Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Bigolin

Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nei gruppi di Heisenberg

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **6** (2013), n.3, p. 685–692.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_3_685_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 685-692

Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nei gruppi di Heisenberg

FRANCESCO BIGOLIN

Sommario. – *Lo scopo di questa conferenza è quello di presentare le relazioni tra una ipersuperficie regolare intrinseca S nel gruppo di Heisenberg, munito della sua naturale struttura subriemanniana, e la sua parametrizzazione, vista come soluzione debole di un particolare sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, che nel caso del primo gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ si riduce alla classica equazione di Burgers.*

Daremo esposizione dei principali risultati dei lavori [2, 3, 5]. *Non riporteremo per iscritto le dimostrazioni dei vari teoremi enunciati, fornendo però i precisi riferimenti bibliografici e alcuni commenti e osservazioni.*

La conferenza è suddivisa in tre parti: nella prima si presentano alcuni risultati noti sulle leggi di conservazione e si introducono i concetti di soluzione distribuzionale ed entropica; nella seconda si dà una breve introduzione al gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$; nella terza si riportano i risultati principali degli articoli [2, 3, 5] *e in particolare alcune caratterizzazioni delle ipersuperfici regolari intrinseche e delle funzioni intrinsecamente Lipschitz metrico nel gruppo di Heisenberg.*

1. – Leggi di conservazione

In questa sezione richiamiamo alcuni risultati noti riguardanti lo studio delle soluzioni delle leggi di conservazione. Useremo poi questi risultati nella caratterizzazione delle ipersuperfici regolari intrinseche.

Dato $\omega := (0,T) \times (-r_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2$ insieme aperto e date le funzioni $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\omega)$, $u_0 \in L^\infty(-r_0, r_0)$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = g(t,x) & \text{in } \omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } (-r_0, r_0) \end{cases} \tag{1.1}$$

Vale il seguente concetto di soluzione distribuzionale:

DEFINIZIONE 1.1. – $u \in C^0([0,T]; L^1(-r_0,r_0)) \cap L^\infty(\omega)$ *è una soluzione distribuzionale di* (1.1) *se*

i) $\forall\, v \in C_c^\infty(\omega) \quad \int_\omega [uv_t + f(u)v_x + gv]\, dt\, dx = 0,$

ii) $\lim_{t \to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^1(-r_0,r_0)} = 0.$

Poiché le soluzioni distribuzionali non sono uniche, è necessario introdurre un secondo concetto di soluzione debole, per cui ottenere un risultato di unicitá. In particolare Kružkov definisce nel 1970 una nuova classe di soluzioni, le soluzioni entropiche, per le quali si ottiene questo risultato.

DEFINIZIONE 1.2. – *Diciamo che le funzioni* $e, d \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *costituiscono una entropia/flusso di entropia per* (1.1) *se e è convessa e vale* $e' \cdot f' = d'$.

DEFINIZIONE 1.3. – *Siano* $g \in L^1(\omega)$, $u_0 \in L^{\infty}((-r_0, r_0))$. *Diciamo allora che* $u \in C^0([0,T]; L^1(-r_0, r_0)) \cap L^{\infty}(\omega)$ *è una soluzione entropica di* (1.1) *se*

i) $\forall\, v \in C_c^{\infty}(\omega)$ *tale che* $v \geq 0$, $\forall\,(e,d)$ *entropia/flusso di entropia abbiamo*

$$\int_{\omega} [e(u)v_t + d(u)v_x + e'(u)gv]\ dt\,dx \geq 0;$$

ii) $\lim_{t \to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^1(-r_0,r_0)} = 0.$

TEOREMA 1.1 (Kružkov, 1970). – *Data* $g \in L^1(\omega)$, *siano* $u, \tilde{u} \in C^0([0,T]; L^1(-r_0, r_0)) \cap L^{\infty}(\omega)$ *due soluzioni entropiche del problema* (1.1) *tali che*

i) $|u(t,x)| \leq M, \quad |\tilde{u}(t,x)| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \omega$
ii) $u(0,\cdot) = \tilde{u}(0,\cdot)$ *a.e. in* $(-r_0, r_0)$,

allora, per $r < r_0$ *vale* $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ *per* $\mathcal{L}^2 -$ *q.o.* $(t,x) \in (0,T) \times (-r,r)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [9]

In generale, le soluzioni distribuzionali e entropiche di una legge di conservazione (1.1) possono avere delle discontinuità. Nel caso di continuità, si ottiene un particolare risultato di regolarità delle soluzioni distribuzionali lungo le caratteristiche, dimostrato da Dafermos.

TEOREMA 1.2 (Dafermos, 1977, 2006). – *Siano f convessa e* $g \in C^0(\omega)$; *sia u una soluzione distribuzionale continua di* (1.1) *e indichiamo* $v(t) = u(t, \xi(t))$ *per* $t \in [0,T)$. *Allora* $(\xi(t), v(t))$ *soddisfa il sistema di EDO*

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f'(v(t)) \\ \dot{v}(t) = g(t, \xi(t)) \end{cases}$$

in $[0,T)$. *In particolare* $v(t)$ *e* $\dot{\xi}(t)$ *sono Lipschitz in* $[0,T)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [7]

2. – Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{2n+1}$ è l'esempio più semplice di gruppo di Carnot, su cui si definisce una metrica non equivalente alla metrica euclidea. Denotiamo i punti di $\mathbb{H}^n$ con $P = [z, t] = [x + iy, t]$, dove $z \in \mathbb{C}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Dati $P = [z, t]$, $Q = [\zeta, \tau] \in \mathbb{H}^n$ definiamo la legge di gruppo $P \cdot Q := \left[z + \zeta, t + \tau - \frac{1}{2}\Im m(z \cdot \bar{\zeta})\right]$ e la norma su $\mathbb{H}^n$ $\|P\| := \max\{|z|, |t|^{1/2}\}$, da cui si ha la distanza $d_\infty(P, Q) := \|P^{-1} \cdot Q\|$ per $P, Q \in \mathbb{H}^n$.

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$ di campi vettoriali invarianti a sinistra è linearmente generata da

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

gli unici commutatori non banali sono $[X_j, Y_j] = T$, per $j = 1, \dots n$.

Una funzione reale continua f su $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ appartiene a $C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ se il suo gradiente orizzontale $\nabla_{\mathbb{H}} f$, definito da $\nabla_{\mathbb{H}} f := (X_1 f, \dots, X_n f, Y_1 f, \dots, Y_n f)$ nel senso delle distribuzioni, è una funzione vettoriale continua.

Usualmente si identificano i campi vettoriali e gli operatori differenziali del primo ordine associati, si ha quindi che $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ generano un fibrato vettoriale su $\mathbb{H}^n$, chiamato fibrato orizzontale $H\mathbb{H}$, che è un sottofibrato del fibrato tangente di $\mathbb{H}^n$. Per ogni punto $P \in \mathbb{H}^n$ la fibra orizzontale è indicata da $H\mathbb{H}_P$ e su ogni fibra si definiscono il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ e la norma associata $|\cdot|_P$ che rendono il campo vettoriale $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ ortonormale. Nel seguito denoteremo $\mathbb{W} := \{P \in \mathbb{H}^n : x_1 = 0\}$ e $v = (x_2, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n)$.

Possiamo ora introdurre le ipersuperfici regolari intrinseche (o ipersuperfici $\mathbb{H}$-regolari):

DEFINIZIONE 2.1. – *Definiamo un insieme $S \subset \mathbb{H}^n$ ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare se localmente esiste una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ tale che S è definito come l'insieme dei punti $P \in \mathbb{H}^n$ tali che $f(P) = 0$ e $\nabla_{\mathbb{H}} f(P) \neq 0$.*

Quindi una ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare S si può vedere localmente come luogo di zeri di una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ con $X_1 f \neq 0$. Infine si definisce la *normale orizzontale* a S nel punto $P \in S$ $v_S(P)$, come il versore $v_S(P) := -\dfrac{\nabla_{\mathbb{H}} f(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}} f(P)|_P}$.

In [8] si dimostra un teorema delle funzioni implicite per una ipersuperficie regolare intrinseca così definita.

TEOREMA 2.1 (Franchi, Serapioni, Serra Cassano, 2001). – *Sia $S \subset \mathbb{H}^n$ una ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare. Se $X_1 f \neq 0$, allora esiste localmente una parametrizzazione $\Phi : \omega \subset \mathbb{W} \equiv \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{H}^n$ tale che $S = \Phi(\omega)$.*

$S = \Phi(\omega)$ è chiamato un X_1-*grafico*: esiste cioè una funzione $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$, tale che $S = \{A \cdot \phi(A)\, e_1 : A \in \omega\}$. Data $\phi : \omega \to \mathbb{R}$, $\Phi : \omega \to \mathbb{H}^n$ indica la corrispondente funzione parametrica, definita per $A \in \omega$

$$
\begin{aligned}
\Phi(A) &= A \cdot \phi(A)\, e_1 = \\
&= \Big(\phi(y_1, t), y_1, t - \frac{y_1}{2}\phi(y_1, t)\Big) \quad \text{se } n = 1 \\
&= \Big(\phi(y_1, v, t), x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, t - \frac{y_1}{2}\phi(y_1, v, t)\Big) \quad \text{se } n \geq 2.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

3. – Caratterizzazioni delle ipersuperici regolari intrinseche

In [1] si dà una caratterizzazione della parametrizzazione $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$, che viene considerato come soluzione del sistema di EDP non lineari del primo ordine

$$
\nabla^{\phi}\phi = w \qquad \text{in} \quad \omega, \tag{3.1}
$$

dove ∇^{ϕ} è la famiglia di operatori differenziali del primo ordine definiti da

$$
\nabla_j^{\phi} := \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \dfrac{y_j}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } 2 \leq j \leq n \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } j = n+1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_{j-n}} + \dfrac{x_{j-n}}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } n+2 \leq j \leq 2n, \end{cases}
$$

se $n \geq 2$ e da $\nabla^{\phi} := \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial}{\partial t}$ se $n = 1$.

In particolare si osservi che l'operatore differenziale non lineare $C^1(\omega) \ni \phi \to \mathfrak{B}\phi := \nabla^{\phi}_{n+1}\phi$ è un operatore di tipo Burgers che può essere rappresentato in forma distribuzionale come $\mathfrak{B}\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi^2}{\partial t}$.

In [1] l'operatore $\nabla^{\phi}\phi$ è stato caratterizzato come gradiente intrinsico di ϕ in una struttura differenziale proiettata su $\mathbb{W}$ dalla struttura differenziale di $\mathbb{H}^n$ tramite la parametrizzazione $\phi : \omega \to S$. Il risultato principale di [1] (teoremi 1.2 e 1.3) è il seguente:

TEOREMA 3.1. – *Sia $\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ un insieme aperto e sia $\phi : \omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $S = \Phi(\omega)$, dove Φ è la parametrizzazione in* (2.1). *Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) *S è una superficie $\mathbb{H}$-regolare;*

ii) *la distribuzione* $\nabla^{\phi}\phi$ *è rappresentata da una funzione* $w = (w_2, \dots, w_{2n}) \in C^0(\omega; \mathbb{R}^{2n-1})$ *ed esiste una famiglia* $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^1(\omega)$ *tale che, per ogni insieme aperto* $\omega' \Subset \omega$, *abbiamo*

$$\phi_\varepsilon \to \phi \text{ e } \nabla^{\phi_\varepsilon}\phi_\varepsilon \to w^* \textit{uniformemente in } \omega'. \tag{3.2}$$

In più abbiamo che $\phi \in h^{1/2}_{loc}(\omega)$, cioè per ogni insieme aperto $\omega' \Subset \omega$ vale

$$\lim_{r\to 0^+} \sup\left\{ \frac{|\phi(A) - \phi(B)|}{\sqrt{|A-B|}} : A, B \in \omega', 0 < |A-B| < r \right\} = 0\,.$$

Dimostrazione. – Cfr. [1]

Questa caratterizzazione motiva i metodi e le tecniche usate nel lavoro. Questi derivano infatti principalmente dalla teoria delle EDP non lineari del primo ordine e dallo studio dell'equazione di Burgers. In particolare è fondamentale lo studio di due classi di soluzioni deboli: le soluzioni distribuzionali dell'equazione $\dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = w$ e le soluzioni broad* del sistema (3.1).

Definizione 3.1. – *Chiamiamo soluzione broad* del sistema* (3.1) *una funzione continua* $\phi : \omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *tale che per ogni* $A \in \omega$, $\forall j = 2, \dots, 2n$ *esiste una mappa esponenziale,*

$$\gamma_j^B(s) = \exp(s\nabla_j^{\phi})(B) : [-\delta, \delta] \times \overline{I} \to \overline{J} \subset \omega$$

dove I *e* J *sono intorni di* A, $\delta > 0$ *e* $s \in [-\delta, \delta]$, *tali che* $\forall B \in I$

(E.1) $\gamma_j^B \in C^1([-\delta, \delta])$

(E.2) $\begin{cases} \dot{\gamma}_j^B = \nabla_j^{\phi} \circ \gamma_j^B \\ \gamma_j^B(0) = B \end{cases}$

(E.3) $\phi\left(\gamma_j^B(s)\right) - \phi\left(\gamma_j^B(0)\right) = \displaystyle\int_0^s w_j\left(\gamma_j^B(r)\right) dr \qquad \forall s \in [-\delta, \delta]$

I risultati principali di questo intervento sono le seguenti caratterizzazioni, dimostrate in [2, 3]:

Teorema 3.2 (B., Serra Cassano 2010). – *Se* $\phi \in C^0(\omega)$ *e* $w \in C^0(\omega, \mathbb{R}^{2n-1})$ *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

i) $S = \Phi(\omega)$ *è una ipersurperficie* $\mathbb{H}$*-regolare in* $\mathbb{H}^n$ *e*

$$\nu_S(P) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}, \frac{w}{\sqrt{1+|w|^2}} \right)(\phi^{-1}(P)) \qquad \forall P \in S;$$

ii) *ϕ è una soluzione broad* del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$;*

iii) *ϕ è una soluzione distribuzionale del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

La caratterizzazione data nel teorema 3.2 è l'esatta controparte di quello nel caso euclideo. Più precisamente una funzione $\phi \in C^1(\omega)$ può essere vista come soluzione distribuzionale di $\nabla\phi = w$ in ω, se $w \in C^0(\omega; \mathbb{R}^m)$ e $\omega \subset \mathbb{R}^m$ è aperto.

Si osservi che non è richiesta la forte ipotesi di esistenza dell'approssimazione (3.2) di ϕ fatta in [1]. La dimostrazione non è immediata e la continuità delle soluzioni broad* e distribuzionali gioca un ruolo centrale nel discorso: infatti sfruttando un risultato di [7] si prova che se la funzione ϕ è continua, i concetti di soluzione broad* e distribuzionale coincidono. Si dimostra l'equivalenza tra i punti **i** e **ii** sfruttando la regolarità della soluzione broad* lungo le sue linee caratteristiche, che dal punto di vista della geometria intrinseca di $\mathbb{H}^n$ sono le curve esponenziali dei campi ∇_j^{ϕ}.

Oltre alla caratterizzazione già descritta, presentiamo alcuni risultati di unicità per soluzioni broad* di (3.1) uniformemente limitate e la loro interpretazione geometrica: se due ipersperfici $\mathbb{H}$-regolari con la stessa normale orizzontale sono la stessa ipersuperficie se hanno una curva verticale in comune nel caso di $\mathbb{H}^1$ oppure se hanno un punto in comune nel caso di $\mathbb{H}^n$. Le tecniche di dimostrazione si rifanno ai risultati di [9]. Indicheremo con $I_{r_0}(A_0)$ un intorno centrato nel punto A_0 di raggio r_0.

TEOREMA 3.3 (B., Serra Cassano, 2010). – *Dato $A_0 = (y_{1,0}, t_0) \in \mathbb{R}^2$, siano $\phi_1, \phi_2 \in C^0(\overline{I_{r_0}(A_0)})$ soluzioni broad* del problema*

$$\begin{cases} \nabla^{\phi}\phi = w & w \in C^0(I_{r_0}(A_0)) \\ \phi(y_{1,0}, t) = \phi_0(t) & \phi_0 \in C^0([t_0 - r_0, t_0 + r_0]) \end{cases}$$

tali che $|\phi_i(A)| \le M \quad \forall A \in \overline{I_{r_0}(A_0)}\,(i = 1, 2)$.

Allora $\phi_1 = \phi_2$ in $I_r(A_0)$ if $0 < r < \dfrac{r_0}{1 + M}$.

TEOREMA 3.4 (B., Serra Cassano, 2010). – *Dato $A_0 = (y_{1,0}, v_0, t_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, siano $\phi_1, \phi_2 \in C^0(\overline{I_{r_0}(A_0)})$ soluzioni broad* del problema*

$$\begin{cases} \nabla^{\phi}\phi = w & w \in C^0(I_{r_0}(A_0), \mathbb{R}^{2n-1}) \\ \phi(A_0) = a & a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tali che $|\phi_i(A)| \le M \quad \forall A \in \overline{I_{r_0}(A_0)}\,(i = 1, 2)$.

Allora $\phi_1 = \phi_2$ in $I_r(A_0)$ if $0 < r < \dfrac{r_0}{1 + M}$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [2]

Studiamo infine la regolarità euclidea di un grafico $\mathbb{H}$-regolare $S = \Phi(\omega)$ attraverso la regolarità del suo gradiente intrinseco $\nabla^{\phi}\phi$:

TEOREMA 3.5 (B., Serra Cassano 2010). – *Sia $\phi \in C^0(\omega)$, $\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, una soluzione distribuzionale di $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

i) *Caso $n = 1$: se $\nabla^{\phi}\phi \in Lip(\omega)$ allora $\phi \in Lip(\omega)$.*

ii) *Caso $n \geq 2$: se $\phi, w_j \in Lip(\omega)$ $\forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ allora $\phi \in C^1(\omega)$.*
Se $w_j \in C^k(\omega)$ $\forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ allora $\phi \in C^k(\omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [2]

La regolarità euclidea della parametrizzazione di una ipersuperficie regolare intrinseca dipende quindi dalla regolarità del gradiente intrinseco $\nabla^{\phi}\phi$, analogamente al caso euclideo. Osserviamo che il teorema nel caso $n = 1$ è ottimale: infatti esistono superfici $\mathbb{H}$-regolare in $\mathbb{H}^1$ tali che $W^{\phi}\phi \equiv 0 \in C^{\infty}(\omega)$ ma $\phi \in Lip(\omega) \setminus C^1(\omega)$, ad esempio $\phi(y_1, t) := \dfrac{t}{y_1 + \frac{t}{|t|}}$.

Possiamo riassumere questi risultati dal punto di vista delle leggi di conservazione nel seguente corollario:

COROLLARIO 3.1 (B., Serra Cassano, 2010). – *Data una sorgente $w \in C^0(\omega)$ e una soluzione distribuzionale continua del problema $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi^2}{\partial t} = w$ allora*

i) *esiste una successione $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset C^1(\omega)$ tale che $\phi_\varepsilon \to \phi$ e $\dfrac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi_\varepsilon^2}{\partial t} \to w$ in $L^{\infty}_{loc}(\omega)$;*

ii) *ϕ è localmente piccolo Hölderiana in ω di ordine $1/2$, cioè $\forall\ \omega' \Subset \omega$ vale*

$$\lim_{r \to 0^+} \sup \left\{ \frac{|\phi(A) - \phi(B)|}{\sqrt{|A - B|}} : A, B \in \omega', 0 < |A - B| < r \right\} = 0;$$

iii) *Se w è Lipschitz, allora anche ϕ è localmente Lipschitz in ω.*

Si osservi che non è richiesto $\phi \in BV(\omega)$.

Concludiamo introducendo le funzioni intrinsecamente Lipschitz nel gruppo di Heisenberg e dandone una caratterizzazione, che riprende la strategia dimostrativa dei risultati già descritti.

DEFINIZIONE 3.2. – *Sia* $\omega \subset \mathbb{W}$ *un insieme aperto e limitato e siano* $A, B \in \omega$. *Sia* $\phi \in C^0(\omega)$, *allora definiamo la distanza grafico come*

$$d_\phi(A, B) := \|\pi_{\mathbb{W}}(\Phi(A)^{-1} \cdot \Phi(B))\|_\infty.$$

DEFINIZIONE 3.3. – *Una funzione* $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ *è intrinsecamente Lipschitz metrico se esiste* $L > 0$ *tale che per ogni* $A, B \in \omega$

$$|\phi(A) - \phi(B)| \leq L d_\phi(A, B).$$

TEOREMA 3.6 (B., Caravenna, Serra Cassano, preprint 2011). – *Sia* $\omega \subset \mathbb{W}$ *un insieme aperto e limitato e siano* $\phi \in C^0(\omega)$, $w \in L^\infty(\omega, \mathbb{R}^{2n})$. *Allora* ϕ *è intrinsecamente Lipschitz metrico se e solo se* ϕ *è una soluzione distribuzionale del problema* $\nabla^\phi \phi = w$ *in* ω.

DIMOSTRAZIONE. – cfr. [5]
$\Longrightarrow$ si usa un risultato di approssimazione di [6]
$\Longleftarrow$ si ottiene dalla lipschitzianità di ϕ lungo le curve caratteristiche e dimostrando la regolarità hölderiana di ϕ, nello spirito di [2].

REFERENCES

[1] AMBROSIO L., SERRA CASSANO F. and VITTONE D., *Intrinsic Regular Hypersurfaces in Heisenberg Groups*, J. Geom. Anal. **16** (2006), 187-232.

[2] BIGOLIN F. and SERRA CASSANO F., *Intrinsic regular graphs in Heisenberg groups vs. weak solutions of non linear first-order PDEs*, Adv. Calc. Var. **3** (2010), 69-97.

[3] BIGOLIN F. and SERRA CASSANO F., *Distributional solutions of Burgers' equation and intrinsic regular graphs in Heisenberg groups*, Journal of Mathmatical Analysis and Applications, **366** (2010), 561-568.

[4] BIGOLIN F. and VITTONE D., *Some remarks about parametrizations of intrinsic regular surfaces in the Heisenberg group*, Publ. Mat. **54** (2010), 159-172.

[5] BIGOLIN F., CARAVENNA L. and SERRA CASSANO F., *Intrinsic Lipschitz graphs in Heisenberg groups and continuous solutions of a balance equation*, Preprint 2012.

[6] CITTI G., MANFREDINI M., PINAMONTI A., and SERRA CASSANO F., *Approximation, area formula and characterization of intrinsic Lipschitz functions in Heisenberg groups*, Preprint 2011.

[7] DAFERMOS C.M., *Continuous solutions for balance laws*, Ric. Mat. **55** (2006), 79-91.

[8] FRANCHI B., SERAPIONI R. and SERRA CASSANO F., *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321** (2001), 479-531.

[9] KRUŽKOV S.N., *First order quasilinear equations in several indipendent variable*, Math. USSR Sb. **10** (1970), 217-243.

Dipartimento di Matematica di Trento
via Sommarive 14, 38050 Povo (Trento), Italia
E-mail: bigolin@science.unitn.it

Received November 30, 2012 and in revised form October 26, 2013