Bollettino Unione Matematica Italiana

Vincenzo Mantova

Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietà algebriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **6** (2013), n.3, p. 693–697.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_3_693_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 693-697

Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietà algebriche

V. Mantova

Sommario. – *Il classico teorema di approssimazione di Artin-Whaples afferma che dati n valori assoluti indipendenti su un campo K, e n punti associati in $\mathbb{P}_1(K)$, esiste un punto in $\mathbb{P}_1(K)$ che approssima simultaneamente con precisione voluta ognuno dei punti dati rispetto ai valori assoluti corrispondenti. Una forma molto nota ed elementare è il teorema cinese dei resti.*

Se a $\mathbb{P}_1$ si sostituisce un'altra varietà algebrica, esistono risultati analoghi a patto di ingrandire il campo di definizione dei punti approssimanti; tuttavia, essi sono poco espliciti, e non si possono considerare generalizzazioni in senso proprio.

Descriviamo qui una generalizzazione alle varietà algebriche dimostrabile in modo semplice che produce inoltre stime esplicite e uniformi per i gradi dei punti approssimanti.

Un classico risultato in teoria dei numeri è il seguente teorema di approssimazione [1]:

Teorema 1 (Artin-Whaples). – *Sia K un campo e siano $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ dei valori assoluti indipendenti di K. Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è una sequenza di elementi di K, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $\beta \in K$ tale che $|\beta - \alpha_i|_i < \varepsilon$ per ogni $1 \leq i \leq n$.*

Nel caso $K = \mathbb{Q}$ e con valori assoluti p-adici, il teorema è essenzialmente una forma alternativa del teorema cinese del resto: trovare un β tale che $|\beta - \alpha_i|_{p_i} < p_i^{-k_i}$ significa trovare una soluzione al sistema di congruenze $x \equiv \alpha_i \bmod p_i^{k_i}$.

Di fatto, il teorema può essere ulteriormente generalizzato scegliendo gli elementi α_i nei vari completamenti di K nei rispettivi valori assoluti $|\cdot|_i$. Possiamo anche assumere che α_i sia il punto all'infinito $\infty \in \mathbb{P}_1(K_i)$.

In questo contesto l'enunciato può essere riformulato in termini di densità. Siano d_i delle distanze associate agli $|\cdot|_i$ su $\mathbb{P}_1(K_i)$.

Teorema 1′ – *Sia K un campo e siano $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ dei valori assoluti indipendenti di K, con distanze associate d_i su $\mathbb{P}_1(K_i)$. Dati dei punti $Q_i \in \mathbb{P}_1(K_i)$,* *per* $i = 1, \ldots, n$*, e dato* $\varepsilon > 0$*, esiste un punto* $P \in \mathbb{P}_1(K)$ *tale che* $d(P, Q_i) < \varepsilon$ *per ogni* $1 \leq i \leq n$*.*

In altre parole, l'immersione diagonale

$$\mathbb{P}_1(K) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_1(K_i)$$

ha immagine densa.

Ci chiediamo, quindi, se sia possibile sostituire a $\mathbb{P}_1$ un'altra varietà algebrica V definita su K: *dati dei punti* $Q_i \in V(K_i)$*, è possibile trovare un* $P \in V(K)$ *vicino a* Q_i *rispetto a* $|\cdot|_i$ *simultaneamente per* $i = 1, \ldots, n$*?*

La risposta è ovviamente negativa, poiché molte varietà non hanno abbastanza punti per produrre un'approssimazione; per esempio, $V(K)$ può essere finito, come nel caso di curve di genere ≥ 2. Una possibilità per aggirare quest'ostacolo è di ammettere punti approssimanti definiti su un'estensione di K, ad esempio sulla chiusura algebrica $\overline{K}$. Ci sono vari modi per estendere i valori assoluti dati a $\overline{K}$; per questo, ad ogni $|\cdot|_i$ associamo un'estensione fissata $\overline{K}$, che prendiamo come dato del problema, e cerchiamo P vicino a Q_i rispetto all'estensione data.

Un esempio semplice che illustra bene il tipo di difficoltà è dato dalle curve iperellittiche. Supponiamo che V sia una curva piana definita dall'equazione $y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio su K, e $Q_1 = (x_1, y_1)$, $Q_2 = (x_2, y_2)$ siano due punti da approssimare rispetto a due valori assoluti $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$. In questo caso, un primo approccio potrebbe iniziare usando il teorema di Artin-Whaples per approssimare la prima coordinata con un $\beta \in K$ vicino a x_1 rispetto a $|\cdot|_1$, e vicino a x_2 rispetto a $|\cdot|_2$, e controllare quale delle due radici $\pm\sqrt{p(\beta)}$ approssima y_1 e y_2.

Tuttavia, se la distanza richiesta è sufficientemente piccola, solo una delle due radici $\pm\sqrt{p(\beta)}$ può essere vicina a y_1 rispetto a $|\cdot|_1$, e può accadere che la radice trovata sia lontana da y_2 rispetto a $|\cdot|_2$; in questo caso, nessuno dei due punti $(\beta, \pm\sqrt{p(\beta)})$ è approssimante. Di fatto l'aritmetica del campo può impedire questa costruzione, e si possono dare esempi espliciti in cui, qualunque sia β, i punti ottenuti come sopra non sono approssimanti [4].

Ciò nonostante la risposta alla domanda originale per $P \in V(\overline{K})$ è affermativa, e si possono dare alcune stime esplicite per il grado di P.

TEOREMA 2 ([4]). – *Sia* V *una sottovarietà assolutamente irriducibile di* $\mathbb{P}_N$ *di grado* d *e definita su* K*. Siano dati* $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ *valori assoluti indipendenti su* K*, con estensioni fissate a* $\overline{K}$ *e con distanze associate* $d_1, \ldots, d_n$ *su* $V(\overline{K})$*. Dati dei punti* $Q_i \in V(K_i)$*, per* $i = 1, \ldots, n$*, e dato* $\varepsilon > 0$ *esiste un punto* $P \in V(\overline{K})$ *tale che* $d(P, Q_i) < \varepsilon$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$*, e inoltre*

$$[K(P) : K] \leq d^{|S| \cdot (\min\{2, \dim(V)+1\}) - 1}.$$

In particolare, l'immersione diagonale

$$V(\overline{K}) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} V(\overline{K}_i)$$

ha immagine densa.

Nel caso in cui $V = \mathbb{P}_1$, abbiamo $d = 1$, quindi $P \in \mathbb{P}_1(K)$, e recuperiamo il teorema di Artin-Whaples come caso speciale.

Se il campo base è globale, l'enunciato qualitativo senza stime sul grado discende già da un principio di densità isolato da Rumely [9] nella dimostrazione del suo principio locale-globale (originariamente ottenuto tramite la teoria della capacità, e poi ridimostrato con tecniche differenti da Moret-Bailly [7, 8] e da Green, Pop e Roquette [3]). Il principio di Rumely fallisce però su campi più generali, come mostrato da un esempio di Raynaud [6].

Inoltre, il principio di Rumely è sensibilmente più forte della generalizzazione qui sopra, in quanto, ad esempio, dimostra che il punto P si può trovare vicino a Q_i rispetto a *tutte* le estensioni di $|\cdot|_i$ a $\overline{K}$, e anche che sotto opportune condizioni P è S-intero. In questo senso, il teorema di Rumely richiama il teorema di approssimazione forte, anch'esso riguardante punti S-interi e valido solo su campi globali. Inoltre, le poche stime sul grado che si trovano in letteratura si applicano solo a varietà di tipo specifico [2, 5], non sono uniformi nei restanti dati del problema e non permettono di recuperare il teorema di Artin-Whaples come caso speciale.

La dimostrazione del Teorema 2 può essere ottenuta in modo piuttosto semplice utilizzando strumenti classici di geometria algebrica. Come primo passo dimostriamo il caso delle curve, che porta ad un enunciato lievemente più fine.

Data una curva $\mathcal{C}$, siano p_a il suo genere aritmetico e $G(K, \mathcal{C})$ la *gonalità* di $\mathcal{C}$ su K, cioè il minimo grado di una funzione non costante definita su K e regolare in tutti i punti singolari di $\mathcal{C}$.

TEOREMA 3. – *Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva assolutamente irriducibile definita su K, e sia p_a il suo genere aritmetico. Siano dati $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ valori assoluti indipendenti su K, con estensioni fissate a $\overline{K}$ e con distanze associate $d_1, \dots, d_n$ su $\mathcal{C}(\overline{K})$. Dati dei punti $Q_i \in \mathcal{C}(K_i)$, per $i = 1, \dots, n$, e dato $\varepsilon > 0$ esiste un punto $P \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tale che $d(P, Q_i) < \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e inoltre $[K(P) : K] \leq G(K, \mathcal{C}) \cdot (p_a + 1)^{|S|-1}$.*

Scriviamo qui solo i passi principali della dimostrazione; maggiori dettagli possono essere trovati in [4].

DIMOSTRAZIONE. – L'idea non è dissimile dall'approccio presentato qui sopra per la curva piana $y = p(x)$. Per aggirare il problema della doppia scelta della radice $\sqrt{p(x)}$, che impedisce di portare a termine la costruzione, sostituiamo la coordinata x con una funzione z totalmente ramificata nel primo punto Q_1; in questo modo, non appena il valore di z si avvicina a $z(Q_1)$ rispetto al primo valore assoluto, tutti i punti sulla sua fibra saranno vicini a Q_1. A questo punto basta scegliere il punto della fibra che cade vicino al secondo punto Q_2, rispetto al secondo valore assoluto, per risolvere il problema per due punti.

A patto di correggere Q_1 con un punto vicino che sia algebrico su K e non singolare, l'esistenza di una funzione totalmente ramificata in Q_1 e definita su K è garantita, per esempio, dalla formula di Riemann-Roch, che mostra anche che il grado della funzione può essere limitato da $(p_a + 1)$. La correzione del punto Q_1 produce il termine $G(K, \mathcal{C})$ nella stima.

Il caso generale di n punti si può ricavare per induzione: è sufficiente scegliere una funzione che sia totalmente ramificata nel punto che approssima i primi $n - 1$ punti. $\square$

Da quest'ultimo enunciato è immediato ricavare il Teorema 2 per le curve: è sufficiente applicare le stime classiche $G(K, \mathcal{C}) \leq d$ e $(p_a + 1) \leq d(d + 1)/2$.

Il Teorema 2 per le varietà di dimensione più alta si può ottenere tagliando la varietà con un opportuno sottospazio, in modo che l'intersezione sia una curva assolutamente irriducibile che passi vicino ai punti da approssimare; a quel punto è sufficiente applicare il Teorema 3. Per esempio, si può prendere una famiglia a un parametro di sottospazi che intersechi la varietà in una curva, e poi usare il teorema di Artin-Whaples per scegliere un sottospazio che sia vicino ai sottospazi della famiglia passanti per i punti da approssimare. Questo approccio produce un ulteriore termine d^n nella stima del grado di P.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTIN EMIL e GEORGE WHAPLES, *Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations*. Bulletin of the American Mathematical Society, pagine 469-492, 1945.

[2] ERNÉ REINIE, *On the degree of integral points of a projective space minus a horizontal hypersurface*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 532:151-177, maggio 2001, ISSN 07644442.

[3] GREEN BARRY, FLORIAN POP e PETER ROQUETTE, *On Rumely's local-global principle*. Jahresbericht der Deutschen Matematiker-Vereinigung, 97:43-74, 1995.

[4] MANTOVA VINCENZO e UMBERTO ZANNIER, *Artin-Whaples approximations of bounded degree on algebraic varieties*. Proceedings of the American Mathematical Society. In stampa.

[5] MIKKELSEN PER, *Effective bounds for integral points on arithmetic surfaces*. Journal füur die reine und angewandte Mathematik, 1998(496):55-72, marzo 1998, ISSN 0075-4102.

[6] MORET-BAILLY LAURENT, *Points entiers des variétés arithmétiques*. Nel Goldstein, Catherine (curatore): *Séminaire de théorie des nombres*, Paris 1985-86, pagine 147-154, Paris, 1987. Birkhäuser.

[7] MORET-BAILLY LAURENT, *Groupes de Picard et problémes de Skolem. II*. Annales scientifiques de l'É.N.S., 22(2):181-194, 1989.

[8] MORET-BAILLY LAURENT, *Applications of Local-Global Principles to Arithmetic and Geometry*. Nel Denef, Jan, Leonard Lipshitz, Thanases Pheidas e Jan Van Geel (curatori): *Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry.*, volume 270 della serie *Contemporary Mathematics*, pagine 169-186. American Mathematical Society, Providence, 2000, ISBN 0-8218-2622-0.

[9] RUMELY ROBERT S., *Capacity Theory on Algebraic Curves*, volume 1378 della serie *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989, ISBN 978-3-540-51410-7.

Scuola di Scienze e Tecnologie, Sezione di Matematica - Università degli Studi di Camerino
Via Madonna delle Carceri 9, 62032 Camerino (MC), Italia
E-mail: vincenzo.mantova@unicam.it

Received November 30, 2012 and in revised form November 2, 2013