno pure molti lavori nei Math. Annalen.

sig. Segre: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, nella quale si può forse dire che l'idea di Plücker si trova per la prima volta posta *sistematicamente* ad effetto (*).

Una delle prime e più ovvie esplicazioni di questi fecondissimi concetti è ben naturale che la si abbia nello *studio dei sistemi di rette dello spazio ordinario considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni.* Considerata infatti la retta di $S_3$ come elemento di una quadrica (non degenere) dello spazio $S_5$, è chiaro che ogni sistema (o congruenza) di rette potrà (e dovrà anzi) concepirsi come una *superficie* contenuta in questa stessa quadrica; e le proprietà di questa superficie si tradurranno allora immediatamente in quelle della congruenza. Potrà la superficie essere contenuta in uno spazio $S_4$, e quindi in una quadrica ($M_3^2$) di quest'ultimo (che potrebbe anche essere un cono di prima specie); questo caso corrisponderà a quello di una congruenza contenuta in un complesso lineare (e precisamente in un complesso lineare speciale, se quella quadrica è un cono). In uno spazio inferiore a $S_4$ è certo che la superficie non potrà stare (quando solo si escludano il caso notissimo della congruenza lineare (1, 1), e quelli, ancora più semplici, della stella di rette (1, 0) e del piano rigato (0, 1)).

Uno studio dei sistemi di rette partendo da un tal punto di vista non mi sembra che sia ancora stato fatto; e per questo appunto ho creduto valesse la pena di far conoscere alcuni risultati speciali (come verrà meglio precisato in seguito) a cui per questa via sono stato condotto (**).

**2.** Supponiamo dunque di avere nello spazio $S_3$ un sistema (algebrico) di rette il quale sia di ordine $m$, di classe $n$, di rango $k$ e di genere $p$ (***).

---

(*) Questo lavoro costituisce la seconda parte della Dissertazione di Laurea cit. In esso, considerando appunto la geometria della retta come quella di una quadrica a quattro dimensioni in uno spazio lineare $S_5$, l'A. fa la teoria generale del complesso quadratico, della sua superficie singolare, dei suoi complessi lineari fondamentali, ecc., qualunque sia la *specie* del complesso medesimo, e ottiene così molti risultati importanti e fino allora sconosciuti. Nello stesso lavoro il sig. Segre si occupa anche delle congruenze quadratiche e delle rigate biquadratiche, considerandole rispettivamente come intersezioni di due quadriche in $S_4$ e in $S_3$.

(**) I più vivi ringraziamenti devo poi tributare all'egr. prof. C. Segre, il quale, essendosi già occupato anni sono di quest'argomento, volle gentilmente rilasciarmi alcuni suoi appunti in proposito; appunti che mi furono spesso di ottima guida nelle ricerche.

(***) Con ciò intendiamo che fra le rette del sistema ve ne siano in generale $m$ che passano per un punto arbitrario dello spazio, e $n$ che giacciono in un piano del pari arbitrario; che vi siano in generale $k$ coppie di rette formanti fascio con una retta data, e che infine le rette comuni allo stesso sistema e a un complesso lineare, in particolare

Questo sistema si potrà rappresentare con una superficie $F$ dello spazio $S_5$ contenuta in (almeno) una quadrica ($M_4^2$) non degenere; questa superficie sarà di ordine $m+n$, e i piani dei due sistemi di quella quadrica la segheranno rispettivamente in $m$ e in $n$ punti. Le sezioni spaziali della superficie saranno curve di genere $p$. Da una retta $r$ della $M_4^2$ non incidente a $F^{m+n}$ questa superficie si proietterà su di un $S_3$ in un'altra superficie $\Phi$ (in generale semplice) pure di ordine $m+n$ e con un punto $m^{plo}$ e un punto $n^{plo}$, proiezioni rispettivamente degli $m$ e degli $n$ punti di $F$ che stanno nei due piani di $M_4^2$ passanti per $r$ (*). Le corde di $F$ incidenti a $r$ stessa daranno poi luogo a una curva doppia di $\Phi$, la quale in quei due punti, l'uno $m^{plo}$ e l'altro $n^{plo}$, della superficie avrà rispettivamente le multiplicità $\binom{m}{2}$ e $\binom{n}{2}$ e in ogni piano passante per questi due punti ne avrà ancora altri $k$, sicchè il suo ordine sarà dato dalla somma $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+k$ (**). Avremo perciò

$$p=\binom{m+n-1}{2}-\binom{m}{2}-\binom{n}{2}-k,$$

ossia

$$p=(m-1)(n-1)-k,$$

se la superficie $\Phi$ non ha, all'infuori di quella certa curva di ordine $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+k$, nessun punto doppio, o ne ha solo più un numero finito. Se invece ne ha infiniti altri (e quindi la congruenza ha infinite rette doppie) (***), il valore

---

dunque quelle rette del sistema che si appoggiano ad una retta fissa data ad arbitrio, formino in generale una rigata di genere $p$. La necessità (o l'opportunità almeno) di considerare accanto all'ordine e alla classe di una congruenza di rette anche uno di questi ultimi due caratteri (caratteri che, come apparirà tosto, sono intimamente legati fra loro) fu rilevata per la prima volta da SCHUMACHER (Math. Ann., Bd. 37; cfr. anche STURM: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, vol. 2.°, pag. 1) il quale chiamava *Art* ciò che noi qui chiamiamo (e che oggi comunemente si chiama) *rango* della congruenza. Di questa stessa opportunità è fatto cenno anche negli appunti del sig. SEGRE, e in un foglio precisamente che ritengo scritto prima ancora della pubblicazione del lavoro cit. di SCHUMACHER.

(*) Questo ragionamento si può applicare anche al caso in cui la superficie $F$ sia contenuta in uno spazio $S_4$, purchè la retta $r$ si prenda allora semplicemente incidente a questo stesso spazio.

(**) V. anche SCHUMACHER: *Classification der algebraischen Strahlensysteme.* (È questo il lavoro cit. dei Math. Ann., Bd. 37.)

(***) Questi ulteriori punti doppi di $\Phi$ non possono provenire infatti che da punti i quali siano a lor volta doppi per $F$ (e corrispondano perciò a rette doppie della congruenza).

di $p$ subirà una diminuzione uguale all'ordine di questa nuova linea doppia (ossia della rigata costituita dalle rette doppie della congruenza) (*) (**).

Da quanto precede segue altresì che il nostro sistema $(m, n)$ (***), supposto privo di *linea focale*, ammetterà una *superficie focale* di ordine $\mu = 2\{m + p - 1\}$ e di classe $\nu = 2\{n + p - 1\}$ (****).

**3.** In questo lavoro noi ci occuperemo di sistemi di rette per cui $m + n \leq 8$; di sistemi cioè che si rappresentano con superficie di ordine non superiore all'*ottavo*. Per queste congruenze introdurremo (in generale almeno) la restrizione che esse *non abbiano infinite rette doppie;* restrizione che abbrevierà spesso, e non poco, i nostri ragionamenti, senza tuttavia troppo scemare l'importanza e la generalità (per quanto ben relative) dei risultati che otterremo. E possiamo anche dispensarci dalla considerazione dei sistemi di genere $p = 0$. Infatti dalle note proprietà delle superficie a sezioni razionali (*****) discende immediatamente che ogni congruenza $(m, n)$ di genere

(*) La relazione $p = (m-1)(n-1) - k$ risulta anche da una formola di CHASLES (Compt. Rend., tom. 53) sul genere di una curva tracciata sopra una quadrica. Infatti la sezione determinata nella superficie $F$ dall'$S_4$ tangente alla $M_4^2$ in un punto qualunque della retta $r$ si proietta da questo stesso punto in una curva di ordine $m+n$ contenuta in una quadrica di $S_3$; curva che incontra le generatrici dei due sistemi di questa quadrica rispettivamente in $m$ e in $n$ punti, e che ha poi a sua volta $k$ punti doppi (oltre quelli che già avesse eventualmente la sezione considerata di $F$). E la formola ricordata di CHASLES dice appunto che questa curva di $S_3$ è allora di genere uguale a $(m-1)(n-1) - k$ (diminuito ancora, occorrendo, del numero di questi ultimi punti doppi).

(**) Dalla relazione $p = (m-1)(n-1) - k$, non potendo $k$, per il suo stesso significato, assumere valori negativi, segue (e *a fortiori* anche, nel caso che vi siano infinite rette doppie) $p \leq (m-1)(n-1)$. E il valore massimo che può raggiungere questo prodotto per una data somma $m+n$ (valore che si ha per $m = n$ o per $m = n \pm 1$ secondo che questa somma è pari o dispari) non è altro che il *genere massimo* di una curva (possiamo dire) *non piana* di ordine $m+n$ (cfr. ad es. HALPHEN: *Mémoire sur les courbes gauches algébriques;* Compt. Rend. de l'Ac. des Sc., tom. 70; NOETHER: *Zur Grundlegung der Theorie der alg. Raumcurven;* Berlin, 1883; CASTELNUOVO: *Ricerche di Geometria....*; Atti della R. Acc. di Torino, vol. 24). Questo risultato è dunque pienamente d'accordo coll'altro, che la sezione generica della superficie $F$ deve essere una curva di ordine $m+n$ e genere $p$ appartenente a $S_3$ o a $S_4$.

(***) Secondo l'uso ormai invalso indicheremo con questo simbolo una congruenza di ordine $m$ e di classe $n$.

(****) A queste relazioni si giunge infatti eliminando il $k$ dalle due $\mu + 2k = 2n(m-1)$ e $\nu + 2k = 2m(n-1)$ per mezzo della $k = (m-1)(n-1) - p$. Che se poi la congruenza avesse infinite rette doppie costituenti una rigata di ordine $d$, in tutte tre queste equazioni bisognerebbe mutare $k$ in $k + d$, sicchè le espressioni date per $\mu$ e $\nu$ rimarrebbero inalterate.

(*****) E più particolarmente dai risultati ottenuti dai sigg. NOETHER (Math. Ann., Bd. 3), PICARD, GUCCIA, DEL PEZZO, CASTELNUOVO, ecc.

$p = 0$ ha una linea focale (razionale) di ordine $n$, ed è precisamente costituita da una serie $\infty^1$ di fasci di raggi coi centri su questa linea e coi piani tangenti a una sviluppabile di classe $m$, fatta solo eccezione:

*a*) Per il sistema (1, 3) delle corde di una cubica sghemba e per il suo duale (3, 1) che è il sistema delle congiungenti delle coppie di punti omologhi di due piani collineari in posizione generale; sistemi che si rappresentano entrambi colla *superficie di* VERONESE (*);

*b*) Per la congruenza (2, 2) con infinite (un fascio di) rette doppie, che è una particolare intersezione di un complesso lineare (speciale) con un complesso quadratico; questa seconda congruenza si rappresenta colla superficie $F^4$ di $S_4$ proiezione di quella di VERONESE da un punto esterno ad essa ma contenuto nel piano di una sua conica.

In particolare dunque non avremo ad occuparci dei sistemi di primo ordine o di prima classe (d'altronde già ben conosciuti) pei quali appunto si ha sempre $p = 0$.

Dei sistemi di secondo ordine (o di seconda classe), che furono anche diffusamente studiati, accenneremo solo, occorrendo, le cose principali (**); ma non sarà forse inutile fissare già ora su di essi, per un momento, la nostra attenzione.

---

(*) Le proprietà principali di questa superficie (la sola $F^n$ di $S_{n+1}$ che non sia rigata) furono date appunto per la prima volta dal sig. VERONESE (*La superficie omaloide normale del quarto ordine .....*; Mem. R. Acc. dei Lincei, serie 3.ª, vol. 19). Dei sistemi di rette che questa superficie viene a rappresentare quando una quadrica qualunque (non degenere) passante per essa si assume come quadrica delle rette di $S_3$ (ossia come $M_4^2$ dei complessi lineari speciali, se come *punto* dello spazio $S_5$ si vuol assumere il complesso lineare di rette) si è occupato il sig. SEGRE nella Nota: *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ....* (Atti dell'Acc. di Torino, vol. 20).

(**) Per questi sistemi è ormai classica la Memoria importantissima del sig. KUMMER: *Ueber die algebr. Strahlensysteme, in's besondere über die der ersten und zweiten Ordnung* (Abhand. der Berl. Ak. 1866; pag. 1-120), nella quale per la prima volta fu esposta una teoria completa dei sistemi di rette di primo e secondo ordine. Dopo questo lavoro molti altri ne comparvero sullo stesso argomento (limitandosi però alcuni allo studio di congruenze particolari); in Germania quelli del REYE (*Ueber die Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten,* Journ. de Crelle, vol. 86, pag. 84), dello STAHL (*Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung,* ibid. 95, pag. 297 e altri nei vol. 91 e 97), di STURM (Math. Ann., Bd. 36 e Gött. Nachr., 1888), di SCHUMACHER (Math. Ann., Bd. 38 e Diss. München, 8.º), di WEILER, WAELSCH, ecc. In Italia (sorvolando su alcune ricerche del CAPORALI) sono notevoli i lavori del BERTINI (*Sulla congruenza* $(2, 6)_1$ *dotata di sola superficie focale;* Transunti R. Acc. dei Lincei, 1879-80), del LORIA (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19 e 21), del MASONI (Rend. Acc.

## § 2. Osservazioni sui sistemi di rette di secondo ordine.

**4.** È noto che una congruenza di secondo ordine (o di seconda classe) priva di linea (sviluppabile) focale ha sempre una superficie focale di quarto ordine (di quarta classe). Essendo dunque $2(2+p-1)=4$, segue $p=1$, ossia:

*Una congruenza di secondo ordine (seconda classe) priva di linea (sviluppabile) focale è sempre di genere uno;* si rappresenterà dunque, indicata con $n$ la sua classe (il suo ordine), con una superficie di ordine $n+2$ a sezioni ellittiche. Dalle proprietà note di queste congruenze (e precisamente dalla possibilità di rappresentarle univocamente sul piano) segue altresì che questa superficie dovrà sempre essere razionale; ma possiamo anche ritrovare la stessa cosa per altra via.

Infatti una congruenza di secondo ordine (ad es.) priva di linea focale può sempre riferirsi univocamente a un piano doppio (poichè da ogni punto di un piano non passante per alcun suo punto singolare escono, senza eccezioni, due raggi di essa, distinti o coincidenti); e in questa corrispondenza compare in quel piano una *curva limite* di quart'ordine, l'intersezione dello stesso piano colla superficie focale (che è precisamente il luogo dei punti da cui escono due raggi della congruenza infinitamente vicini). Questa curva non sarà certo costituita (almeno se il piano è stato preso in modo generale) da quattro rette passanti per uno stesso punto; potremo quindi *sempre* rappresentare la nostra congruenza anche sul piano semplice (*), ossia:

*Le congruenze di secondo ordine prive di linea focale sono tutte rappre-*

---

di Napoli, vol. 22), del Montesano, ecc., e gli stessi sistemi di secondo ordine (con sola superficie focale) furono poi ritrovati dal Segre (Mem. dell'Acc. di Torino, serie 2.ª, vol. 39) e dal Castelnuovo (Atti Ist. Veneto, serie 6.ª, tom. 5 e 6) come proiezioni delle varietà cubiche di $S_4$ con un numero finito e $\geqq 6$ di punti doppi.

Il sig. Sturm si è occupato poi ancora delle congruenze di secondo ordine, alle quali ha dedicato anzi (e quasi esclusivamente) il 2.° vol. testè comparso (e già citato) della sua *Liniengeometrie* (*Die Strahlencongruenzen erster und zweiter Ordnung;* Leipzig, 1893). Nell'ultima parte di questo lavoro egli dà anche la classificazione completa delle congruenze di secondo ordine con linea focale, comprendendovi alcuni casi che erano sfuggiti a Kummer, e che solo più tardi si erano presentati a lui stesso (Sturm) e a Schumacher (cfr. le Note citate nei Math. Ann.).

(*) Cfr. Clebsch: *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen....* (Math. Ann., Bd. 3); Noether: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsber. der Physik. medic. Soc. zu Erlangen, 14 jan. 1878); più *tre* lavori del De Paolis (Mem. R. Acc. dei Lincei, serie 3.ª, vol. 1 e 2).

*sentabili sul piano.* Questa proprietà, come ho detto poc' anzi, è già nota e da parecchio tempo; ma risultava solo dall' insieme delle varie dimostrazioni che se ne davano per i diversi casi (cfr. ad es. i lavori citati dei sig.[i] BERTINI e LORIA). La nuova via ci permette invece di stabilire lo stesso teorema con un ragionamento semplicissimo e unico (valevole cioè per tutti i casi).

È quasi superfluo l'aggiungere che, rappresentandosi queste congruenze con superficie *razionali* di ordine $n+2$ à *sezioni ellittiche,* avremo tosto, per i risultati ottenuti dal sig. DEL PEZZO (*), $n+2 \leqq 9$ e quindi $n \leqq 7$. Ritroviamo dunque il notissimo teorema di KUMMER (loc. cit., § 6):

*Una congruenza di secondo ordine priva di linea focale non può essere di classe superiore a* 7 (**). I casi di $n \leqq 7$ esistono però tutti, com'è noto, (e anzi per $n=6$ ne esistono due diversi); e noi pure avremo occasione di ritrovarli in seguito (escluso solo l'ultimo, per cui si avrebbe $m+n=9$; ma anche questo si potrebbe studiare per la stessa via, senza difficoltà di sorta).

Daremo ora un breve cenno sui sistemi $(m, n)$ per cui $m+n=5$ (***); e ci fermeremo poi più a lungo sui casi di $m+n=6,\ 7,\ 8$.

## § 3. Sistemi $(m, n)$ per cui $m+n=5$.

**5**. Se $m+n=5$, si ha $p \leqq 2$ e quindi i due casi di $p=2$ e $p=1$ (omettendo, come già si è detto, quello di $p=0$). Nel primo caso la congruenza è certo contenuta in complesso lineare (****); nel secondo può non esserlo, e non lo è anzi certo quando non abbia infinite (un fascio di) rette doppie.

---

(*) *Sulle superficie dell' n.° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. 1).

(**) E, dualmente, una congruenza di seconda classe priva di sviluppabile focale non può essere di ordine superiore a 7.

(***) Sul caso di $m+n=4$, su quello cioè (notissimo) delle congruenze (2, 2), crediamo inutile fermarci, anche solo brevemente.

(****) Ricordiamo che una curva (irriduttibile) di ordine $m+n=\mu$ è di genere $p<\frac{\mu}{2}+1$ è certo *non speciale* e non può quindi appartenere a uno spazio superiore a $S_{\mu-p}$ $\left(\text{se fosse invece } p=\frac{\mu}{2}+1, \text{ la curva sarebbe speciale, e potrebbe appartenere anche a un } S_{\mu-p+1}\equiv S_{\frac{\mu}{2}}\right)$. In particolare dunque una $C^5$ di genere 2 non potrà appartenere a

Si vede facilmente che ogni superficie di quinto ordine appartenente a $S_4$ e colle sezioni di genere due si può ottenere come intersezione di una quadrica e di una varietà cubica aventi un piano a comune. La quadrica sarà dunque un cono (di prima specie) e perciò:

*Esistono congruenze* (2, 3) *o* (3, 2) *di genere due; esse sono tutte contenute in complessi lineari speciali* (*), *e si possono segare da questi mediante complessi cubici contenenti una stella o un piano rigato il cui sostegno appartenga alla retta asse del primo complesso.* La congruenza (2, 3) ad es. sarebbe costituita dalle tangenti a una superficie cubica con due punti doppi le quali si appoggiano alla retta intersezione residua della stessa superficie col piano tangente ad essa lungo la congiungente di quei due punti (**). Le proprietà principali di questa congruenza seguono immediatamente da quelle della superficie $F^5$ che la rappresenta, sicchè non occorre insistervi sopra più a lungo.

**6.** E poche parole anche potranno bastare per il caso di $p = 1$. Ricorderò soltanto che *ogni congruenza* (2, 3) *di genere uno non contenuta in un complesso lineare sta in un sistema lineare* $\infty^3$ *di complessi quadratici* (***); contiene in generale *dieci fasci di raggi* e *cinque serie razionali* $\infty^1$ *di rigate quadriche,* in ciascuna delle quali vi è *un cono quadrico,* e *tre* altre rigate si spezzano in una coppia di fasci. Ciascuna di queste serie ha 8 punti basi formanti gruppo (auto)associato (i vertici degli altri quattro coni,

---

uno spazio superiore a $S_3$, e una superficie di quinto ordine colle sezioni di genere 2 starà quindi certo in un $S_4$. Un fatto analogo ci si presenterà nei casi di $m + n = 6, 7, 8$ per i generi rispettivamente superiori a 2, 3, 5.

Queste stesse conseguenze si potrebbero anche dedurre dai risultati che Castelnuovo (Atti di Torino, vol. 24) e Bertini (stessi Atti, vol. 26) hanno ottenuti sul *genere massimo* di una curva di dato ordine e appartenente a un dato spazio.

(*) È evidente che una congruenza contenuta in un complesso lineare non speciale deve essere di ordine eguale alla propria classe. Una congruenza contenuta dunque in un complesso lineare, ma per la quale quest'ultima proprietà non sia verificata, si comporrà sempre di rette appoggiate a una retta fissa.

(**) È noto infatti che una superficie cubica con due punti doppi ammette lungo la congiungente di questi un piano tangente unico (che l'incontra ancora secondo un'altra retta, in generale distinta dalla prima). Della nostra congruenza non fanno parte le rette che toccano la superficie in punti di questa seconda retta (asse del complesso lineare speciale che contiene la stessa congruenza (2, 3)), e nemmeno quelle che stanno nel piano tangente cit. Queste ultime costituiscono anzi l'intersezione residua dei due complessi di cui sopra.

(***) Più generalmente, a una superficie contenuta in $\infty^k$ quadriche (non tutte degeneri) corrisponde un sistema di rette contenuto in $\infty^{k-1}$ complessi quadratici.

e i centri degli altri quattro fasci); tutte cinque inviluppano la superficie focale della congruenza, che è di *quarto ordine* e *sesta classe,* con *quindici punti* e *dieci piani singolari,* ecc. ecc.

Aggiungerò ancora che nel sistema $\infty^4$ delle quadriche passanti per una $F^5$ di $S_5$ a sezioni ellittiche vi sono *cinque* sistemi (lineari) $\infty^2$ di coni di seconda specie aventi rispettivamente per varietà basi le $M_3^3$ dei piani dei cinque sistemi di coniche contenuti nella stessa superficie (*). Da questo si trae facilmente che per una quadrica qualunque non degenere di quel sistema $\infty^4$ passano in generale *dieci* fasci di caratteristica [(11) (11) (11)] (**) in esso contenuti (***), e che perciò *la nostra congruenza* (2, 3) *è contenuta in generale in dieci complessi tetraedrali* (****).

## § 4. Sistemi $(m, n)$ per cui $m+n=6$.

**7.** Il caso di $m+n=6$ ci conduce a congruenze del tipo (3, 3) ovvero (2, 4) [o (4, 2)]. Per queste congruenze avremo sempre $p \leq 4$; e precisamente se $p=4$ o $p=3$ si tratterà certo di congruenze contenute in un complesso lineare; se $p=2$ o $p=1$, di congruenze non contenute in complessi così fatti, a meno che non abbiano infinite rette doppie.

Se $p=4$, la congruenza si rappresenterà con una superficie di *sesto* ordine a sezioni di genere 4, contenuta in uno spazio $S_4$ e anzi in una (e certo in non più di una) quadrica di questo spazio. È facile anzi riconoscere che questa stessa superficie si potrà sempre ottenere come intersezione di quella quadrica con una varietà cubica ($M_3^3$), e che, viceversa, l'intersezione di due varietà così fatte in $S_4$ è appunto, in generale, una superficie di sesto ordine

(*) Di queste varietà e delle altre analoghe (serie semplici razionali di piani) che incontreremo in seguito si è occupato il sig. SEGRE in una Nota inserta negli Atti dell'Acc. di Torino, vol. 21.

(**) Vedi la Dissertazione cit. del SEGRE.

(***) Basta osservare che nello spazio $S_4$ si può sempre condurre per un punto dato una (e in generale una sola) retta incidente a tre piani dati. Essendo dati perciò *cinque* piani si potranno per quel punto condurre $\binom{5}{3}$ ossia 10 rette ciascuna delle quali si appoggi a tre di quei piani. Qui lo spazio $S_4$ e i cinque piani sono rispettivamente il sistema $\infty^1$ e quelli $\infty^2$, ecc.

(****) Proprietà anche questa già conosciuta. Cfr. ad es. i lavori cit. del CASTELNUOVO e dello STURM.

a sezioni di genere 4; superficie che rappresenta una congruenza $(m, 6-m)$, e precisamente (3, 3). Concludiamo dunque:

*Esistono congruenze* $(m, 6-m)$ *di genere* 4; *esse sono tutte di terzo ordine e terza classe, e si possono ottenere come intersezioni di complessi lineari con complessi cubici (stanno dunque sempre in complessi lineari)* (*). Viceversa, l'intersezione di un complesso lineare e di un complesso cubico è anche in generale una congruenza (3, 3) di genere 4. *La superficie focale di questa congruenza è di dodicesimo ordine e dodicesima classe* (e identica alla sua polare reciproca).

Queste superficie di sesto ordine, e, per conseguenza, queste congruenze (3, 3), non sono in generale rappresentabili sul piano (**); ma possono diventarlo acquistando qualche opportuna singolarità. Se fra queste non vi è alcun punto di multiplicità superiore a due, potremo proiettare $F^6$ da uno dei suoi punti doppi, riducendoci così a una $F^4$ di $S_3$, per la quale i casi di razionalità furono già dati tutti dal NOETHER (***). Che se poi $F^6$ ha un punto triplo, potremo senz'altro proiettarla in una superficie cubica di $S_3$, superficie che sarà certo razionale, a meno che non si tratti del cono ellittico. Escluso pertanto questo caso (****), la $F^6$ con punto triplo, ossia la congruenza (3, 3) con retta tripla, sarà sempre rappresentabile sul piano, e si rappresenterà precisamente con un sistema di sestiche aventi 6 punti doppi e 6 punti semplici basi; situati questi 12 punti tutti su di una cubica (*****). La congruenza contiene

---

(*) Anzi, la proprietà di queste congruenze (3, 3) di essere contenute in un complesso lineare basta per asserire che (quando questo complesso non sia speciale) esse dovranno costituirne l'intersezione (completa) con un complesso cubico. (Cfr. KLEIN: *Ueber einen liniengeometrischen Satz;* Math. Ann., Bd. 22.)

(**) Si può verificare facilmente che, proiettando $F^6$ da un suo punto scelto in modo generale, si ottiene una $F^5$ di $S_3$ con conica doppia; conica che si spezza in due rette *incidenti* quando la quadrica passante per $F^6$ è un cono. In nessun caso però si potrebbero avere *due rette doppie sghembe* (la cui presenza appunto renderebbe la superficie razionale).

(***) *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Ann., Bd. 33).

(****) Il quale, d'altronde, potrebbe presentarsi solo quando si fosse segata la quadrica di $S_4$ con una $M_3^3$ molto particolare (che possiamo assumere costituita da una $\infty^1$ ellittica di piani passanti per una medesima retta).

(*****) Dicendo che una congruenza si rappresenta sul piano *con un dato sistema lineare* $(\infty^5)$ *di curve,* intendiamo che i punti di queste varie curve sono immagini rispettivamente delle generatrici delle rigate in cui la congruenza proposta è segata dagli $\infty^5$ complessi lineari di rette. È insomma l'ordinaria rappresentazione delle superficie razionali sul piano, applicata alla superficie che (nel senso stabilito al n.° 1) è immagine della nostra congruenza.

allora 6 fasci di raggi e 27 rigate quadriche passanti tutte per la retta tripla, ecc. ecc.

**8.** Facciamo ora $p = 3$. La nostra congruenza, supposta esistente, si rappresenterà con una superficie a sezioni di genere 3, ma ancora di sesto ordine e contenuta in una (sola) quadrica dello spazio $S_4$. Da quest'ultima la superficie $F^6$ (*) non potrà più segarsi con una varietà cubica, ma solo con una varietà di quarto ordine, l'intersezione residua essendo costituita, come si può facilmente riconoscere, da una coppia di piani con un sol punto a comune. Quella quadrica sarà dunque un cono, e questi due piani apparterranno (nel cono) ad uno stesso sistema. Viceversa, l'intersezione generale di un cono quadrico (di prima specie) di $S_4$ con una varietà di quarto ordine condotta per due suoi piani dello stesso sistema è appunto una superficie di sesto ordine colle sezioni di genere 3 (e iperellittiche). Questa superficie ha nel vertice del cono un punto doppio (dal quale si proietterebbe in una quadrica doppia di $S_3$), e rappresenta una congruenza (2, 4) o (4, 2), non già (3, 3), contenuta in un complesso lineare speciale. Concludiamo perciò:

*Ogni congruenza* (3, 3) *di genere* 3 *ha un fascio di rette doppie* (ed è una particolare intersezione di un complesso lineare con un complesso cubico) (**).

*Esistono invece congruenze* (2, 4) o (4, 2) *di genere* 3 *e non aventi infinite rette doppie, e queste sono tutte iperellittiche* (***); *stanno in complessi lineari speciali, e si possono segare da questi mediante complessi di quarto grado condotti per due stelle o rispettivamente due piani della retta asse del primo complesso.* Questa retta è anche doppia per la congruenza; in ogni suo piano la congruenza (2, 4) ad es. ha un inviluppo quadrico di rette, mentre ogni suo punto è allora vertice di un cono quartico (di genere *due*) di raggi della stessa congruenza (e con quella stessa retta per generatrice doppia). Questa congruenza (2, 4) è l'insieme delle tangenti a una superficie cubica che si appoggiano a una retta (generale) di essa (cfr. i lavori citati di Kummer e Sturm (****)).

(*) Supposta priva di linea (e non vi potrebbe essere che una retta) doppia.

(**) Cfr. anche la nota (*) al n.° prec.

(***) Ossia le rette comuni a una di esse e ad un complesso lineare qualunque formano una rigata iperellittica; proprietà questa che è comune a tutte le congruenze di secondo ordine o seconda classe.

(****) Se questa retta avesse invece la posizione particolare che si richiedeva al n.° 5, dalla congruenza (2, 4) si staccherebbe tutto un piano di rette (il piano tangente alla superficie cubica lungo la congiungente dei suoi due punti doppi), e resterebbe così appunto una congruenza (2, 3) (di genere 2).

**9.** Sia ora $p = 2$. Poichè una sestica di genere 2 contenuta in una quadrica di $S_3$ deve sempre avere qualche punto doppio, così la superficie $F^6$, se non ha una linea doppia, dovrà ora appartenere allo spazio $S_5$ (supposto sempre, ben inteso, che abbia a rappresentare una congruenza di rette). Questa stessa superficie, quando non sia un cono (caso che, naturalmente, possiamo fin d'ora escludere) è sempre rappresentabile sul piano (*), e contiene una serie razionale $\infty^1$ di coniche i cui piani formano una $M_3^3$ generabile con 3 fasci proiettivi di $S_4$; la superficie $F^6$ è anzi intersezione di questa $M_3^3$ con una quadrica (che possiamo supporre non degenere) e sta, complessivamente, sopra $\infty^3$ quadriche (**). D'altra parte l'intersezione testè considerata è anche, nel caso più generale, una superficie di sesto ordine colle sezioni di genere 2. La congruenza rappresentata dalla superficie $F^6$ è poi di terzo ordine (e terza classe), perchè un piano qualunque della *quadrica delle rette* taglia $M_3^3$, quindi $F^6$ stessa, in *tre* punti (o in infiniti).

Osserviamo ancora che i tre fasci di $S_4$ con cui si genera la $M_3^3$ di cui sopra sono segati in generale dalla quadrica delle rette in altrettanti fasci (proiettivi) di complessi lineari, e perciò la congruenza rappresentata dalla nostra superficie $F^6$ sarà appunto generabile con questi tre ultimi fasci (e inversamente....). Dunque:

*Esistono congruenze* $(m, 6 - m)$ *di genere* 2; *e queste (quando non abbiano infinite rette doppie) sono tutte di terzo ordine e terza classe, e si possono generare con tre fasci proiettivi di complessi lineari. Viceversa, l'insieme delle rigate (quadriche) d'intersezione delle terne di complessi omologhi di tre fasci proiettivi di complessi lineari è in generale appunto una congruenza* (3, 3) *di genere* 2.

Le congruenze (3, 3) di genere 2 *generali* sono dunque quelle stesse studiate dal sig. Roccella (*Sugli enti geometrici dello spazio di rette....*; Piazza Armerina, 1882) (***).

---

(*) Da una sua corda generale essa si proietterebbe infatti in una superficie di quarto ordine di $S_3$ con retta doppia.

(**) Non ho bisogno di aggiungere che questa superficie $F^6$ è *normale* per lo spazio $S_5$ (nel quale noi la consideriamo). Ricordiamo anzi (e ce ne varremo più volte in seguito) che una superficie razionale di ordine $n$ e colle sezioni di genere $p$ è sempre normale per uno spazio non inferiore a $S_{n-p+1}$, e lo è *precisamente* per questo spazio $(S_{n-p+1})$ quando le sue sezioni sono (come in questo caso) curve *non speciali*.

(***) Si può dire anzi, in un certo senso, che la congruenza (3, 3) di Roccella è *la più generale fra le congruenze* (3, 3) *non contenute in complessi lineari*. (E questo precisamente quando si considerino le congruenze (3, 3) di genere *uno* e di genere *zero* come casi particolari di quelle di genere *due*.)

Il sig. ROCCELLA si è occupato anche, e a lungo, delle proprietà di queste congruenze; io mi limiterò quindi a ricordarne le più notevoli. La congruenza (3, 3) di genere 2 sta in $\infty^2$ complessi quadratici di rette, *tutti* generabili con due fasci proiettivi di complessi lineari (*). Essa contiene una serie razionale $\infty^1$ di rigate quadriche, della quale fanno parte, come quadriche degeneri, soltanto *sei* coppie di fasci di rette; le direttrici delle stesse rigate formano una nuova congruenza (3, 3), identica alla prima, e che ha comune con essa la superficie focale (inviluppo della serie $\infty^1$ di quadriche). Quest'ultima è di ottavo ordine e di ottava classe, e ha una curva cuspidale di dodicesimo ordine (luogo dei punti per cui i tre raggi della congruenza che ne escono sono tutti infinitamente vicini). I centri e i piani dei 12 fasci della congruenza (**) sono rispettivamente punti e piani singolari della superficie focale; questi ultimi la toccano precisamente lungo coniche, e ne osculano lo spigolo di regresso in quattro punti posti rispettivamente sopra le stesse coniche, ecc. ecc. (***).

Abbiamo già detto che la superficie $F^6$, e quindi anche le congruenze (3, 3) di cui ora ci occupiamo, sono sempre rappresentabili sul piano. Le varie rappresentazioni che se ne possono dare discendono immediatamente dai risultati che si hanno sulla rappresentazione delle superficie a sezioni iperellittiche (e in particolare a sezioni di genere 2). Questi risultati appunto ci permettono di concludere che, se la superficie $F^6$ ha per *direttrice minima* (****) una conica (se cioè le coniche della sua serie $\infty^1$ non si incontrano e non tagliano tutte una stessa retta), essa, e quindi la relativa congruenza (3, 3), si potranno rappresentare col sistema delle quartiche piane aventi un punto doppio e sei punti semplici a comune. Questo caso ci condurrà, come ora vedremo, a delle congruenze particolari molto notevoli.

---

(*) Perchè le loro caratteristiche contengono sempre un gruppo (almeno) di due indici. (Cfr. ad es. la Memoria cit. del SEGRE: *Sulla geometria della retta,* ecc., n.° 126.)

(**) Questi centri e questi piani sono gli stessi per tutte due le congruenze (3, 3); solo che, se nella prima congruenza ad es. una rigata quadrica si spezza nei due fasci $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, si trova che la retta $AB$ coincide sempre coll'intersezione $\overline{\alpha\beta}$, e la seconda congruenza contiene allora (come, del resto, è naturale) i due fasci $A(\beta)$ e $B(\alpha)$.

(***) Anche questa superficie di ottavo ordine e ottava classe è identica alla (ha cioè le stesse singolarità della) sua polare reciproca. Di essa si è occupato anche il KUMMER nella Memoria: *Ueber diejenigen Flächen welche mit ihren reciprock polaren Flächen von derselben Ordnung sind und die gleichen Singularitäten besitzen* (Monatsber. der Ak. zu Berlin, 17 Januar 1878).

(****) Cfr. CASTELNUOVO (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche;* Rend. Palermo, vol. 4).

**10.** La superficie di sesto ordine rappresentata dal sistema di quartiche piane testè ricordato contiene in generale 32 direttrici coniche (*), ciascuna delle quali ne taglia un'altra in due punti, 15 in un punto unico, e non taglia affatto le rimanenti (nè i loro piani si incontrano). Possiamo quindi raggruppare quelle stesse 32 coniche in 16 coppie distinte e tali che due coniche della stessa coppia abbiano sempre due punti (e quindi i loro piani una retta) a comune. Ciascuna di queste coppie di piani costituirà con $F^6$ la varietà della base di una certa rete di quadriche, e nel sistema lineare $\infty^3$ delle quadriche passanti per quella superficie vi saranno perciò in generale 16 reti diverse, in ciascuna delle quali ogni quadrica conterrà i piani di due determinate direttrici coniche della stessa superficie (**). È chiaro altresì che, se le quadriche passanti per $F^6$ non sono tutte degeneri, altrettanto avverrà di quelle contenute in queste 16 reti, e noi potremo perciò sempre assumere una di queste ultime come quadrica delle rette. Giungeremo così a *una congruenza* (3, 3) *con un tredicesimo punto* ($A$) *e un tredicesimo piano* ($\alpha$) *singolare; punto e piano che si apparterranno e che saranno rispettivamente vertice di un cono e sostegno di un inviluppo quadrico di rette della congruenza.* Questo cono e questo inviluppo non faranno parte della serie $\infty^1$ di rigate quadriche; ma queste ultime avranno rispettivamente per direttrici le infinite rette del fascio $A(\alpha)$.

**11.** Ma per la superficie $F^6$ e per una qualunque di quelle 16 coppie di piani passano ancora $\infty^2$ quadriche; noi potremo dunque imporre a una di queste di contenere anche un'altra di quelle stesse coppie, e vi sarà anzi sempre tutto un fascio di quadriche soddisfacenti a questa condizione (qualunque sia la seconda coppia assegnata). Si può riconoscere facilmente che queste stesse quadriche, oltre a quei primi 4 piani, ne dovranno contenere tutte altri 4 ben determinati (e passanti rispettivamente per altrettante rette di $F^6$); esse conterranno perciò, complessivamente, 8 piani fissi, ciascuno dei quali (come si vede subito) ne incontrerà altri tre in rette, tre in un punto unico, e non incontrerà affatto l'ultimo. *Questa proprietà è caratteristica (nello spazio $S_5$) per i fasci di quadriche del tipo* [(11) (11) (11)]; *per quei fasci*

(*) Queste sono rappresentate rispettivamente dal punto fondamentale doppio, dalle 15 rette che congiungono i punti fondamentali semplici a due a due, dalle 15 coniche che congiungono il punto doppio a quattro qualunque dei punti semplici, e dalla cubica che passa doppiamente per il primo e semplicemente per questi (sei) ultimi punti.

(**) Il passaggio di una quadrica (contenente già $F^6$) per due di questi piani i quali s'incontrino in una retta equivale infatti a una nuova condizione unica; quella ad es. di passare per un punto (arbitrario) dell'intersezione degli stessi due piani.

*cioè che contengono (come sole quadriche degeneri) tre coni (distinti) di seconda specie* (*) (**).

Noi potremo dunque assumere come quadrica delle rette una quadrica contenente i piani, non solo di due, ma di *quattro* direttrici coniche della superficie $F^6$, e per questa quadrica dovrà allora passare (nel sistema $\infty^3$ di quelle che contengono $F^6$ stessa) un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)]. Quindi:

*La congruenza* (3, 3) *in discorso può acquistare anche un quattordicesimo punto* ($B$) *e un quattordicesimo piano* ($\beta$) *singolare, che pure si apparterranno e saranno ancora rispettivamente vertice di un cono e sostegno di un inviluppo quadrico di rette della congruenza.* Fra gli $\infty^2$ complessi quadratici passanti per quest'ultima vi sarà allora un *complesso tetraedrale,* il cui tetraedro fondamentale avrà due vertici nei punti singolari $A$ e $B$, ed avrà i piani $\beta$ e $\alpha$ per facce rispettivamente opposte a questi vertici; gli altri due vertici e le altre due facce saranno dati rispettivamente dai centri di due e dai piani di altri due fra i 12 fasci della congruenza. Dei centri degli altri *otto* fasci, *quattro* staranno nel piano $\alpha$ e *quattro* nel piano $\beta$; i primi avranno i piani passanti per $B$, i secondi per $A$. Questa congruenza (3, 3) sarà *Cremoniana,* e stabilirà fra i piani $\alpha$ e $\beta$ una corrispondenza birazionale del terzo ordine con due punti uniti (i due centri di fasci che stanno sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$); questa proprietà potrà anzi servire per definirla.

La congruenza (3, 3) a cui così siamo giunti è dunque quella stessa studiata da Hirst nella Nota: *On congruences of the Third Order and Class* (Proc. of the London Math. Soc., vol. 16, pag. 232), alla quale anzi rimandiamo per ulteriori proprietà della stessa (***).

---

(*) Infatti, poichè gli otto piani non passano tutti per uno stesso punto, nel fascio non può certo entrare nessun cono di prima specie. E di rette che taglino tutti otto quei piani non vè ne sono (si può dimostrarlo facilmente) che *tre:* quelle che congiungono a due a due, in modo opportuno, i sei punti per ciascuno dei quali passano quattro degli otto piani. Questi stessi piani costituiscono, da soli, la varietà base di tutta una rete di quadriche, nella quale sono contenuti tre fasci di coni di seconda specie; i coni di ciascun fascio hanno a comune l'asse (che è sempre una di quelle certe tre rette).

(**) Uno di questi coni sarà l'intersezione del fascio in discorso colla rete di coni quadrici passanti per la $M_3^3$ già considerata al n.° 9.

(***) Dal fatto che la corrispondenza birazionale di cui sopra riferisce fra loro proiettivamente i due fasci di rette $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, e chè ogni retta della congruenza (3, 3) si appoggia, com'è chiaro, a una coppia di rette omologhe di questi fasci, risulta subito (per quanto ciò non sia stato forse ancora espressamente rilevato) che la stessa congruenza

**12.** Abbiamo detto che per la superficie $F^6$ e per due qualunque di quelle 16 coppie di piani passa sempre un fascio di quadriche; noi potremo dunque imporre a una quadrica di questo fascio di contenere ancora una terza di quelle stesse coppie di piani (e la quadrica risulterà così ben determinata). Si può dimostrare che, fra le quadriche di quel fascio, i due coni (di seconda specie) che non passano per la $M_3^3$ su cui sta $F^6$ contengono ancora ciascuno *quattro* fra le rimanenti 14 coppie di piani, mentre quello che passa per questa varietà non ne contiene più alcuna; rimangono perciò ancora *sei* coppie di piani ciascuna delle quali sta sopra una quadrica (e non degenere) di quello stesso fascio (*). E si può anche verificare facilmente che le sei quadriche così ottenute sono tutte distinte. Assunta pertanto una qualunque di esse come quadrica delle rette, e osservato che per questa dovranno ora passare *tre* fasci di caratteristica [(11) (11) (11)] (corrispondenti ai diversi aggruppamenti di quelle tre coppie di piani a due a due), possiamo concludere:

*Esiste una congruenza* (3, 3) *di genere* 2 *con* 15 *punti e altrettanti piani singolari.* Dodici fra questi sono rispettivamente centri e piani di un egual numero di fasci di rette, mentre gli altri tre punti e piani ($A$, $B$, $C$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; a due a due incidenti) sono rispettivamente vertici di coni e sostegni di inviluppi quadrici, pure di rette della congruenza Le quadriche della serie $\infty^1$,

---

(3, 3) deve esser contenuta in un complesso tetraedrale. (È noto infatti che questo complesso può sempre ritenersi generato da una retta che si muova appoggiandosi costantemente a una coppia di raggi omologhi di due fasci proiettivi di rette, e che, viceversa, l'insieme di tutte le rette che si appoggiano a coppie di raggi così scelti costituisce pur sempre un complesso tetraedrale.) La stessa proprietà sussisterà naturalmente per le congruenze (4, 3) e (5, 3) che noi pure troveremo in seguito, e delle quali questa può considerarsi come caso particolare; e sussisterà anzi, più generalmente, per ogni congruenza $(n+2, n)$ determinata collo stabilire fra due piani in posizione generale una corrispondenza birazionale di ordine $n$, dotata di un punto $(n-1)^{\text{plo}}$.

(*) Si trova che per la superficie $F^6$, oltre agli $\infty^2$ coni quadrici di seconda specie che contengono la $M_3^3$, passano in generale altri 16 coni (pure di seconda specie), i cui assi non incontrano la superficie stessa (e da ciascuno dei quali perciò quest'ultima si proietta in una quadrica tripla di $S_3$). Questi 16 assi e le 16 intersezioni delle coppie di piani considerate di sopra costituiscono due sistemi tali che ogni retta dell'uno ne incontra 6 dell'altro, e 2 rette dello stesso sistema si appoggiano sempre a 2 rette determinate dell'altro. Scelte pertanto le prime due coppie di piani, restano determinati quei due fra i 16 assi che si appoggiano alle relative intersezioni; e ciascuno di questi incontra ancora altre 4 fra quelle stesse intersezioni, ed è asse di un cono di seconda specie che contiene tutte sei $(2+4)$ le corrispondenti coppie di piani. Invece il cono che contiene le stesse due (prime) coppie di piani e passa per la $M_3^3$ ha per asse l'intersezione degli $S_3$ delle coppie medesime, e varia al variare di una qualunque di queste coppie.

che esiste anche nel caso generale (n.° 9), passano ora tutte per quei tre vertici e toccano tutte quegli stessi tre piani. *Questa congruenza sta in tre diversi complessi tetraedrali;* i vertici dei tre coni e i piani dei tre inviluppi, riuniti gli uni e gli altri a due a due (in modo opportuno), dànno sempre una coppia di vertici e la coppia di facce a questi rispettivamente opposte di uno dei tre tetraedri fondamentali.

Ogni quadrica della serie $\infty^1$ testè ricordata ha qui, come si vede facilmente, una direttrice rettilinea in ciascuno dei tre fasci $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$; e le tre direttrici di una stessa quadrica sono anche rette omologhe in una determinata proiettività fra quei fasci. Dunque:

*Quest'ultima congruenza* (3, 3) *può definirsi come l'insieme delle rette che si appoggiano alle terne di raggi omologhi di tre fasci proiettivi dati comunque dello spazio.* È dunque una congruenza particolare già studiata dal Roccella; quella stessa che fu poi considerata anche da Hirst (Rend. di Palermo, vol. 1, pag. 64) come una particolare congruenza Cremoniana. E noi pure abbiamo ora trovata questa congruenza come caso particolare della precedente (che era invece la congruenza Cremoniana *generale* di Hirst) (*).

**13.** Facciamo infine $p = 1$, e rivolgiamo quindi la nostra attenzione alle superficie di sesto ordine a sezioni ellittiche contenute in $S_5$. L'enumerazione delle costanti ci dice che per una qualunque di queste superficie dovrà sempre passare (almeno) un fascio di quadriche; ma questa stessa proprietà la ritroveremo anche (nei casi più importanti) per altra via.

Esistono nello spazio $S_5$ rigate ellittiche di sesto ordine (che non sono coni) (**), e queste si vede facilmente che rappresentano sistemi di rette (3, 3) costituiti da una serie $\infty^1$ di fasci di raggi coi centri su di una cubica piana generale e coi piani tutti tangenti a un cono generale di terza classe. Su queste congruenze però non intendiamo fermarci.

Veniamo piuttosto alle superficie non rigate. Queste, quando non ab-

---

(*) Dalla generazione di questa congruenza con tre fasci proiettivi di raggi (ossia con tre fasci proiettivi di complessi lineari, tutti speciali) risulta immediatamente ch'essa dovrà stare in *tre complessi tetraedrali;* proprietà che è data in sostanza anche dal Roccella (per quanto non esplicitamente). Lo stesso A. accenna anche alla rappresentazione di questa congruenza (sopra uno dei tre nuovi piani singolari) mediante quartiche di genere 2; ma riscontra la presenza di soli quattro (anzichè di sei) punti fondamentali semplici.

(**) Per le proprietà delle rigate ellittiche e, più generalmente, algebriche di cui qui e in seguito avremo a valerci, rimandiamo ai lavori del Segre (Atti di Torino, vol. 21 e Math. Ann., Bd. 34).

biano infiniti punti doppi, appartengono anch'esse allo spazio $S_5$, sono razionali (*), e si possono ottenere come proiezioni di superficie (normali) $F^6$ di $S_6$ da punti rispettivamente esterni a queste. La superficie normale $F^6$ contiene tre sistemi razionali $\infty^1$ di coniche, i cui piani formano altrettante $M_3^4$; e se noi vogliamo che la $F^6$ di $S_5$ non venga ad avere una retta doppia, dovremo prendere il centro di proiezione fuori anche di queste tre varietà.

Supposto pertanto di aver così scelto quel centro, immaginiamo di proiettare da esso la superficie $F^6$ e una qualunque delle tre $M_3^4$ che la contengono. La proiezione di quest'ultima varietà (e sarà ancora una $M_3^4$) verrà ad avere una retta doppia, luogo dei punti per cui passano due suoi piani (**), e starà sopra una (sola) quadrica, e precisamente sopra un cono di seconda specie con quella stessa retta per asse. La superficie $F^6$, quando abbia a rappresentare un sistema di rette, si potrà dunque certo ottenere come intersezione di quella stessa $M_3^4$ di $S_5$ con una nuova quadrica $Q$ (che possiamo anche supporre non degenere); e l'intersezione residua di queste due varietà sarà costituita da una coppia di piani. Viceversa, l'intersezione di una $M_3^4$ di $S_5$ (ottenuta nel modo indicato poc'anzi) con una quadrica condotta per due suoi piani è appunto, in generale, una superficie di sesto ordine a sezioni ellittiche (e non rigata). E qui possono presentarsi due casi:

*a*) Quei due piani della $M_3^4$ appartengono rispettivamente, nella quadrica, ai due diversi sistemi;

*b*) Gli stessi due piani appartengono a un medesimo sistema.

Nel primo caso i due piani non potranno incontrarsi, e taglieranno perciò la retta doppia di $M_3^4$ in punti diversi. Questi due punti staranno entrambi sulla superficie $F^6$ e saranno (in generale) semplici per essa; però le coniche di questa superficie giacenti rispettivamente in quei due piani non passeranno per quei punti (gli stessi piani segheranno cioè $F$ in una conica e in un punto ancora fuori di questa).

Nel secondo caso invece i due piani in discorso avranno un punto a comune, che starà naturalmente sulla retta doppia di $M_3^4$. Questo stesso punto

(*) Esse ammettono infatti delle trisecanti (avendone *due* ogni loro sezione generica); e da una qualunque di queste si proiettano in superficie cubiche di $S_3$ (che non sono coni).

(**) Considerando infatti la $M_3^4$ normale come generata da due forme collineari aventi a sostegno rispettivamente due suoi piani, si vede che per un punto arbitrario dello spazio $S_6$ passano sempre due $S_4$ omologhi in quelle forme, e che l'intersezione di questi è un piano incontrante la $M_3^4$ in una conica. Dunque ecc.

non starà più (in generale) sulla superficie $F$, ma quest'ultima avrà invece un punto doppio nella seconda intersezione di quella retta (doppia) colla quadrica $Q$ (*).

Per le tre varietà $M_3^4$ su cui sta una data superficie $F^6$ dovrà sempre presentarsi, e si capisce, lo stesso fra questi due casi. Nel caso *a*) la congruenza rappresentata da $F^6$ sarà (3, 3); nel caso *b*) invece sarà (2, 4) o (4, 2) (**). Le congruenze (3, 3) saranno dunque in generale affatto prive di rette doppie (o ne avranno infinite); le congruenze (2, 4) ne avranno sempre una (e in generale una sola).

**14.** Nel caso *a*) la quadrica $Q$, e più generalmente anzi ogni quadrica passante per la superficie $F^6$, dovrà contenere i piani di sei coniche di quest'ultima, due per sistema (e precisamente quei piani che la segano in un punto ancora fuori della relativa conica). Oltre a questi sei piani si trova poi che quelle quadriche dovranno tutte contenerne altri due, determinati dalla condizione di segare in rette rispettivamente due terne di quella sestupla; e da questo si deduce subito che le quadriche passanti per la data $F^6$ dovranno formare un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)]. Dunque:

*Esistono congruenze* (3, 3) *di genere uno non aventi infinite rette doppie; queste sono anzi, in generale, affatto prive di rette doppie e,* quando si escluda il caso corrispondente alla rigata ellittica, *sono tutte rappresentabili sul piano e contenute in un complesso tetraedrale.* Queste stesse congruenze contengono *sei* fasci di raggi, *tre* coni quadrici e altrettanti inviluppi piani di seconda classe. Le loro rette danno luogo a tre diversi sistemi $\infty^1$ e razionali di rigate quadriche, il cui inviluppo (comune) è la superficie focale della congruenza

---

(*) Questo ragionamento suppone implicitamente che i due piani di $M_3^4$ passanti per uno stesso punto della retta doppia variino tutti due al variare di questo punto, che cioè la retta stessa non sia, come potrebbe anche essere, luogo delle intersezioni di un piano fisso con tutti i rimanenti. Questo caso (eccezionale) si presenterebbe quando quella conica direttrice della $M_3^4$ il cui piano passa pel centro di proiezione si spezzasse in una direttrice rettilinea e in un'altra retta contenuta in uno degli infiniti piani della $M_3^4$ stessa. Si avrebbero allora delle congruenze particolari, il cui studio non presenterebbe difficoltà, ma non offrirebbe nemmeno un interesse speciale. Ci dispensiamo quindi dall'occuparcene, come pure non ci occuperemo di quell'altro caso particolarissimo che si avrebbe quando la quadrica $Q$ contenesse la retta doppia della $M_3^4$.

(**) Infatti un piano qualunque della $M_4^2$ assunta come quadrica delle rette sega la $M_3^4$ (quando non abbia con essa tutta una linea a comune) in *quattro* punti. Di questi nel primo caso sempre *tre* e *tre soli* stanno su $F^6$; nel secondo caso ne stanno su questa superficie *due* o *quattro* secondo che quest'ultimo piano appartiene o no (nella quadrica) al sistema dei primi due.

(di sesto ordine e sesta classe) con *nove* punti e altrettanti piani singolari, ecc. ecc.

Questa congruenza (3, 3) è quella stessa ottenuta dai sig.[i] Segre e Castelnuovo come proiezione di una varietà cubica di $S_4$ con nove punti doppi (*). Essa è anche *Cremoniana;* i piani di due qualunque dei tre inviluppi quadrici sono da essa riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine, nella quale i vertici dei tre coni danno rispettivamente i due punti fondamentali doppi e un punto fondamentale semplice comune ai due piani; in ciascuno di questi ultimi poi un secondo punto fondamentale semplice è infinitamente vicino al primo. Questa stessa congruenza, appunto perchè Cremoniana, si può anche considerare come caso particolare della congruenza (3, 3) di Hirst (cfr. anche Castelnuovo, loc. cit. (2.ª Mem.) nota al n.° 28) (**).

**15.** Due parole ancora sulle congruenze (2, 4) alle quali, come abbiamo veduto, ci conduce il caso *b*). La superficie $F^6$ di $S^5$ ha in questo caso un punto doppio (***) e contiene due cubiche piane razionali passanti doppiamente per questo stesso punto; coi piani di queste due curve essa costituisce la varietà base di un sistema lineare $\infty^2$ di quadriche (le sole che passino per $F^6$) non tutte degeneri. (Vi è però in questo sistema un fascio di coni col vertice comune e nel punto doppio di quella superficie). Una qualunque (non degenere) di queste quadriche contiene i piani di *sei* coniche di $F^6$, due per

(*) E da quanto precede risulta adesso che questa congruenza è anche la più generale fra quelle (3, 3) di genere uno rappresentabili sul piano.

(**) Un caso particolare (e molto notevole) ci è offerto dalla congruenza (3, 3) di genere uno quando essa contiene un fascio di rette doppie (e la superficie che la rappresenta è perciò proiezione della $F^6$ normale da un punto del piano di una sua conica). Si vede facilmente che nel fascio di rette doppie vengono allora a coincidere uno dei tre coni e uno dei tre inviluppi della congruenza primitiva; rimangono perciò distinti due coni e due inviluppi, i cui vertici e piani appartengono rispettivamente al piano e al centro del fascio di rette doppie; di più i vertici dei due coni stanno rispettivamente nei piani dei due inviluppi. *Questa congruenza* (3, 3) *è contenuta in un complesso quadratico di caratteristica* [(22) (11)]; di questo complesso fanno parte cioè tre punti e tre piani, fra i quali però il centro e il piano del fascio doppio devono entrambi contarsi due volte (è quel caso particolare del complesso tetraedrale in cui due vertici, e quindi due facce, del tetraedro fondamentale sono venute a coincidere). Questa stessa congruenza (3, 3) si può anche considerare come caso particolare di quella studiata da Hirst nella Nota cit. (Proc. ecc., vol. 16) ai n.[i] 15 e seg., e corrisponderebbe precisamente al caso in cui i punti (fondamentali ed uniti) $C$ e $D$ sono venuti a coincidere. Considerata la cosa in questo modo, sono proprio questi due i vertici del tetraedro fondamentale che ora coincidono.

(***) La $F^6$ normale si sarà dunque dovuta proiettare da un punto di *una* sua corda.

sistema; questi sei piani e quelli delle due cubiche si incontrano a due a due in un punto e appartengono perciò, nella quadrica, a uno stesso sistema. Da ciò seguono tosto le diverse proprietà, d'altronde notissime, della congruenza (2, 4):

*La congruenza* (2, 4) *priva di linea focale ha sempre una retta doppia, e contiene due coni cubici razionali con questa stessa retta per generatrice doppia; più sei coni quadrici, e altrettanti fasci di raggi.* Le sue rette possono raggrupparsi in *tre* modi diversi in serie razionali $\infty^1$ di rigate quadriche, contenenti ciascuna due coni e due coppie di fasci e aventi *otto* punti basi (che formano gruppo autoassociato) e due piani tangenti fissi.

La superficie focale della congruenza è di quarto ordine e ottava classe, con 14 punti e 6 piani singolari, ecc. ecc.

*Per la congruenza* (2, 4) *si può condurre una semplice infinità di complessi quadratici, della quale fanno parte anche tre complessi tetraedrali* (*); i vertici dei due coni cubici sono tali per tutti tre i tetraedri fondamentali; le altre coppie di vertici sono date dai sei coni quadrici della congruenza.

## § 5. Sistemi $(m, n)$ per cui $m + n = 7$.

**16.** Supponendo ora $m + n = 7$, troveremo congruenze del tipo (3, 4) e (2, 5), o rispettivamente (4, 3) e (5, 2). Per queste sarà sempre $p \leq 6$; e anzi, se escludiamo quelle contenute in un complesso lineare, complesso che in questo caso è necessariamente speciale (**), potremo anche ritenere $p \leq 3$. Daremo dunque a $p$ successivamente i valori 3, 2, 1, e esamineremo le superficie di settimo ordine appartenenti a $S_5$ colle sezioni di questi varii generi.

E sia anzitutto $p = 3$. Per ogni superficie di settimo ordine dello spazio $S_5$ e colle sezioni di genere tre passano (come ci dice l'enumerazione delle co-

(*) Questa proprietà (anche già nota) segue per noi dal fatto che le quadriche passanti per $F^6$ e per i piani di due sue coniche dello stesso sistema i quali si incontrino formano un fascio che (se non è composto tutto di coni) ha la caratteristica [(11) (11) (11)]. E di questi fasci per una quadrica non degenere del sistema $\infty^2$ se ne possono condurre appunto *tre* (corrispondentemente ai *tre* sistemi di coniche di $F^6$).

(**) Fra le congruenze $(m, 7 - m)$ di genere $p > 0$ contenute in un complesso lineare speciale notiamo quelle (3, 4) e (4, 3) di genere 6 e quelle (2, 5) e (5, 2) di genere 2 prive di rette doppie; altre ancora discendono da queste come casi particolari per l'acquisto di infinite rette doppie.

stanti) almeno $\infty^2$ quadriche, e di più è anche certo che non possono passarne. La varietà base di questa rete, se quelle quadriche non sono tutte degeneri, sarà costituita dalla stessa superficie $F^7$ insieme a un certo piano $\pi$ che la segherà in una curva $\gamma$ di terz'ordine (*), come risulta immediatamente dal fatto che ogni $C_3^7$ di $S_4$ ammette una trisecante unica (che costituisce con essa la curva base di una rete di quadriche). Viceversa, l'intersezione (residua) generale di tre quadriche di $S_5$ con un piano a comune è appunto una superficie di settimo ordine colle sezioni di genere 3, e questa superficie è incontrata da quel piano secondo una cubica (in generale ellittica) luogo dei punti in cui le tre quadriche (e quindi tutte quelle della rete da esse individuata) hanno uno stesso $S_3$ tangente. Il sistema di rette rappresentato da questa superficie è sempre (3, 4) o (4, 3); la superficie stessa è segata in tre punti dai piani del sistema di $\pi$.

Possiamo aggiungere che dal piano della sua cubica la superficie $F^7$ si proietta univocamente sopra un altro piano qualsiasi non incidente al primo; le sue sezioni spaziali danno luogo a quartiche (di genere 3) con 7 intersezioni variabili, e passanti perciò per 9 punti fissi, immagini di altrettante rette di $F$ medesima (incidenti a $\pi$ e quindi a $\gamma$); la cubica di questi nove punti è immagine della stessa curva $\gamma$ (**). Quindi:

*Esistono congruenze* $(m, 7 - m)$ *di genere tre non contenute in complessi lineari (speciali); esse sono tutte di terzo ordine (o terza classe) e si possono ottenere come intersezioni di due complessi quadratici aventi una stella (o un piano rigato) a comune;* il centro della stella (o il piano di rette) è vertice (sostegno) di un cono (inviluppo) cubico generale di rette della congruenza. *Questa è sempre rappresentabile sul piano* (col sistema delle quartiche passanti per nove punti fissi); e contiene in generale *nove* fasci di raggi, ciascuno dei quali ha un raggio a comune col cono o inviluppo cubico. La

(*) Questa curva di terz'ordine si spezzerebbe in tre rette concorrenti nel caso (che non fa per noi) del cono di genere 3.

(**) Questa superficie di settimo ordine a sezioni di genere *tre* è quella che il Castelnuovo (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre;* Atti di Torino, vol. 25) chiama di *prima specie* (n.° 4). La superficie di *seconda specie* (n.° 10) non rappresenta invece alcun sistema di rette, perchè contiene una serie $\infty^1$ di cubiche ellittiche i cui piani formano una $M_3^3$ contenuta a sua volta in soli $\infty^2$ coni quadrici (e queste sono anche le sole quadriche passanti per quella superficie). Un fatto analogo si presenta anche per la $F^7$ a sezioni iperellittiche (la quale contiene una serie $\infty^1$ di coniche).

sua superficie focale è di decimo ordine e dodicesima classe (o viceversa) e ha 10 punti e 9 piani (o, inversamente, 10 piani e 9 punti) singolari, ecc. ecc.

**17**. Sia ora $p=2$. Una superficie di settimo ordine appartenente a $S_5$ e colle sezioni di genere due può essere rigata, ma questo caso non ci conduce ad alcuna congruenza di rette (*); se invece non è rigata (e non ha una linea doppia) ammette delle trisecanti (avendone la sua sezione generica), e si può quindi proiettare in una $F^4$ (non rigata, ossia non conica) di $S_3$. È dunque razionale, e si può ottenere a sua volta come proiezione di una $F^7$ (normale) di $S_6$.

La $F^7$ normale di $S_6$ a sezioni di genere due contiene una serie razionale $\infty^1$ di coniche, i cui piani formano una $M_3{}^4$ normale per lo stesso suo spazio. Volendo proiettare quella superficie, come noi qui intendiamo di fare, da un punto esterno anche a questa $M_3{}^4$, si conclude facilmente (cfr. anche n.° 13) che la $F^7$ ottenuta in $S_5$, quando abbia a rappresentare un sistema di rette, dovrà essere intersezione della $M_3{}^4$ proiezione (dallo stesso punto) di quella varietà normale con una quadrica (non degenere) condotta per uno dei suoi piani. Viceversa, quest'intersezione è anche, in generale, una superficie di settimo ordine colle sezioni di genere due. Ricordiamo pure che questa $M_3{}^4$ di $S_5$ ha una retta doppia, luogo dei punti per cui passano due suoi piani, e sta in un cono quadrico di seconda specie con questa stessa retta per asse; la superficie $F^7$ sarà perciò contenuta in tutto un fascio di quadriche (del quale farà parte quel cono). La $M_3{}^4$ potrà poi presentare tre casi distinti, secondo che la retta doppia è intersezione di due suoi piani, oppure luogo delle intersezioni di un piano fisso con ciascuno dei rimanenti, o infine luogo dei punti comuni a coppie di piani variabili (secondo cioè che dall'uno all'altro dei suoi punti non varia nessuno dei due piani, oppure uno solo, o tutti due) (**). In tutti tre questi casi però la superficie $F^7$ viene ad avere un punto doppio (***), e

(*) Una rigata di settimo ordine e genere 2 appartenente a $S_5$ o è un cono (normale per $S_6$) oppure ha una direttrice rettilinea doppia. In questo secondo caso è essa stessa normale, e i piani delle coppie di generatrici incontrantisi sopra questa direttrice formano una $M_3{}^3$ comune a tutte le quadriche (e non vi sono che coni di 2.ª specie) passanti per essa rigata.

(**) Il primo di questi tre casi può presentarsi soltanto quando la $M_3{}^4$ è un cono; allora anche tutte le coniche di $F$ passano per il vertice di questo cono, e si cade nella nota rappresentazione con sestiche piane aventi a comune un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo. Questa particolare $M_3{}^4$ non poteva invece presentarsi nel caso della $F^6$ (generale) a sezioni ellittiche (n.° 13).

(***) Sarà quindi proiezione della $F^7$ normale di $S_6$ da un punto di una sua corda.

la congruenza da essa rappresentata è sempre di terz' ordine (o terza classe). Concludiamo dunque:

*Esistono congruenze* $(m, 7-m)$ *di genere due (non contenute in complessi lineari speciali), e anche queste sono tutte del tipo* (3, 4) *o* (4, 3) *e rappresentabili sul piano; ciascuna di esse ha una retta doppia, ed è contenuta in un complesso quadratico (in generale unico) generabile con due fasci proiettivi di complessi lineari.* Le due congruenze (3, 4) e (4, 3) sono l'una reciproca dell'altra; contengono entrambe una serie ragionale $\infty^1$ di rigate quadriche, della quale fanno parte cinque coppie di fasci di raggi e poi ancora rispettivamente un cono quadrico o un inviluppo piano di seconda classe. La superficie focale è di ottavo ordine e decima classe (o viceversa); ecc.

Restringendo ora le nostre considerazioni al caso di una superficie $F^7$ con una conica per direttrice minima (*), possiamo aggiungere:

*Per il vertice del cono (nel piano dell'inviluppo) passa (giace) ancora un raggio della congruenza esterno a questo cono (inviluppo).* Oltre alle $\infty^1$ rigate quadriche già ricordate, la congruenza ne contiene in generale altre 16; essa contiene anche 16 serie razionali $\infty^1$ di rigate cubiche, che corrispondono in certo qual modo a queste 16 quadriche; ecc. ecc. (**).

**18.** È notevole il caso in cui le intersezioni della superficie normale $F^7$ con quella sua corda da un punto della quale essa si è proiettata stanno in pari tempo su due diverse sue direttrici cubiche (cfr. la nota in fine al n.° 17). Allora la $F^7$ di $S_5$ viene a contenere due cubiche piane razionali collo stesso suo punto doppio, e i piani di queste due curve staranno anche, naturalmente, sopra ogni quadrica passante per essa. Altrettanto avrà luogo dei piani di quelle due direttrici coniche (ben determinate) che segano rispettivamente le due cubiche in una coppia di punti, e con poche altre semplicissime considerazioni si può tosto concludere che le quadriche passanti per $F^7$ formano in questo caso un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)] (la cui $M_3^4$ base contiene appunto 8 piani: quei primi quattro, e altri quattro, pure ben determinati). Dunque:

---

(*) È rappresentata quindi da un sistema di quartiche piane con un punto doppio e cinque punti semplici basi.

(**) La superficie $F^7$ di cui ora più particolarmente ci occupiamo contiene appunto, in generale, 16 direttrici coniche e altrettanti fasci (sistemi lineari $\infty^1$) di direttrici cubiche. Le cubiche di ciascun fascio tagliano sempre in due punti una determinata fra le 16 coniche, ne tagliano altre dieci in un punto solo, e non incontrano affatto le rimanenti. Esse incontrano poi in due punti le cubiche di altri cinque fasci, e in un punto solo tutte le rimanenti.

*Esiste una congruenza ad es.* (4, 3) (*) *di genere due la quale (pur continuando a godere delle proprietà già enunciate) contiene ancora due coni quadrici e due inviluppi piani di terza classe.* I piani $\alpha$ e $\beta$ dei due inviluppi contengono entrambi la retta doppia della congruenza, la quale è anzi doppia per ciascuno di questi ultimi; le curve inviluppate risultano perciò di quarto ordine (e con tre cuspidi). I vertici $A$ e $B$ dei due coni quadrici stanno rispettivamente nei piani $\alpha$ e $\beta$ dei due inviluppi, e giacciono poi entrambi nel piano $\delta$ dell'inviluppo quadrico (che esiste anche nel caso generale); però quest'inviluppo non ha a comune che una sola retta con ciascuno dei due coni (**). Ciascuno dei piani $\alpha$ e $\beta$ contiene i centri di quattro fra i dieci fasci della congruenza, e vi è poi un nono fascio ($C$) il cui centro sta sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$. Il decimo fascio (quello che con quest'ultimo forma una rigata quadrica degenere della serie $\infty^1$) ha il centro fuori dell'uno e dell'altro di quei due piani, ma il suo piano passa invece per i vertici dei due coni quadrici (è dunque il piano $ABC$); ecc. ecc.

*Questa congruenza* (4, 3) *è contenuta in un complesso tetraedrale,* il cui tetraedro fondamentale ha per facce i piani $\alpha$, $\beta$, $\delta$ e $ABC$ e per vertici rispettivamente opposti i punti $B$, $A$, $C$, $\overline{\alpha\beta\delta}$. Essa è anche *Cremoniana,* e stabilisce fra i piani $\alpha$ e $\beta$ una corrispondenza birazionale del terzo ordine nella quale il punto $C$ è (solo) punto unito. È dunque un caso particolare della congruenza (5, 3) di Hirst (loc. cit. Proc. ecc., vol. 16), e precisamente un caso intermedio fra quest'ultima e la congruenza (3, 3) (che si ottiene invece quando sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$ vi sono *due* punti uniti).

**19.** Facciamo infine $p=1$; e, sorvolando sul caso, molto meno interessante, di una congruenza $(m, 7-m)$ rappresentata da una rigata ellittica, veniamo a dire qualcosa su quegli altri sistemi di rette che si rappresentano con superficie (di settimo ordine, a sezioni ellitiche) non rigate e razionali.

Queste superficie sono normali per lo spazio $S_7$, e contengono due serie razionali $\infty^1$ di coniche i cui piani formano altrettante $M_3^5$, normali pure per $S_7$. Volendo che la $F^7$ di $S_5$ non abbia infiniti punti doppi, dovremo proiet-

(*) Preferiamo — e la ragione ne apparirà subito — enunciare le proprietà di questa congruenza, anzichè quelle della sua duale (3, 4).

(**) Ciascuno dei fasci $A(\delta)$ e $B(\delta)$ contiene *tre* rette della congruenza; di queste una è sempre comune al cono ($A$ o $B$) e all'inviluppo ($\delta$), ed è in tutti due i casi la $AB$; un'altra appartiene al solo cono, e la terza (che è rispettivamente l'intersezione $\overline{\alpha\delta}$ o $\overline{\beta\delta}$) appartiene al solo inviluppo.

tare la $F^7$ normale da una retta non incidente ad alcuna di quelle $M_3{}^5$. Ma per una retta arbitraria di $S_7$ non incidente a una varietà così fatta passa sempre un $S_5$ incontrante la varietà stessa in una rigata $R^4$, e da quella retta questa rigata si proietta in altra, appartenente a $S_3$, e avente, nel caso più generale, una cubica doppia incontrata da ogni generatrice in due punti; ciascuna delle nostre $M_3{}^5$ (di $S_5$) avrà dunque a sua volta una cubica doppia, tagliata da ogni suo piano in due punti, e luogo dei punti per cui passano due suoi piani (*); lo spazio $S_3$ di questa cubica la segherà in una rigata quartica (**). D'altra parte la $F^7$ che dovrebbe rappresentare la nostra congruenza deve anche essere contenuta in (almeno) una quadrica non degenere; e siccome di varietà così fatte per la $M_3{}^5$ non ne passano (***), così quella stessa superficie si dovrà poter segare da una qualunque delle due $M_3{}^5$ con una certa qnadrica $Q$. L'intersezione residua sarà naturalmente costituita da una terna di piani. Viceversa, l'intersezione (residua) di una $M_3{}^5$ ($\infty^1$ razionale di piani) di $S_5$ con una quadrica condotta per tre suoi piani è appunto, in generale, una superficie di settimo ordine a sezioni ellittiche (non rigata e razionale). E anche qui possono presentarsi due casi:

*a*) Dei tre piani in discorso, due appartengono nella quadrica $Q$ a uno stesso sistema e il terzo appartiene invece al sistema opposto;

*b*) I tre piani appartengono tutti allo stesso sistema.

È quasi superfluo l'aggiungere che nelle due $M_3{}^5$ su cui sta una data $F^7$ dovrà sempre presentarsi lo stesso fra questi due casi; ed è pur chiaro che questi stessi casi corrisponderanno rispettivamente alle congruenze (3, 4) e (4, 3), oppure (2, 5) e (5, 2).

---

(*) A questo stesso risultato si potrebbe anche giungere osservando che un $S_4$ condotto (nel modo più generale) per un piano qualunque della $M_3{}^5$ di $S_5$ deve segare ancora quest'ultima varietà in una rigata $R^4$ incontrata dal primo piano in una generatrice e in due punti ancora fuori di questa; questi due punti saranno certo doppi per la $M_3{}^5$, e di più, nello stesso $S_4$, vi sarà un terzo punto doppio per la stessa varietà; quello che è tale per la rigata $R^4$. La $M_3{}^5$ ha dunque due punti doppi in ogni suo piano, e in ogni $S_4$ passante per un tal piano ne ha ancora un terzo (e in generale non altri); ha dunque in generale una cubica doppia, incontrata da ogni suo piano in due punti.

Come conseguenza di questo fatto notiamo che una rigata razionale di quinto ordine di $S_4$ ha in generale tre punti doppi.

(**) Noi ci limitiamo qui a considerare il caso della cubica doppia irriduttibile; ma, se questa anche si spezzasse, si potrebbe sempre fare uno studio analogo, e senza incontrare difficoltà di sorta. Sorvoliamo quindi (tranne un'osservazione alla fine del n.° 21) anche sul caso in cui la cubica doppia sia sostituita da una retta tripla.

(***) Infatti ogni quadrica passante eventualmente per questa varietà dovrebbe contenere tutto l'$S_3$ della sua rigata quartica, e sarebbe quindi un cono (almeno di 2.ª specie).

**20.** Cominciamo col caso *a*). Se la quadrica $Q$ non contiene la cubica doppia di una qualunque delle due $M_3^5$ (*), essa dovrà incontrarla in *sei* punti; e di questi si vede facilmente che *uno* (ed uno solo) sarà doppio per la superficie $F^7$ (**) (***). Segue da ciò che questa superficie dovrà contenere nna cubica piana razionale $\gamma$ collo stesso suo punto doppio; e, di più, siccome la congruenza da essa rappresentata deve (e lo sappiamo già) risultare (3, 4) o (4, 3), e non (2, 5) o (5, 2), dovrà il piano di quella cubica contenere, oltre la curva stessa, un altro punto di $F$. (Infatti un $S_3$ qualunque condotto per questo piano sega in generale la superficie $F$, oltre che in $\gamma$, in altri due punti; e se questi fossero tutti due esterni a quel primo piano, dovrebbero stare su di uno stesso secondo piano della quadrica $Q$, il quale avrebbe perciò comuni con $F$ *cinque* punti (e non infiniti); cosa che dobbiamo escludere) (****).

La quadrica $Q$ con cui si è segata la superficie $F$ (e così pure ogni altra quadrica passante eventualmente per quest' ultima) conterrà certo il piano della cubica $\gamma$ e quelli di *sei* coniche della stessa superficie, *tre* per sistema. Se queste coniche le chiamiamo ad es. $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ e $\nu_0$, $\nu_1$, $\nu_2$, si può riconoscere facilmente che i piani di quattro fra esse, ad es. $\mu_1$, $\mu_2$, $\nu_1$. $\nu_2$, e quello della cubica $\gamma$ si segano a due a due in un punto unico, e che i piani di $\mu_0$ e $\nu_0$ segano in rette rispettivamente le terne $(\gamma)(\nu_1)(\nu_2)$ e $(\gamma)(\mu_1)(\mu_2)$ (*****). Queste sei coniche sono anzi le stesse per *ogni* quadrica (se più ve ne sono) passante per $F$. D'altra parte quei cinque piani che si segano a due a due in un punto *individuano* una quadrica (e non degenere) che li contiene e che passa di conseguenza anche per gli altri due (quelli delle coniche $\mu_0$ e $\nu_0$) e per la superficie $F$. Dunque:

(*) Se la contenesse, questa curva risulterebbe doppia anche per la superficie $F^7$.

(**) Infatti i tre piani comuni alla $M_3^5$ e alla quadrica $Q$ segano la cubica in due punti ciascuno; i due piani dello stesso sistema, dovendo incontrarsi (e non potendosi incontrare che sulla cubica) assorbono solo *tre* fra le *sei* intersezioni (due delle quali sono però ancora punti semplici di $F$); altre *due* intersezioni (che sono del pari punti semplici di $F$) le contiene il terzo piano; la sesta (e questa sola) sarà necessariamente un punto doppio di $F$. Per quest'ultima intersezione passano infatti sulla superficie due coniche di uno stesso sistema (e anzi due coniche di ciascuno dei due sistemi).

(***) E le due $M_3^5$ conducono a trovare per $F^7$ lo stesso punto doppio, perchè, inversamente, un punto doppio per questa superficie è tale anche per quelle due varietà.

(****) Per avere dunque una $F^7$ di $S_5$ che rappresenti una congruenza (3, 4) o (4, 3) bisogna proiettare la $F^7$ normale da una retta contenuta nell' $S_4$ determinato da una sua cubica e da un suo punto esterno a questa (ma non contenuta nell' $S_3$ di quella cubica). Non è difficile accorgersi che questa condizione è anche sufficiente.

(*****) Con $(\gamma)$, $(\nu_1)$,... indichiamo qui (per brevità) i piani che contengono rispettivamente le varie curve $\gamma$, $\nu_1$,...

*Esistono congruenze* (3, 4) *o* (4, 3) *di genere uno non contenute in complessi lineari speciali e rappresentabili sul piano; esse hanno una retta doppia, e non stanno in generale in alcun complesso quadratico.* La congruenza (3, 4) (la (4, 3) ha le proprietà duali) contiene un cono cubico razionale la cui generatrice doppia è la stessa sua retta doppia; pel vertice $C$ del cono passa anche un raggio di essa esterno al cono medesimo. La congruenza contiene ancora *quattro* coni quadrici e *due* inviluppi di seconda classe; dal vertice di ogni cono esce ancora, fuori di questo, un altro raggio della congruenza, e nel piano di ciascun inviluppo stanno altri due raggi della stessa. Di fasci di raggi la congruenza ne contiene *tre,* uno dei quali ha un raggio a comune con ciascuno degli altri due e col cono cubico. La superficie focale di questa congruenza è di sesto ordine e ottava classe, con 8 punti e 5 piani singolari, ecc. ecc.

La congruenza in discorso è anch' essa *Cremoniana* e stabilisce fra i piani dei due inviluppi una corrispondenza birazionale del quarto ordine nella quale il punto $C$ è fondamentale doppio comune ai due piani, e in ciascuno di questi due punti fondamentali semplici sono infinitamente vicini a $C$ stesso. Questa congruenza è quella appunto ottenuta dai sig.[i] Segre e Castelnuovo come proiezione di una varietà cubica di $S_4$ con *otto* punti doppi; congruenza che, come ora vediamo, è la più generale fra quelle (3, 4) di genere uno rappresentabili sul piano.

**21.** Nel caso $b$) i tre piani che con $F^7$ costituiscono l'intersezione della quadrica $Q$ con una qualunque delle due $M_3^5$ devono a due a due incontrarsi (*); e da questo si trae facilmente che la superficie $F^7$ dovrà avere tre punti doppi, e che il piano di questi dovrà segarla in una quartica razionale passante doppiamente per gli stessi tre punti (**). Questi punti sono anche doppi per altrettante cubiche piane di $F$ medesima incontrantisi a due a due

(*) E tre piani così disposti si possono trovare solo quando la rigata $R^4$ di $S_3$ contenuta nella $M_3{}^5$ e avente la stessa sua cubica doppia ammette una direttrice rettilinea. Allora però di queste terne ne esistono infinite.

(**) Infatti, se la $F^7$ di $S_5$ ha tre punti doppi, la $F^7$ normale si sarà dovuta proiettare da una retta incidente a tre (e tre sole) sue corde; e l' $S_4$ di queste corde, contenendo già *sei* punti di essa superficie (di cui cinque qualunque indipendenti), non potrà segarla che in una quartica razionale. Viceversa, la condizione che la retta asse di proiezione stia nell' $S_4$ di una quartica (razionale) della superficie normale $F^7$ è anche sufficiente perchè la superficie proiezione di quest' ultima in $S_5$ rappresenti una congruenza (2, 5) o (5, 2), purchè soltanto (cfr. la nota seg.) le tre corde della quartica (e della superficie) incidenti a quella retta non stiano con essa in un piano (la retta stessa non stia cioè in un piano trisecante di quella curva e superficie).

in un punto. Ogni quadrica passante per $F$ deve contenere i piani di queste quattro curve, e quindi anche gli altri quattro determinati dal segare in rette quei primi a tre a tre; viceversa, per questi otto piani passano $\infty^2$ quadriche, e fra queste ve ne sono $\infty^1$ che contengono tutta la superficie $F$. Si ritrovano così le note congruenze (2, 5) e (5, 2), le quali *hanno tre rette doppie e sono contenute ciascuna in un complesso tetraedrale;* si vede ancora che *la congruenza* (2, 5) ad es. *contiene un cono quartico e tre coni cubici, tutti razionali (i cui vertici determinano appunto il tetraedro fondamentale del complesso), più sei coni quadrici e tre fasci di raggi,* ecc. ecc. (*).

## § 6. Sistemi $(m, n)$ per cui $m + n = 8$.

**22.** Sia ora $m + n = 8$; avremo congruenze del tipo $(m, 8 - m)$ rappresentate da superficie di ottavo ordine e colle sezioni, quindi, di genere $p \leq 9$. La congruenza sarà contenuta in un complesso lineare ogni qual volta la superficie $F^8$ apparterrà allo spazio $S_4$; ma è facile riconoscere che, se il complesso non è speciale (e se la congruenza non ha infinite rette doppie) questo fatto potrà presentarsi soltanto per la congruenza (4, 4) di genere 9 che è l'intersezione generale dello stesso complesso lineare con un complesso di quarto grado (**). Ogni altra congruenza $(m, 8 - m)$ contenuta in un complesso lineare e non avente infinite rette doppie deve perciò avere le sue rette tutte incidenti a una retta fissa (asse del complesso lineare, in questo caso speciale); si hanno così varii casi semplicissimi (***) sui quali crediamo inutile insistere.

(*) I tre punti doppi della superficie $F$ potrebbero venire a coincidere in un solo punto triplo; ma allora le $\infty^1$ quadriche passanti per quella sarebbero tutte coni col vertice in questo punto, e la superficie stessa non rappresenterebbe più una congruenza di rette. Questo caso si presenterebbe se le due $M_3^5$ di $S_5$ avessero una retta tripla, nè ciò deve far meraviglia, perchè la quadrica $Q$ dovrebbe in tal caso contenere tre piani di una qualunque di esse uscenti da uno stesso punto; e siccome questi piani non starebbero in generale in uno stesso $S_4$, così quella quadrica sarebbe *necessariamente* degenere.

(**) Vi sono bensì delle altre congruenze (4, 4) contenute in un complesso lineare non speciale, per es. quelle *Cremoniane* studiate da Hirst (anche per un ordine e una classe qualsiasi fra loro uguali) nella Nota: *On Cremonian Congruences* (Proc., ecc., vol. 14); ma queste hanno tutte infinite rette doppie (o anche multiple di ordine superiore).

(***) Congruenza (3, 5) o (5, 3) di genere 8; congruenza (2, 6) o (6, 2) di genere 5; (congruenza (1, 7) o (7, 1) di genere zero).

Veniamo invece alle congruenze ($m$, $8 - m$) non contenute in complessi lineari, e rappresentate perciò da superficie di ottavo ordine appartenenti a $S_5$. Per queste congruenze si avrà $p \leqq 5$; cominciamo quindi dallo studio del caso estremo $p = 5$.

**23.** La superficie $F^8$ di $S_5$ a sezioni di genere 5 è sempre contenuta, come ci dice l'enumerazione delle costanti, in (almeno) $\infty^2$ quadriche; essa è dunque l'intersezione di tre quadriche di $S_5$. Viceversa, quest'intersezione è appunto, nel caso più generale, una superficie così fatta. Il sistema di rette rappresentato da questa stessa superficie (*) è (4, 4), perchè un piano qualunque di una di quelle quadriche è segato in generale dalle rimanenti secondo coniche di un fascio, e quindi in curve passanti per *quattro* punti fissi (che stanno appunto su $F^8$). Dunque:

*Esistono congruenze* ($m$, $8 - m$) *di genere cinque e non contenute in complessi lineari; esse sono tutte di quarto ordine e quarta classe, e si possono ottenere come intersezioni di due complessi quadratici di rette* (**). Queste congruenze furono già chiamate anche *biquadratiche;* hanno superficie focale di sedicesimo ordine e sedicesima classe.

**24.** Sia ora $p = 4$. La superficie $F^8$ è certo normale anche in questo caso (come nel precedente) perchè sono tali le sue sezioni ($C_4^8$ di $S_4$) (***). L'enumerazione delle costanti ci dice che per questa superficie passano certo $\infty^1$ quadriche; e non può neanche passarne un numero maggiore, a meno che la superficie stessa non sia una particolare intersezione di tre quadriche (e abbia perciò una retta doppia), oppure sia contenuta in una $M_3^3$ ($\infty^1$ razionale normale di piani) — come succederebbe se avesse le sezioni iperellittiche —; casi questi che tutti due escludiamo (****). La superficie $F^8$ può tuttavia segarsi dalla $M_3^4$ base del fascio di quadriche che la contiene mediante una varietà cubica $M_4^3$ (*****); e l'intersezione residua di queste due varietà sarà una su-

(*) Questa superficie potrebbe anche essere un cono (speciale) di genere 5; ma allora ogni quadrica passante per essa sarebbe pure un cono, e collo stesso suo vertice.

(**) E, viceversa, quest'intersezione è appunto in generale una congruenza (4, 4) di genere 5.

(***) E non è certo rigata, a meno che non sia un cono.

(****) E in questo secondo caso per la superficie non passerebbero anzi, com'è noto, che sole quadriche degeneri.

(*****) Infatti di queste varietà per la superficie $F^8$ ne passano almeno $\infty^{15}$, mentre per la $M_3^4$ non ne passano che $\infty^{11}$. Questo si vede, per la $M_3^4$, riducendosi al numero delle varietà cubiche di $S_4$ o $S_3$ che passano per l'intersezione generale di due quadriche di questi stessi spazii, o, se vogliamo, anche al numero delle curve piane di terz'ordine perficie di quarto ordine, in generale irriduttibile, che apparterrà allo spazio $S_5$ (*) e avrà perciò le sezioni razionali. Viceversa, scelto ad arbitrio in $S_5$ un fascio di quadriche passanti per una superficie così fatta, è chiaro che una varietà cubica ($M_4^3$) passante per questa stessa superficie ma non per la $M_3^4$ base di quel fascio segherà ancora quest'ultima varietà in una superficie di ottavo ordine e colle sezioni precisamente di genere 4 (**).

Ora è noto che una superficie di quarto ordine appartenente a $S_5$ può presentare due casi diversi; può essere una rigata razionale normale (***) oppure una *superficie di Veronese* (non rigata, contenente $\infty^2$ coniche); e non è difficile riconoscere che il sistema di rette da essa rappresentato è sempre (2, 2) nel primo caso, e sempre (1, 3) o (3, 1) nel secondo (****). La nostra superficie $F^8$ potrà dunque rappresentare tanto un sistema (4, 4) quanto un sistema (3, 5) o (5, 3); e rappresenterà precisamente l'uno o l'altro secondo che la $F^4$ ottenuta nel modo indicato poc'anzi sarà rigata o non rigata. Questi sistemi saranno sempre contenuti in complessi quadratici di rette e possiamo anche vedere facilmente a che specie questi ultimi debbano appartenere. Basterà perciò esaminare quale sia la caratteristica di nn fascio di quadriche passanti per una superficie $F^4$ di $S_5$.

---

che passano per quattro punti fissi. Quanto poi alla superficie $F^8$, basta ricorrere al solito metodo dell'enumerazione delle costanti (ricordando che le $M_4^3$ di $S_5$ sono $\infty^{55}$).

(*) Se questa superficie fosse contenuta in un $S_4$, non potrebbe essere altro che l'intersezione di questo stesso spazio colla $M_3^4$ di cui sopra; cosa che, data anche come possibile, si potrebbe facilmente evitare (scegliendo opportunamente la varietà $M_4^3$).

(**) Infatti la $M_3^4$ base di quel fascio non ha in generale infiniti punti doppi (e si può verificarlo facilmente, ricorrendo per es. alla rappresentazione analitica delle $F^4$ in discorso); possiamo quindi segarla, con un $S_4$ opportuno, in una superficie *generale* del quart'ordine (a sezioni ellittiche), e per questa risulta subito, dalla rappresentazione piana ad es., che una $M_4^3$ condotta per una sua quartica razionale la sega ancora in una $C^8$, in generale irriduttibile, di genere 4.

(***) Con una semplice infinità di direttrici coniche, oppure con *una* direttrice rettilinea (e nessun'altra direttrice di ordine $< 3$). Cfr. C. Segre: *Sulle rigate razionali....* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19).

(****) Ciò proviene dal fatto che ogni quadrica passante per una rigata $R^4$ di $S_5$ e per un piano avente con essa tre e tre soli punti a comune deve contenere tutto l'$S_3$ della direttrice cubica della rigata che passa per gli stessi tre punti, ed è perciò un cono (almeno) di seconda specie. Similmente una quadrica passante per una superficie di Veronese e per un piano che incontri questa in due (soli) punti deve contenere tutto l'$S_3$ di questo stesso piano e della conica passante per quei due punti. I sistemi di rette rappresentati dalla superficie di Veronese furono del resto già ricordati al n.° 3, e per essi abbiamo anche rimandato a un lavoro del Segre (Atti di Torino, vol. 20).

**25.** E cominciamo dal caso della rigata. Ogni corda di questa è asse di un determinato cono quadrico di seconda specie contenente la stessa superficie (*); e questi varii coni formano un sistema (algebrico) $\infty^4$, che è però facile riconoscere non essere un sistema lineare. Ogni fascio di quadriche passanti per la rigata $R^4$ contiene *due* e in generale due soli fra quei coni; e contiene poi ancora (sempre nel caso più generale) due coni di prima specie; ha quindi la caratteristica [(11) (11) 11]. I due coni di prima specie corrispondono precisamente ai due elementi doppi dell'involuzione quadratica di piani che le quadriche del fascio determinano nella $M_3^3$ che contiene la rigata $R^4$. In particolare, se quest'involuzione è *parabolica*, se cioè la $M_3^4$ base del fascio contiene *un* piano di questa $M_3^3$ (nel qual caso essa contiene anche altri *tre* piani determinati), quei due coni vengono a coincidere, e il fascio si riduce alla caratteristica [(11) (11) 2]. Che se poi la rigata non ha direttrici rettilinee, può anche darsi che, in luogo degli stessi due coni, ne compaia un terzo ancora di seconda specie (passante per quella certa $M_3^3$); allora si ha la caratteristica [(11) (11) (11)] e la $M_3^4$ base contiene i piani di *due* coniche di $R^4$ (più altri *sei* piani determinati, quattro dei quali contengono rispettivamente altrettante generatrici di $R^4$ stessa). Per la rigata con direttrice rettilinea quest'ultimo caso potrebbe presentarsi solo coincidendo quei due primi coni di seconda specie; ciò condurrebbe alla caratteristica [(22) (11)].

(*) Non sarà forse inutile l'osservare qui che, data ad arbitrio nello spazio $S_5$ una rigata $R^4$, ogni punto $P$ di questo spazio è vertice di (almeno) un cono quadrico passante per essa rigata. Se il punto $P$ è esterno alla $M_3^3$ formata dai piani delle $\infty^1$ direttrici coniche (o, quando esiste una direttrice rettilinea, dai piani determinati da questa colle singole generatrici), allora quel cono è unico e di seconda specie, e ha per asse l'*unica* corda di $R^4$ passante per $P$ stesso. Se invece il punto $P$ sta in uno di quegli $\infty^1$ piani (ma sempre fuori della rigata) esso è vertice di un intero fascio di coni (di prima specie) passanti per $R^4$ (e per quel certo piano); in questo fascio vi è un cono di terza specie avente lo stesso piano per asse, più, nel caso delle $\infty^1$ direttrici coniche, un cono di seconda specie passante per quella certa $M_3^3$ (nel caso della direttrice rettilinea è il cono di terza specie che contiene quest'ultima varietà). Questo fascio, o, meglio, la sua sezione con un $S_4$ non passante pel vertice comune, avrebbe nei due casi rispettivamente le caratteristiche [(22) 1] e [(32)]; la $F^4$ base del fascio sezione avrebbe una retta doppia, e sarebbe, naturalmente, anch'essa rigata. (Sono questi anzi i soli *due* casi in cui questa superficie base contiene infinite rette; cfr. ad es. C. Segre: *Etude des différentes surfaces du 4.me ordre à conique double ou cuspidale*.... Math. Ann., Bd. 24, n.° 58). Infine, se il punto $P$ sta sulla rigata $R^4$, ciascuna delle $\infty^2$ corde di questa uscenti da esso è asse di un cono quadrico di seconda specie passante per la stessa rigata; e nel sistema lineare $\infty^2$ di questi coni (sistema che ha per base una $M_3^3$) vi è anche un cono di terza specie.

Quanto poi alla superficie di VERONESE (*), si vede facilmente che ogni quadrica passante per essa contiene i piani di infinite sue coniche; e poichè di queste coniche ne passano precisamente due per ogni suo punto, così in ogni fascio formato con quelle quadriche la $M_3^4$ base dovrà contenere i piani di *quattro* (in generale distinte) fra quelle stesse coniche (e quindi gli altri quattro che segano questi a tre a tre secondo rette). Questo fascio avrà dunque in generale la caratteristica [(11) (11) (11)], e conterrà tre coni di seconda specie i cui assi congiungeranno a coppie le *sei* intersezioni di quelle quattro coniche a due a due. Come caso particolare, se due di quelle coniche (e quindi i loro piani) si fanno avvicinare indefinitamente, si ha la caratteristica [(22) (11)]; e se una terza conica viene ancora a coincidere colle prime due, si ha la [(33)]. Facendo invece coincidere le prime due e le due rimanenti, oppure tutte quattro, si hanno rispettivamente i casi [(211) (11)] e [(321)].

**26.** Applicando ora quanto precede ai sistemi di rette, abbiamo:

*Esistono congruenze* (4, 4) *e* (3, 5) *o* (5, 3), *di genere quattro, non aventi infinite rette doppie; e queste sono tutte contenute in complessi quadratici di rette.*

La congruenza (4, 4) è contenuta, nel caso più generale, in un complesso quadratico di caratteristica [(11) (11) 11], e si può segare da questo con un complesso cubico, l'intersezione residua dei due complessi essendo costituita da una congruenza (2, 2) — uno dei due sistemi di tangenti a un cono quadrico che si appoggiano a una conica fissa non passante pel vertice di questo cono (**) —. Però quel complesso quadratico può avere anche la caratteristica [(11) (11) 2]; della sua *superficie singolare* fanno parte allora *due piani* e *due punti* (inviluppi) sull'intersezione di quelli; i due punti sono vertici di *coni quadrici* di rette della congruenza, mentre i due piani sono sostegni rispettivamente di *un fascio di rette* e di *un inviluppo generale di terza classe* (***). *La presenza di quest'inviluppo mostra che la congruenza è in questo caso rappresentabile sul piano;* essa si rappresenta infatti sul piano stesso dell'invi-

(*) Ogni corda di questa superficie è asse di un cono di seconda specie passante per essa, e ogni suo piano tangente lo è di un cono di terza specie; quest'ultimo caso si può anzi far scaturire dal precedente, supponendo che la corda considerata si riduca ad essere una tangente. Per la superficie di VERONESE non passano altri coni all'infuori di quelli ora menzionati.

(**) Cfr. KUMMER: loc. cit., § 5. Questa stessa congruenza è anche considerata nell'ultimo trattato dello STURM (pag. 347).

(***) Oppure, dualmente, i due piani sono sostegni di inviluppi quadrici, e i due punti sono rispettivamente centro di un fascio e vertice di un cono cubico. Si hanno quindi due casi diversi di congruenza (4, 4) contenuta in un complesso quadratico di caratteristica [(11) (11) 2].

luppo con un sistema di quintiche passanti doppiamente pei vertici dei due coni quadrici (*). La stessa congruenza (4, 4) può anche esser contenuta in un *complesso tetraedrale;* allora dai quattro vertici del tetraedro fondamentale escono rispettivamente un cono cubico, due coni quadrici, e un fascio di rette della congruenza; mentre le facce rispettivamente opposte a questi vertici sono sostegni di inviluppi rispettivamente duali a questi coni (**).

*La congruenza* (3, 5) *è invece contenuta in generale in un complesso tetraedrale* (***), e si può segare da questo con un complesso cubico, l'intersezione residua essendo costituita da una congruenza (3, 1) determinata da due piani collineari in posizione generale. *Dai vertici del tetraedro fondamentale escono coni cubici di raggi della congruenza, e le facce dello stesso tetraedro sono sostegni di fasci di rette del sistema;* i quattro coni hanno a due a due un raggio a comune. — *La congruenza* (5, 3) *ha proprietà duali.* Tra due facce qualunque del tetraedro fondamentale essa stabilisce una corrispondenza (2, 2), in cui alle rette dell'un piano corrispondono nell'altro curve di terzo ordine, e ai vari punti di ogni retta corrispondono sulla cubica omologa le coppie di una certa serie lineare $g_2^1$ (****). Siccome questa serie contiene *quattro* coppie costituite da punti infinitamente vicini (*****), così vi saranno

(*) Questa rappresentazione è quella stessa che si otterrebbe proiettando la superficie $F^8$ (e la proiezione ne risulterebbe appunto univoca) dal piano della sua cubica (di quella curva cioè che corrisponde all'inviluppo di terza classe). Il sistema di quintiche a cui si giunge ha *nove* punti basi semplici (oltre ai due punti doppi), immagini di altrettante rette di $F^8$ (incidenti alla cubica) e di altrettanti fasci di rette della congruenza (fra i quali non è compreso quello considerato di sopra). Questi punti dovranno anzi stare tutti su di una quartica di genere 1 passante doppiamente per i due punti basi doppi; quartica che sarà la rappresentante piana della cubica di $F^8$ (ossia dell'inviluppo di terza classe contenuto nella congruenza in discorso).

(**) In questo caso ancora *otto* fra i punti basi semplici della rappresentazione piana devono stare su di una cubica passante (semplicemente) pei punti basi doppi; questa cubica rappresenterebbe il cono di terzo ordine ora comparso. Con una trasformazione quadratica avente per punti fondamentali i due punti basi doppi e il nono punto semplice questa cubica e la quartica di cui alla nota prec. si mutano l'una nell'altra.

(***) Possiamo anzi dire che è *sempre* contenuta in un complesso tetraedrale, o in altro ottenuto da questo facendo coincidere qualcuno dei vertici del tetraedro fondamentale.

(****) Queste coppie formano infatti una serie razionale, e da un punto qualunque della cubica è anche individuata la coppia che lo contiene; ciò perchè dei due punti che corrispondono nel primo piano a quest'ultimo uno solo cade in generale sulla retta considerata. (Se vi cadessero tutti due, quel punto sarebbe, in generale, doppio per la cubica).

(*****) È bene osservare che la cubica di cui sopra è, in generale, ellittica, come direttrice di una rigata di quinto ordine alla quale, sulla superficie $F^8$ che rappresenta la congruenza, corrisponde appunto una curva di (quinto ordine e) genere 1.

su quella retta *quattro* punti per cui i due raggi della congruenza che ne escono e non stanno nel relativo piano (ossia nella faccia del tetraedro in cui la stessa retta si è considerata) sono infinitamente vicini. La congruenza può dunque riferirsi al piano doppio con curva limite di quart'ordine, e si potrà quindi anche rappresentare, *in generale* (*), sul piano semplice.

Ma un'altra osservazione, del pari semplicissima, ci conduce subito a concludere che quest'ultima rappresentazione è sempre possibile. Infatti, nella nota rappresentazione del complesso tetraedrale sullo spazio punteggiato (**), la nostra congruenza (5, 3) dà luogo a una superficie di terzo ordine che, come si vede facilmente, è non rigata, e quindi certo razionale. Questa superficie passa (semplicemente) per i quattro vertici del tetraedro fondamentale, e alle $\infty^5$ rigate (di ottavo ordine e genere 4) in cui la stessa congruenza è segata dai varii complessi lineari di $S_3$ corrispondono le $\infty^5$ sestiche (pure di genere 4) secondo cui quella superficie è incontrata dalle quadriche passanti per quegli stessi quattro vertici. Da questo segue altresì che *la rappresentazione piana della congruenza* (5, 3) *ci è data dal sistema delle sestiche con sei punti doppi e quattro punti semplici basi.* A questi ultimi corrispondono i quattro fasci di raggi; invece i quattro inviluppi cubici sono rappresentati dalle curve piane di terzo ordine passanti per i sei punti doppi e per i punti semplici a tre a tre (***).

*La superficie focale della congruenza* (5, 3) *è di sedicesimo ordine e dodicesima classe.* Ciascuna faccia del tetraedro fondamentale la sega nella curva

(*) L'unica eccezione la si avrebbe quando quella curva di quarto ordine si spezzasse in quattro rette passanti per uno stesso punto (cfr. i lav. già cit. al n.° 4).

(**) V. Reye: *Geometrie der Lage*, vol. 2 (Leipzig, 1886; e vol. 3 dell'ed. ultima, 1892); Weiler: *Ueber eine Abbildung des Tetraedralen Complexes auf den Punktraum* (Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 22); Loria: *Intorno alla geometria del complesso tetraedrale* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19); Sturm: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades* ...; vol. 1 (Leipzig, 1892).

(***) Le cose dette di sopra ci mostrano anche che la congruenza (5, 3) in discorso si può sempre generare con due superficie cubiche collineari passanti pei *quattro* punti uniti della collineazione in cui esse sono riferite. E questa congruenza sarà costituita precisamente dalle congiungenti delle coppie di punti omologhi di quella corrispondenza. Se le due superficie non contengono che *tre* fra i punti uniti, oppure soltanto *due*, o *uno* solo, o *nessuno*, si hanno rispettivamente congruenze (6, 3), (7, 3), (8, 3), (9, 3), tutte di genere *quattro*. Quest'ultima ha, nelle quattro facce del tetraedro fondamentale, altrettanti inviluppi di sesta classe (e genere 1) che contengono gli spigoli dello stesso tetraedro (a tre a tre) come rette triple. — È manifesta l'analogia di queste cinque congruenze colle (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2) e $(6, 2)_1$ — $(6, 2)_2$ di Sturm (cfr. la nota ult. alla fine del n.° 37) — tutte contenute, al pari delle prime, in complessi tetraedrali.

di terza classe (e sesto ordine) inviluppata dalle rette della congruenza in essa contenute, e nella curva di quarto ordine luogo dei punti per cui le due rette della congruenza esterne alla faccia stessa sono infinitamente vicine; e la tocca poi ancora lungo una cubica, luogo dei punti che, nella corrispondenza (2, 2) tra questa faccia e un'altra, sono omologhi ai punti della comune intersezione delle due facce, considerati come appartenenti a quell'altra.

**27.** Veniamo alle congruenze $(m, 8-m)$ di genere *tre.*

Una superficie di ottavo ordine appartenente a $S_5$ e colle sezioni di genere 3 può essere rigata, dando luogo ai due casi del cono di genere 3, normale per $S_6$, e della rigata normale con direttrice rettilinea doppia (e quindi iperellittica). Nessuno di questi due casi conduce a un sistema di rette dello spazio ordinario, trattandosi di superficie non contenute in alcuna quadrica non degenere (dello spazio $S_5$).

Delle superficie non rigate a sezioni di genere 3 non sono ancora stati assegnati con certezza *tutti* i diversi casi possibili. Ci occuperemo quindi di quei soli sistemi di rette che si rappresentano con superficie studiate dal sig. Castelnuovo (nel lav. cit. degli Atti di Torino, vol. 25), e precisamente 1.° con superficie a *sezioni iperellittiche;* 2.° con superficie di *prima specie;* 3.° con superficie di *seconda specie* (*). Queste superficie sono tutte normali per lo spazio $S_6$.

**28.** La superficie $F^8$ di $S_5$ a sezioni iperellittiche di genere 3 (loc. cit. 12) è rappresentabile sul piano e contiene una semplice infinità razionale di coniche, i cui piani formano (in generale) una $M_3^4$ con retta doppia (cfr. anche quanto si è detto ai n.i 13 e 17). Questa $M_3^4$ sta sopra un (solo) cono quadrico di seconda specie avente la sua retta doppia per asse; la $F^8$ sarà quindi, nel nostro caso, intersezione di questa stessa varietà con una nuova quadrica (che possiamo supporre non degenere). Viceversa, l'intersezione generale di una $M_3^4$ così fatta con una quadrica è appunto una superficie di ottavo ordine, colle sezioni iperellittiche di genere 3, e con due punti doppi, per ciascuno dei quali passano due coniche della stessa superficie (dalla congiungente di quei due punti quest'ultima si proietterebbe in una quadrica doppia di $S_3$). Ogni piano di quella quadrica segherà la varietà $M_3^4$ (e quindi

(*) Sono queste appunto (negli spazi superiori a $S_3$) le superficie (non rigate) che contengono un sistema $\infty^2$ di quartiche seganti sopra una qualsiasi sezione spaziale la serie *canonica* $g_4^2$. Nel caso delle sezioni iperellittiche ciascuna di queste quartiche si spezza però in una coppia di coniche (e la $g_4^2$ risulta quindi, come appunto deve risultare, composta mediante la $g_2^1$).

la superficie $F^8$) in 4 punti; la congruenza rappresentata da questa superficie sarà dunque (4, 4). Concludiamo perciò:

*Esistono congruenze* ($m$, $8 - m$) *di genere tre, iperellittiche* (*), *e rappresentabili sul piano; esse sono tutte di quarto ordine e quarta classe, e stanno in complessi quadratici generabili con fasci proiettivi di complessi lineari.* Queste stesse congruenze hanno due rette doppie, e contengono (come si vede facilmente) una serie razionale $\infty^1$ di rigate sestiche (di genere 2) con queste stesse rette per generatrici doppie. Ciascuna di queste rigate sta in una determinata congruenza lineare; ha quindi due direttrici rettilinee (che possono anche essere infinitamente vicine).

**29.** La $F^8$ normale di $S_6$ di prima specie contiene un fascio di quartiche ellittiche passanti per uno stesso suo punto; e gli spazii $S_3$ di queste quartiche formano una $M_4^3$ generabile con tre fasci proiettivi di $S_5$. Noi ci limiteremo a considerare il caso (più interessante) in cui questa superficie si proietti da un punto di quella $M_4^3$, da un punto cioè dell' $S_3$ di una sua quartica.

La superficie $F^8$ di $S_5$ che otterremo avrà in tal caso due punti doppi, e questi saranno tali anche per una quartica piana di genere 1 in essa contenuta. La $M_4^3$ si proietterà in un cono quadrico di seconda specie passante per questa stessa superficie, sicchè quest' ultima (quando abbia a rappresentare un sistema di rette) dovrà stare sopra una seconda quadrica (non degenere) e quindi ancora su tutto un fascio di quadriche. La $M_3^4$ base del fascio conterrà anch' essa il piano di quella quartica di genere 1, e la superficie $F^8$ potrà segarsi da essa con una varietà cubica ($M_4^3$ di $S_5$) che la taglierà ancora in quello stesso piano più, in generale, una rigata cubica appartenente a uno spazio $S_4$. Quest' ultimo spazio non conterrà quel piano, ma l' incontrerà secondo una retta che sarà corda della rigata cubica (e sarà precisamente la congiungente dei due punti doppi di $F^8$). La proposizione è invertibile, ossia, facendo passare in $S_5$ per una rigata cubica normale e per un piano che l' incontri in due punti un fascio di quadriche ($M_4^2$) e una varietà cubica ($M_4^3$), si ha come intersezione residua di queste stesse varietà (in generale) una superficie di ottavo ordine a sezioni di genere 3, che dal piano stesso è segata in una curva di quarto ordine, e per la quale i due punti comuni al piano e alla rigata risultano anche doppi (**).

---

(*) Incontrate cioè da ogni complesso lineare secondo una rigata iperellittica.

(**) Per l' intersezione complessiva (superficie di dodicesimo ordine) questi due punti devono infatti risultare *quadrupli*, perchè in ciascuno di essi le quadriche del fascio e la varietà $M_4^3$ ammettono tutte uno stesso $S_4$ tangente.

Poichè la $F^8$ normale si proietta univocamente su di un piano dall' $S_3$ di una sua quartica, la $F^8$ di $S_5$ dovrà proiettarsi pure univocamente dal piano della sua quartica ellittica. La congruenza da essa rappresentata sarà perciò (3, 5) o (5, 3), e noi potremo concludere:

*Esiste una congruenza* (3, 5) *o* (5, 3) *di genere tre, non iperellittica, e contenuta in un complesso quadratico generabile con fasci proiettivi di complessi lineari; congruenza che ha due rette doppie,* e contiene *otto* fasci di raggi e 28 rigate quadriche, più nei due casi rispettivamente *un cono quartico* o *un inviluppo piano di quarta classe* e genere *uno,* con quelle stesse due rette doppie. Questa congruenza si può ottenere come intersezione del complesso quadratico che la contiene con un complesso cubico, ecc. ecc.

**30.** Della superficie $F^8$ normale di seconda specie è noto (loc. cit. 7) ch'essa può sempre ottenersi come intersezione di una quadrica con un cono di quart'ordine proiettante una *superficie di Veronese* da un punto esterno al suo $S_5$. Segue da ciò che la $F^8$ di $S_5$ proiezione della superficie precedente dovrà stare sul cono che proietta una $F^4$ di $S_4$ a sezioni razionali e non rigata da un punto esterno al suo $S_4$ (*); e sarà precisamente l'intersezione di questo stesso cono con una quadrica (per noi non degenere) di $S_5$. (Per quel cono quartico non passa infatti in generale nessuna quadrica, e non passano poi in nessun caso quadriche non degeneri). Si può verificare facilmente che, se questa superficie sta su più di una e quindi su infinite quadriche, dovrà anche stare sopra una doppia infinità di queste (se, ben inteso, vogliamo sempre che rappresenti un sistema di rette) e avrà in tal caso una conica doppia (sarà insomma una particolare intersezione di tre quadriche, riducendosi le sue sezioni al genere 3 per il fatto di avere ciascuna due punti doppi). Nel caso più generale però questa superficie starà sopra una sola quadrica, e non avrà affatto punti doppi. Il sistema di rette da essa rappresentato è certamente (4, 4); e perciò:

*Esiste anche una congruenza* (4, 4) *di genere tre non iperellittica; essa contiene tuttavia* (cfr. Castelnuovo, loc. cit.) *un sistema* $\infty^4$ *di rigate iperellittiche di ottavo ordine (e genere 3). È in generale rappresentabile sul*

(*) Il punto da cui si proietta la superficie normale $F^8$ può infatti supporsi esterno anche al cono quartico che proietta la superficie di Veronese. Se così non fosse, la $F^8$ di $S_5$ (quando non si riducesse a una $F^4$ doppia) verrebbe certo a stare in una $M_3^3$ (conica) e non sarebbe quindi contenuta che negli $\infty^2$ coni quadrici passanti per quest'ultima varietà.

*piano* (*), *ma non ha rette doppie, e non è contenuta in nessun complesso quadratico.*

**31.** Facciamo ora un altro passo, e diciamo qualcosa sulle congruenze $(m, 8-m)$ di genere *due*. — E osserviamo anzitutto che una superficie di ottavo ordine e colle sezioni di genere 2 può essere rigata, ed è in tal caso normale per uno degli spazii $S_7$ o $S_6$.

Se è normale per $S_7$ è certamente un cono, e non può dunque rappresentare (finchè appartiene a $S_5$) nessuna congruenza di rette.

Se è normale per $S_6$, ha una direttrice rettilinea doppia, e, se non ha generatrici doppie, i piani delle sue coppie di generatrici incontrantisi sopra quella direttrice formano una $M_3^4$ con retta doppia (contenuta in un cono quadrico di seconda specie). Non è difficile accorgersi che la rigata $R^8$ *può essere* intersezione di questa $M_3^4$ con una nuova quadrica (non degenere) tangente ad essa in tutti i punti di una sua direttrice rettilinea; essa può quindi rappresentare una congruenza (4, 4) di genere *due* con tutto un fascio di rette doppie (**).

**32.** Veniamo alle superficie non rigate e razionali.

Queste superficie (supposte sempre di ottavo ordine e colle sezioni di genere 2) sono normali per lo spazio $S_7$ e contengono una serie razionale $\infty^1$ di coniche i cui piani formano, sulla superficie normale, una $M_3^5$. Da una retta qualunque dello spazio $S_7$, che vogliamo però supporre non incidente a questa $M_3^5$, la varietà stessa si proietta in altra di ugual ordine e dimensione appartenente a $S_5$ e contenente la $F^8$ proiezione (dalla stessa retta) della superficie normale di cui sopra. Da considerazioni già svolte altrove (n.° 19)

---

(*) In un solo caso questa rappresentazione non è più possibile (cfr. loc. cit. 9): quando la superficie $F^8$ contiene una serie $\infty^1$ ellittica di coniche con un punto a comune (e quindi la congruenza (4, 4) una serie analoga di rigate quadriche passanti per una stessa retta). Superficie e congruenza si possono però allora rappresentare sul cono ellittico.

(**) Questa congruenza, oltre al fascio accennato di sopra, avrebbe due altre rette doppie — una contenuta nel piano dello stesso fascio, l'altra passante pel suo centro — e starebbe in un complesso quadratico generabile con due fasci proiettivi di complessi lineari. Più particolarmente, possiamo dire che la stessa congruenza dovrà comporsi di una serie $\infty^1$ di fasci di raggi, coi centri su di una quartica di genere 2 contenuta nel piano del fascio doppio e passante doppiamente pel centro di questo fascio; due fasci della serie $\infty^1$ coi centri allineati su quest'ultimo punto avranno sempre un raggio a comune. Dualmente, i piani degli $\infty^1$ fasci invilupperanno un cono di quarta classe e genere 2 col centro del fascio doppio per vertice e il piano di esso per piano bitangente (tangente cioè lungo due generatrici, in generale distinte); ecc.

risulta che questa $M_3^5$ di $S_5$ dovrà avere una curva doppia di terz'ordine (che noi supporremo irriduttibile) luogo dei punti per cui passano due suoi piani; la stessa curva sarà anzi incontrata da ciascuno di questi piani in due punti. La superficie $F^8$, quando abbia a rappresentare un sistema di rette di $S_3$, dovrà essere intersezione di questa $M_3^5$ con una quadrica $Q$ (non degenere), e queste due varietà dovranno poi ancora incontrarsi secondo una coppia di piani. Viceversa, una quadrica passante per due piani di una $M_3^5$ così costituita la sega ancora, in generale, in una superficie di ottavo ordine colle sezioni di genere due. E anche qui possono presentarsi due casi:

*a*) Quei due piani della $M_3^5$ non si incontrano.

*b*) Gli stessi due piani si incontrano.

Nel primo caso la superficie $F^8$ ha in generale *due* punti doppi, e i due piani che completano l'intersezione della $M_3^5$ colla quadrica $Q$ la segano ciascuno in una conica e in *due* punti ancora fuori di questa. Nel secondo caso invece $F^8$ ha in generale *tre* punti doppi, e gli stessi due piani non la incontrano (fuori della relativa conica) che in un sol punto; il punto comune ad essi non sta (in generale) su quella superficie. Quanto poi al sistema di rette che così viene rappresentato, è chiaro ch'esso sarà (4, 4) nel primo caso, (3, 5) o (5, 3) nel secondo. Concludiamo perciò:

*Le congruenze* ($m$, $8 - m$) *di genere due rappresentabili sul piano possono essere tanto* (4, 4), *quanto* (3, 5) *o* (5, 3).

La congruenza (4, 4) ha *due rette doppie*, e contiene *un cono quadrico* e *un inviluppo piano di seconda classe;* il vertice del cono e il piano dell'inviluppo non si appartengono. Pel vertice del cono passano ancora due raggi della congruenza non contenuti in esso cono, e altrettanti ne giacciono nel piano dell'inviluppo senza tuttavia appartenere a quest'ultimo.

La congruenza (3, 5) invece ha (in generale) *tre rette doppie,* e contiene *due coni quadrici,* dai cui vertici escono ancora rispettivamente due rette di essa non contenute in questi coni; la congiungente dei due vertici non è in generale raggio della congruenza.

La superficie focale è di decimo ordine e decima classe nel primo caso; nel secondo, è di ottavo ordine e dodicesima classe (o viceversa, se si tratta della congruenza (5, 3)). Altre proprietà di queste congruenze si dedurrebbero facilmente da quelle delle superficie che le rappresentano; ma per brevità ci asteniamo anche dall'enunciarle.

**33.** Un caso particolare (e notevole) di congruenza (5, 3) di genere 2 l'abbiamo nella congruenza *Cremoniana* di Hirst (Proc., ecc., vol. 16) che si determina quando fra due piani qualunque dello spazio si stabilisce una corrispondenza birazionale del terzo ordine priva di punti uniti. — La superficie $F^8$ considerata di sopra può infatti rappresentarsi, quando non abbia direttrici di ordine $< 2$, con un sistema di quartiche piane aventi un punto doppio e quattro punti semplici basi; e contiene allora *otto* direttrici coniche (segantisi a coppie in *un* punto), otto fasci di direttrici cubiche, e altrettante reti di direttrici quartiche. Queste otto reti possono accoppiarsi a due a due in modo che le quartiche di ciascuna di esse taglino quelle dell'altra in *tre* punti (mentre le rimanenti ne sono incontrate in soli *due* punti). Proiettando la $F^8$ normale (ciò che si è detto in questo n.° vale tanto per essa, quanto per la sua proiezione generale in $S_5$) da una retta che non l'incontri, ma sia contenuta nel piano delle tre intersezioni di due sue direttrici quartiche, otteniamo una $F^8$ di $S_5$ con due quartiche piane, e con un punto triplo che è tale anche per queste stesse curve; e si può riconoscere facilmente che la superficie così ottenuta rappresenta una congruenza (3, 5) o (5, 3) contenuta in un complesso tetraedrale. Si può anzi dimostrare che è questo il solo caso in cui i tre punti doppi che la superficie $F^8$ ha nel caso più generale vengono a coincidere in un (solo) punto triplo (ammesso, ben inteso, che la $F^8$ stessa debba sempre rappresentare una congruenza (3, 5) o (5, 3)) (*). Concludiamo perciò:

*La congruenza* (3, 5) *o* (5, 3) *di genere due,* rappresentata da un sistema di quartiche piane, *può avere una retta tripla (in luogo di tre rette doppie distinte) ed è allora contenuta in un complesso tetraedrale.* La congruenza (5, 3) ad es. contiene in questo caso due coni quadrici ($A$ e $B$) e due inviluppi di quarta classe ($\alpha$ e $\beta$), oltre ai due inviluppi di seconda classe ($\gamma$ e $\delta$) e agli otto fasci di raggi che vi sono anche nel caso generale. — La sua

(*) Si giunge a questo risultato osservando che dal suo punto triplo ($P$) la superficie $F^8$ dovrebbe proiettarsi in una $F^5$ di $S_4$ (rappresentata dal sistema delle quartiche piane con un punto doppio e 7 punti semplici basi); essa dovrebbe dunque stare nel cono (di quinto ordine, a 3 dimensioni) che proietta quest'ultima superficie dallo stesso punto $P$, e sarebbe precisamente intersezione di questo cono con una quadrica (non degenere) passante per due piani di esso col solo punto $P$ a comune. Da questo si trae che la sezione spaziale generica di $F^8$ deve proiettarsi nell'intersezione residua di $F^5$ con una quadrica passante per due sue rette sghembe (quelle che stanno rispettivamente in quei certi due piani del cono); e perciò l'insieme di queste due rette deve dar luogo (nella rappresentazione piana) a una curva (riduttibile) di quarto ordine con quattro punti doppi (il punto base doppio comune alle rappresentazioni di $F^8$ e di $F^5$, e i tre punti semplici che si devono aggiungere alla prima delle due per averne la seconda); dunque ecc.

retta tripla è precisamente l'intersezione dei due piani $\alpha$ e $\beta$, ed è tripla per ciascuno dei relativi inviluppi (sicchè questi risultano razionali, e le curve inviluppate sono di sesto ordine). Gli stessi piani $\alpha$ e $\beta$ contengono rispettivamente i vertici $A$ e $B$ dei due coni quadrici; e la congiungente di questi due punti è anche intersezione dei due piani $\gamma$ e $\delta$. Il tetraedro fondamentale del complesso (tetraedrale) che contiene questa congruenza ha per facce i quattro piani $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; due suoi vertici cadono quindi rispettivamente nei punti $A$ e $B$; ecc., ecc.

È questa appunto, com'ognun vede, la congruenza accennata di Hirst; i due piani da essa riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine sono quelli che abbiamo chiamati $\alpha$ e $\beta$. Che questa congruenza sia contenuta in un complesso tetraedrale si vede anche direttamente, ed è stato pure accennato nella nota ultima al n.° 11.

**34.** Le superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche possono essere rigate; ma, sorvolando anche qui su questo caso (*), ci limiteremo a dare un cenno sulle congruenze rappresentate da superficie non rigate e razionali. Queste sono tutte normali per lo spazio $S_8$ e possono essere, com'è noto, di due specie diverse (cfr. ad es. il lav. cit. del sig. Del Pezzo; Rend. di Palermo, vol. 1).

Cominciamo dalla $F^8$ di prima specie. Questa contiene *una* serie razionale $\infty^1$ di coniche i cui piani formano, sulla superficie normale, una $M_3^6$ pure normale. Da un piano arbitrario (che vogliamo solo supporre non incidente ad essa) questa $M_3^6$ si proietta in una varietà di ugual ordine e dimensione appartenente a $S_5$, che ha, nel caso più generale, una curva doppia di sesto ordine incontrata da ogni suo piano in tre punti (**); questa curva potrebbe

(*) Il quale, d'altronde, condurrebbe solo a congruenze costituite da una serie $\infty^1$ di fasci di raggi coi centri su di una curva ellittica. — Una rigata ellittica di ottavo ordine rappresentante una congruenza di rette si avrebbe per es. segando una $M_3^5$ ($\infty^1$ razionale di piani) con una quadrica (non degenere) passante per due suoi piani e tangente ad essa in tutti i punti di una sua direttrice rettilinea (supposta esistente). La congruenza così rappresentata sarebbe (3, 5) o (5, 3) oppure (4, 4) secondo che quei due piani si incontrano o no —.

(**) Infatti da un $S_4$ condotto per un suo piano $\pi$ questa $M_3^6$ è segata ancora, in generale, in una rigata razionale di quinto ordine con *tre* punti doppi (per ciascuno dei quali passano due generatrici di quest'ultima, e quindi due piani distinti di $M_3^6$); rigata che poi a sua volta è incontrata dal piano $\pi$, oltre che in una generatrice, in *tre* altri punti, per ciascuno dei quali passerà dunque, oltre a $\pi$ stesso, un secondo piano della $M_3^6$. Ogni piano di questa varietà contiene dunque tre punti doppi di essa, e ogni $S_4$ condotto per un tal piano ne contiene, fuori di questo, altri tre (in tutto dunque sei). La curva doppia di $M_3^6$ è perciò appunto di sesto ordine.

anche spezzarsi in due o più parti, ma noi, per non dilungarci troppo, ci limiteremo a considerare il caso in cui essa è irriduttibile.

Non essendo questa $M_3^6$ contenuta in alcuna quadrica (almeno non degenere) la superficie $F^8$, quando abbia a rappresentare un sistema di rette, sarà certo intersezione di quella stessa varietà con una quadrica (non degenere) $Q$ passante per *quattro* suoi piani. Viceversa, quest'intersezione è appunto, in generale, una superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche, e di prima specie se la $M_3^6$ ha una direttrice rettilinea (*). E qui devono ritenersi *a priori* come possibili tre casi diversi:

*a*) Dei quattro piani, due si incontrano e gli altri due pure; ma uno qualunque fra i due primi e uno di questi ultimi *non* si incontrano.

*b*) Tre dei quattro piani si incontrano a due a due, ma nessuno di essi incontra il quarto.

*c*) I quattro piani si incontrano tutti a due a due (**).

Si può riconoscere senza difficoltà che la superficie $F^8$ avrà in questi tre casi rispettivamente 2, 3 e 6 punti doppi e rappresenterà rispettivamente un sistema (4, 4), un sistema (3, 5) o (5, 3), e un sistema (2, 6) o (6, 2). Esamineremo ora separatamente ciascuno di questi casi (***).

**35.** Scelti ad arbitrio nella $M_3^6$ di $S_5$ due piani che si incontrino e due altri che pure si incontrino, ma non taglino invece i due primi (cosa che, nel caso della sestica doppia irriduttibile e della $M_3^6$ non conica, sarà sempre possibile, e in infiniti modi) esiste sempre una quadrica passante per questi quattro piani, ma che si spezza nei due $S_4$ da essi determinati. Perchè questi stessi piani stiano sopra una quadrica non degenere (e quindi su tutto un fascio di quadriche) (****) è necessario e sufficiente che dall' $S_3$ comune a

(*) Si vede facilmente che questa direttrice non incontrerà in generale la curva doppia della varietà $M_3^6$.

(**) Questi tre casi corrispondono ai tre modi diversi in cui quei quattro piani di $M_3^6$ possono ripartirsi fra i due sistemi di piani della quadrica $Q$.

(***) Qui, a differenza di quanto si è visto finora, si presenta la questione della *possibilità* di questi diversi casi; della possibilità cioè di trovare nella $M_3^6$ quattro piani disposti nel modo indicato di sopra, e di condurre poi per questi stessi piani una quadrica non degenere (cosa che invece finora, trattandosi di soli due o tre piani, si è sempre potuta ottenere, in modo ovvio, e in infiniti modi). Di questa possibilità dovremo dunque occuparci nei nostri ragionamenti.

(****) Fascio che avrà la caratteristica [(1111) (11)] contenendo, oltre la coppia di $S_4$ testè accennata, un (solo) cono di seconda specie, il cui asse sarebbe la congiungente delle intersezioni delle due coppie di piani.

quei due $S_4$ essi vengano segati in rette che siano generatrici di una medesima quadrica (*). E questo, senza ch'io mi dilunghi a mostrarlo, si può ottenerlo facilmente, scegliendo in modo opportuno il (imponendo cioè alcune condizioni, tutte compatibili, al) piano da cui si proietta la $M_3^6$ normale; la $F^8$ di prima specie, proiettata in $S_5$, potrà quindi rappresentare effettivamente un sistema di rette (4, 4).

Abbiamo già detto che la superficie $F^8$ di $S_5$ avrà in questo caso due punti doppi; questi saranno anche tali rispettivamente per altrettante sue cubiche piane (razionali), e i piani di queste due curve conterranno ancora ciascuno altri *due* punti della superficie (**). Gli stessi due piani avranno certo un punto a comune, quello in cui s'incontrano le loro due curve; ma è facile accorgersi ch'essi dovranno segarsi secondo un' intera retta, sicchè i due punti di $F^8$ contenuti in uno qualunque dei due piani e fuori della relativa cubica staranno sempre sull'altra cubica (saranno cioè le rimanenti due intersezioni di quest' ultima colla retta comune ai due piani). Questi stessi quattro punti staranno anche rispettivamente sulle quattro coniche di $F^8$ i cui piani appartengono alla quadrica $Q$ (***). Dunque:

*Esiste una congruenza* (4, 4) *di genere uno contenente un cono cubico e un inviluppo piano di terza classe (entrambi razionali), due coni e due inviluppi quadrici, e un fascio di raggi.* Il primo cono e il primo inviluppo hanno rispettivamente due rette doppie, che sono tali anche per la congruenza; il vertice dell'uno sta nel piano dell'altro, e il fascio determinato da questi due elementi contiene *cinque* rette della congruenza, una delle quali è comune appunto a quel cono e a quell'inviluppo cubico, mentre delle altre quattro due appartengono al solo cono (e rispettivamente ai due coni quadrici) e due al solo inviluppo (e rispettivamente pure ai due inviluppi quadrici). Il piano dell'inviluppo cubico contiene dunque i vertici dei tre coni, e il vertice del cono cubico è a sua volta intersezione dei piani dei tre inviluppi; il fascio

(*) Che sia necessario, è chiaro; che sia sufficiente, lo si vede anche subito, osservando che per quei quattro piani passano in tal caso le due quadriche degeneri di cui alla nota prec.e, e quindi anche infinite altre quadriche, nessuna delle quali però può essere degenere.

(**) Ciò perchè un $S_3$ condotto per uno di questi piani deve segare $F^8$ ancora in *tre* punti fuori della cubica in esso piano contenuta, mentre d'altra parte *uno solo* di quei punti può essere esterno a questo stesso piano (se ve ne fosse più d'uno, la congruenza non sarebbe più (4, 4)).

(***) E ciascuno di questi piani segherà la superficie $F^8$ in *due* punti ancora fuori della propria conica (e posti sempre sull'una o sull'altra delle due cubiche piane).

di rette della congruenza ha poi il suo centro sulla retta d'intersezione dei piani dei due inviluppi quadrici, e il suo piano passa per i vertici dei due coni quadrici. — La congruenza contiene *una* serie $\infty^1$ di rigate quadriche, della quale fanno parte i due coni e i due inviluppi (e per la quale sono punti basi il centro del fascio e il vertice del cono cubico, e piani tangenti fissi quello del fascio stesso e quello dell'inviluppo cubico); queste quadriche inviluppano la superficie focale della congruenza, che è di ottavo ordine e ottava classe. Le direttrici di queste stesse quadriche formano una congruenza (4, 4) identica alla precedente e colla stessa superficie focale e gli stessi punti e piani singolari, solo che il centro e il piano del fascio di rette di ciascuna congruenza sono per l'altra rispettivamente vertice del cono cubico e sostegno dell'inviluppo di terza classe; ecc. ecc.

**36.** Nel caso *b*), supposto possibile, la superficie $F^8$ dovrebbe avere *tre* punti doppi, e contenere perciò tre cubiche piane (razionali) passanti doppiamente ciascuna per uno di questi punti; nel piano di ciascuna cubica dovrebbe poi stare ancora un altro punto di quella superficie. Se dunque la superficie normale $F^8$ può proiettarsi in $S_5$ in modo da rappresentare un sistema di rette (3, 5) o (5, 3), la proiezione dovrà certamente farsi da un piano incidente secondo rette agli $S_4$ determinati da tre sue cubiche e rispettivamente da altrettanti suoi punti esterni a queste. Di piani così fatti ne esistono, e infiniti; però, volendo noi che questo piano non incontri la superficie $F^8$, bisognerà che quei tre punti stiano a due a due, quindi tutti tre, sopra una stessa conica di quella superficie. Viceversa, proiettando la $F^8$ normale di prima specie da un piano così scelto (*), si ottiene una $F^8$ di $S_5$ con *tre* punti doppi, che sono tali rispettivamente anche per altrettante sue cubiche piane, ecc. ecc. e questa superficie si vede subito (ricorrendo per es. all'enumerazione delle costanti) che sta certo in una quadrica di $S_5$ (e non degenere). Da ciò si trae senz'altro che:

*Esiste una congruenza* (3, 5) ad es. *di genere uno, con* 7 *punti singolari, che sono rispettivamente vertici di tre coni cubici razionali e di tre coni quadrici e centro di un fascio di raggi, e* 2 *piani singolari, quello dello stesso fascio e un altro che è sostegno di un inviluppo di seconda classe.* Dal vertice di uno qualunque dei sei coni esce ancora un raggio della congruenza che non appartiene allo stesso cono; e il piano dell'inviluppo contiene ancora,

(*) Piano che si appoggerà alle tre rette secondo cui quegli $S_4$ si segano a due a due. E questa condizione sarà, in generale, anche sufficiente.

fuori di questo, *tre* raggi del sistema. La congruenza ha poi tre rette doppie, che sono tali rispettivamente per i suoi tre coni cubici; contiene una serie razionale $\infty^1$ di rigate quadriche della quale fanno parte i suoi tre coni e l'inviluppo quadrico; ecc. ecc.

Questa congruenza (3, 5) fu ottenuta appunto dai sig.[i] Segre e Castelnuovo (insieme ad altra che ritroveremo noi pure fra poco) come proiezione di una varietà cubica di $S_4$ con 7 punti doppi. Sono di questa natura le due congruenze indicate dal sig. Castelnuovo colle lettere **A** e **B**.

**37.** Due parole infine sul caso *c*). In questo caso (sempre supposto possibile) l'intersezione residua della quadrica $Q$ colla varietà $M_3^6$ dovrebbe essere costituita da un gruppo di quattro piani incontrantisi tutti a due a due (in sei punti). Da ciò, dato che la $M_3^6$ ha qui una direttrice rettilinea, si trae facilmente che quei quattro piani devono essere segati in rette da uno stesso quinto piano, e che perciò le loro sei intersezioni devono stare anche tutte in quest'ultimo piano (ed essere vertici di un quadrilatero completo). Segue ancora da questo che la sestica doppia di $M_3^6$ dovrà stare in uno spazio $S_3$ (incontrante la $M_3^6$ in una rigata razionale del quinto ordine) e che i 6 punti doppi di $F^8$ dovranno esser dati dalle intersezioni di questa stessa sestica con un certo piano del suo $S_3$. E questo ci porta ancora a concludere che la $F^8$ normale si sarà dovuta proiettare da un piano contenuto nell' $S_5$ di una sua quintica razionale. — Viceversa, da un piano $\pi$ così scelto questa superficie normale si proietta (in generale) in una $F^8$ di $S_5$ che contiene una quintica piana razionale, ed ha per punti doppi gli stessi (sei) punti doppi di questa; ciascuno di questi punti è poi ancora doppio per una cubica piana contenuta nella superficie. Ogni quadrica passante per quest' ultima contiene i piani di quelle 7 curve, e d'altra parte per i piani ad es. della quintica e di quattro fra le sei cubiche passa sempre una quadrica (e non degenere, se il piano $\pi$ è stato scelto, dentro l' $S_5$ della quintica, in modo generale); quadrica che contiene tutta la superficie $F^8$ (e quindi anche i piani delle rimanenti due cubiche). Ritroviamo così la notissima *congruenza* $(2, 6)_2$ *con* 12 *punti e un piano singolare, e con* 6 *raggi doppi passanti per uno stesso punto (vertice di un cono quintico razionale),* ecc. ecc. (*) (**).

(*) La stessa superficie potrebbe naturalmente rappresentare anche la congruenza duale $(6, 2)_2$ con sei raggi doppi contenuti in un medesimo piano.

(**) Lo Sturm nel suo ultimo lavoro già più volte cit. indica invece questa congruenza col simbolo $(2, 6)_1$ e riserva la notazione $(2, 6)_2$ per l'altra congruenza di se-

**38.** Veniamo ora alle congruenze rappresentate da superficie $F^8$ di seconda specie. — Queste superficie contengono, com'è noto, *due* serie razionali $\infty^1$ di coniche, per ciascuna delle quali i varii piani formano una $M_3^6$; noi potremmo quindi ripetere per esse quanto già si è detto al n.° 34 per le $F^8$ di prima specie, e applicare a uno qualunque dei loro due sistemi di coniche quanto lì si è veduto per l'unico sistema che allora si aveva a considerare. Anche qui s'incontreranno gli stessi tre casi *a*), *b*), *c*); ma per le due $M_3^6$ su cui sta una data $F^8$ dovrà sempre presentarsi lo stesso fra questi (*).

Quanto al caso *a*), ci limiteremo a dire che si può ripetere ancora, con poche modificazioni, lo stesso ragionamento già accennato al n.° 35, e dedurne in conseguenza che anche questa seconda superficie $F^8$ può rappresentare un sistema di rette (4, 4). La quadrica $Q$ conterrà naturalmente quattro piani di ciascuna delle due $M_3^6$; e ciascuno di questi otto piani segherà $F$ in una conica e in due punti ancora fuori di questa. Da ciò si trae facilmente che le due coppie di piani incidenti dell'una $M_3^6$ contenute nella quadrica $Q$ dovranno tagliare in rette rispettivamente le due coppie analoghe dell'altra; o, più esattamente, due piani dell'una varietà (sempre fra quei certi quattro) i quali si incontrino segheranno bensì in un punto unico due piani pure incidenti dell'altra, ma dovranno incontrare in rette i rimanenti due. Nessun altro piano di $Q$ può contenere tutta una curva della superficie $F^8$ perchè le curve di questa di ordine immediatamente superiore alle coniche sono di quarto ordine (e razionali) e non possono perciò proiettarsi qui in curve piane (avendo la superficie soli *due* punti doppi). Dunque:

*Esiste un'altra congruenza* (4, 4) *di genere uno con quattro punti e quattro piani singolari, ma nella quale questi punti e piani sono tutti vertici o rispettivamente sostegni di coni o inviluppi quadrici di rette;* a ciascun

---

condo ordine e sesta classe con sola superficie focale (quella che è contenuta in un complesso tetraedrale). Prescindendo anche dalle ragioni che hanno indotto l'insigne scienziato a proporre questo cambiamento, è bene osservare che in questo modo le congruenze $(2, 6)_1$ e $(2, 6)_2$ verrebbero proprio a corrispondere alle due superficie (di ottavo ordine, a sezioni ellittiche) di *prima* e *seconda specie* (anzichè di *seconda* e *prima*; cfr. Del Pezzo; loc. cit.); corrispondenza questa che è desiderabile avere, data specialmente l'intima connessione, l'assoluta identità anzi che esiste, almeno da un certo punto di vista, fra lo studio delle congruenze di secondo ordine con sola superficie focale e quello delle superficie non rigate e razionali a sezioni ellittiche.

(*) Una proprietà notevole e comune a tutte le congruenze rappresentate da superficie di ottavo ordine di seconda specie è quella di contenere soltanto rigate (algebriche) di ordine pari.

punto o piano appartengono ancora due altri raggi della congruenza. Quest'ultima ha poi due rette doppie, che sono tali rispettivamente per due serie razionali $\infty^1$ di rigate quartiche (ciascuna delle quali ha a sua volta due direttrici rettilinee doppie), e contiene anche due serie pure razionali e $\infty^1$ di rigate quadriche, di ciascuna delle quali fanno parte due coni e due inviluppi (mentre i vertici degli altri due coni e i piani degli altri due inviluppi ne sono rispettivamente punti basi e piani tangenti fissi); i vertici dei coni di una serie qualunque stanno sull'intersezione dei piani dei due inviluppi dell'altra. — Le direttrici delle rigate di una serie qualsiasi formano una seconda congruenza (4, 4) identica alla precedente e cogli stessi punti e piani singolari (anzi cogli stessi coni e inviluppi); le due congruenze hanno pure a comune la superficie focale, che è di ottavo ordine e di ottava classe.

**39.** Nel caso $b$), supposto possibile, la quadrica $Q$ dovrà contenere di ciascuna delle due $M_3^6$ passanti per $F^8$ (cfr. anche n.° 36) un piano il quale seghi questa superficie in una conica e in *tre* punti ancora fuori di questa. Supponiamo dunque di aver proiettata la superficie (normale) $F^8$ e le relative due $M_3^6$ in uno spazio $S_5$, per modo che un piano di una di queste due varietà contenga di $F$, oltre la relativa conica, tre altri punti (*). Questo piano sarà segato in rette da tre piani determinati dell'altra $M_3^6$; e per questi quattro piani e per un altro qualunque di questa seconda $M_3^6$ noi potremo sempre condurre una quadrica (in generale non degenere) che segherà la stessa $M_3^6$ in una superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche e priva di rette, quindi di seconda specie. Questa superficie rappresenterà appunto un sistema di rette (3, 5) o (5, 3).

Sulla stessa superficie vi saranno due coniche (di sistema opposto) i cui piani conterranno ciascuno *tre* altri punti di essa. L'$S_4$ di questi due piani dovrà segare ancora $F^8$ in una quartica passante per quei sei punti; quartica che (come si vede facilmente) non potrà spezzarsi in due coniche e sarà quindi certo una curva piana, con tre punti doppi (che saranno tali anche per la superficie). Il piano di questa quartica conterrà ancora (fuori della curva) il punto comune a quelle due coniche, e segherà in rette i piani di queste. Concludiamo perciò:

*Esiste un'altra congruenza* (3, 5) *di genere uno e con tre rette doppie,*

(*) E per questo basterà che il piano da cui si è fatta la proiezione stia in un $S_5$ contenente una conica di $F^8$ stessa e tre altri punti di questa superficie (che supponiamo scelti in modo generale).

*in questo caso concorrenti. Anch'essa ha 7 punti e 2 piani singolari; questi ultimi contengono rispettivamente due inviluppi quadrici di rette della congruenza; i 7 punti sono vertici rispettivamente di un cono quartico razionale (le cui generatrici doppie sono le stesse tre rette doppie della congruenza) e di sei coni quadrici.* Da ciascuno di questi punti singolari esce ancora, fuori del relativo cono, *un* raggio della congruenza; in ciascuno dei due piani singolari ne stanno, fuori del relativo inviluppo, altri *tre*. La congruenza contiene due serie razionali $\infty^1$ di rigate quadriche, ecc. ecc.

Anche questa congruenza fu ottenuta dai sig.i Segre e Castelnuovo come proiezione di una varietà cubica di $S_4$ con 7 punti doppi (*). La superficie focale di questa congruenza (di sesto ordine e decima classe) è tale anche per due sistemi (3, 5) della prima specie (n.° 36) costituiti rispettivamente dalle direttrici delle due serie $\infty^1$ di rigate quadriche poc'anzi nominate. Il sig. Castelnuovo osserva ancora che questa seconda congruenza (3, 5) è *Cremoniana*, e stabilisce fra i piani dei due inviluppi quadrici una corrispondenza birazionale del quinto ordine, in cui il vertice del cono quartico è punto fondamentale triplo comune ai due piani, i vertici dei coni quadrici sono punti fondamentali doppi, e i tre punti fondamentali semplici sono in ciascun piano infinitamente vicini al punto triplo.

**40.** Nel caso *c*) infine sappiamo già che la superficie $F^8$ dovrebbe avere *sei* punti doppi. Supposto pertanto che questa superficie possa effettivamente rappresentare una congruenza (2, 6) o (6, 2), si consideri la quadrica (passante per essa) che rappresenterebbe l'insieme di tutte le rette di $S_3$, e con questa il relativo $S_4$ tangente in uno di quei sei punti ($P$). Questo spazio segherà quella quadrica in un cono che noi potremo considerare ad es. come luogo di una serie $\infty^1$ di piani appartenenti al sistema di quelli che segano $F$ in soli *due* punti; ed essendo il vertice $P$ di questo cono già un punto doppio di $F$, è chiaro che uno qualunque di quei piani o non incontrerà più $F$ medesima, o avrà comuni con essa infiniti punti. Ma quell'$S_4$ deve segare $F$ in una curva, complessivamente, di ottavo ordine (contenuta in questo stesso cono); questa curva dovrà dunque spezzarsi in due o più parti, contenute rispettivamente in altrettanti di quei piani; e si vede facilmente che dovrà sempre spezzarsi in

(*) Ora resta stabilito che le congruenze (3, 5) di genere uno rappresentabili sul piano possono presentare due e due soli cási diversi; quei casi appunto che furono ottenuti e studiati dagli stessi sig.i Segre e Castelnuovo.

due quartiche piane, razionali e irriduttibili, con tre punti doppi ciascuna (*). Uno di questi punti doppi dovrà cadere, tanto per l'una quanto per l'altra, in $P$ stesso (**); gli altri saranno poi anch'essi punti doppi di $F$, sicchè i piani delle due quartiche dovranno congiungere lo stesso $P$ rispettivamente a due altre coppie di tali punti, e ciascuna quartica dovrà passare doppiamente per i tre punti doppi di $F$ che stanno nel suo piano. Da ciò si trae facilmente che la superficie $F^8$ di $S_5$ conterrà 4 quartiche piane razionali, i cui piani s'incontreranno a due a due nei suoi *sei* punti doppi; e che ogni quartica dovrà passare doppiamente per quei tre fra questi punti che stanno nel suo piano. Per avere dunque una $F^8$ (priva di rette) che rappresenti una congruenza (2, 6) o (6, 2), data la cosa come possibile, bisognerà certo proiettare la $F^8$ normale di seconda specie da un piano incidente alle 6 corde in cui si segano a due a due gli $S_4$ di 4 sue quartiche (piano che sarebbe appunto l'intersezione degli $S_7$ determinati da questi stessi $S_4$ a due a due).

Viceversa, così facendo, si trova precisamente una $F^8$ di $S_5$ con quattro quartiche piane e sei punti doppi nella posizione accennata di sopra. I piani di queste quattro curve stanno su ogni quadrica passante per $F^8$, e d'altra parte essi, cogli altri quattro che li segano a tre a tre in rette, costituiscono la varietà base di un sistema lineare $\infty^2$ di quadriche, nel quale (come si vede subito) vi è tutto un fascio (di caratteristica [(11) (11) (11)]) passante per $F$. Dnnque:

*Esiste un'altra congruenza* (2, 6) *di genere uno, con sei rette doppie e* 12 *punti singolari,* che sono rispettivamente vertici di quattro coni quartici (razionali) e di otto coni quadrici. *Questa congruenza è contenuta in un complesso tetraedrale,* il cui tetraedro fondamentale ha per vertici quelli stessi dei coni quartici e per spigoli le sei rette doppie; essa non contiene però fasci di raggi (e non ha quindi piani singolari); ecc. ecc.

Ritroviamo dunque la nota congruenza $(2, 6)_1$ studiata dai sig.[i] Kummer, Reye, Stahl, Bertini, Loria, e ultimamente ancora dal sig. Sturm (cfr. anche la nota ultima al n.° 37).

---

(*) Un ragionamento analogo avrebbe potuto servirci anche per giungere alla prima congruenza (2, 6) (cfr. n.° 37). Le considerazioni qui svolte sono, in parte almeno, la traduzione di quelle già applicate dal sig. Kummer (loc. cit.) ai sistemi di rette di secondo ordine.

(**) Ciò perchè quelle due curve dovrebbero tagliarsi in due punti, e d'altra parte il punto $P$ è il solo che sia comune ai loro piani.

I risultati principali che si sono ottenuti in questo lavoro potrebbero dunque riassumersi così:

Il solo sistema (3, 3) (*) contenuto in un complesso lineare e non avente infinite rette doppie è di genere *quattro* e risulta appunto dall'intersezione di un complesso lineare con un complesso cubico. Le altre congruenze (3, 3) non aventi infinite rette doppie sono di genere $\leq 2$; la più generale fra esse è quella di ROCCELLA (di genere *due*) con 12 punti e 12 piani singolari; ma questi punti e piani possono portarsi a 13, 14 o anche 15; nel secondo caso si ha la congruenza *Cremoniana* di HIRST; nel terzo caso si ha una particolare congruenza Cremoniana già considerata anche dal ROCCELLA.

I sistemi di rette $(m, 7-m)$ non contenuti in complessi lineari speciali sono di genere $\leq 3$. Quelli di genere *tre* sono del tipo (3, 4) o (4, 3) e si possono sempre ottenere come intersezioni di due complessi quadratici (aventi una stella o un piano di rette a comune). Quelli di genere *due* sono pure di terzo ordine o terza classe, e in questa seconda ipotesi può anche presentarsi il caso di una congruenza [(4, 3)] *Cremoniana.*

Prescindendo dal sistema (4, 4) di genere *nove* che è intersezione generale di un complesso lineare con un complesso di quarto grado, nessun'altra congruenza $(m, 8-m)$ non avente infinite rette doppie può stare in un complesso lineare non speciale. E di congruenze $(m, 8-m)$ non contenute affatto in complessi lineari ne esistono solo per i generi non superiori a *cinque.*

Unica congruenza $(m, 8-m)$ di genere *cinque* è quella (4, 4), intersezione generale di due complessi quadratici.

Esistono congruenze (4, 4) e anche (3, 5) o (5, 3) di genere *quattro;* le prime sono contenute in complessi quadratici di caratteristica, nel caso più generale, [(11) (11) 11]; le altre in complessi tetraedrali (o in casi particolari di questi). Queste ultime sono sempre rappresentabili sul piano, e appaiono (salvo errore) in particolar modo notevoli e interessanti.

Di congruenze $(m, 8-m)$ di genere $p=3$ ne esistono pure, tanto per $m=4$, quanto per $m=3$ o 5. Nel primo caso la congruenza può anche essere iperellittica.

Gli stessi due casi possono presentarsi per $p=2$; e se $m=5$ la con-

(*) Si tratta sempre, ben inteso, di congruenze con sola superficie focale.

gruenza [(5, 3)] può anche essere *Cremoniana*. Si ha così la congruenza determinata da due piani riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine, e messi nella posizione più generale.

Infine per $p = 1$ abbiamo ritrovate le note congruenze di secondo ordine (o di seconda classe) con sola superficie focale, e quelle di terzo ordine che i sig.[i] Segre e Castelnuovo hanno ottenute come proiezioni di opportune varietà cubiche di $S_4$. Abbiamo anche osservato che queste ultime sono (con qualche restrizione) le più generali fra le congruenze (3, $n$) di genere *uno*.

Per $m + n = 8$ abbiamo anche trovate due diverse congruenze (4, 4), sempre di genere *uno*, con *quattro* punti e *quattro* piani singolari ciascuna.

Torino, febbraio 1893.