Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Mingione

La teoria di Calderón-Zygmund dal caso lineare a quello non lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **6** (2013), n.2, p. 269–297.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_2_269_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 269-297

La teoria di Calderón-Zygmund dal caso lineare a quello non lineare

Giuseppe Mingione

Sommario. – *La teoria di Calderón-Zygmund per equazioni ellittiche e paraboliche lineari ammette un analogo non lineare che si è andato man mano delineando sempre più chiaramente negli ultimi anni. Di seguito si discutono alcuni risultati validi in questo ambito.*

1. – Divagazione preliminare

Questo testo riprende gli argomenti che ho trattato nella mia conferenza generale all'ultimo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Bologna lo scorso Settembre 2011. Approfitto quindi di questa occasione per tentare un'operazione per me nuova (!), quella di scrivere finalmente un lavoro in italiano. Non che questo si leghi ad una delle gentili richieste degli organizzatori e degli editori del BUMI, ma ho pensato che dopo varie memorie scritte in inglese fosse l'ora di esprimersi almeno una volta anche in italiano. Se ne scrivono sempre meno di lavori in italiano ed è giusto così, per ovvie esigenze di comunicazione; il prezzo che però si paga è quello ovvio: per quanto riguarda la Matematica il linguaggio non si evolve e rigenera secondo i normali ritmi dettati dai cambiamenti della vita quotidiana, diventando statico e via via inattuale, obsoleto. Uno dei sintomi più classici di questo processo è per esempio il prevalere, nelle normali discussioni professionali tra matematici italiani, di un linguaggio ibrido la cui struttura grammaticale di base è quella dell'italiano, ma sulla quale vanno man mano innestandosi, in maniera piuttosto disordinata, vari inglesismi spesso forzati quali ad esempio la coniugazione italiana di verbi stranieri o l'italianizzazione di termini anglofoni. La mancanza di terminologia legata anch'essa alla sempre più rada pratica della scrittura scientifica in italiano, porta all'improvvisazione linguistica, alla traduzione distratta, e, infine, alla mancanza di compiutezza estetica quando non addirittura di correttezza grammaticale. Non si può avere tutto d'altra parte, ma ogni tanto qualche lavoro in italiano non sarebbe male scriverlo, così, per aggiornare la lingua ma anche forse per "mantenersi in allenamento".

ll resto dell'articolo, distaccandosi anche nella presentazione dall'usuale modo di scrivere lavori di rassegna – ne ho già scritti altri su questi argomenti – segue invece abbastanza fedelmente l'ordine e la selezione degli argomenti presentati al Congresso UMI, senza tentare espansioni o contrazioni, ma attenendosi all'esposizione originale degli argomenti e ad una usanza ormai dimenticata, che vede il testo scritto come "trascrizione della conferenza". Il resto del lavoro sarà scritto in prima persona plurale.

2. – Il periodo classico

Nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali la teoria di Calderón-Zygmund classica risponde a domande come "Data un'equazione ellittica o parabolica *lineare*, è possibile determinare in modo ottimale l'integrabilità delle soluzioni in funzione di quella del dato?". Per fissare le idee, è opportuno considerare un problema modello, che ben funge da paradigma per quelli, più generali, che verranno considerati di seguito. Consideriamo allora la classica equazione di Poisson

$$-\triangle u = \mu \,, \tag{2.1}$$

in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Nel caso più generale in cui risultati significativi sono disponibili si può considerare il caso in cui μ rappresenti una misura, mentre per semplicità qui ci limiteremo a considerare il caso in cui $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e a descrivere come si ottengono stime *a priori*. Il caso in cui μ sia una misura può poi essere facilmente trattato tramite usuali procedimenti di approssimazione – si veda ad esempio la Sezione 5 più in basso. Torniamo allora all'equazione modello (2.1). La teoria classica di Calderón-Zygmund afferma la validità della stima *a priori*

$$\|D^2u\|_{L^q} \lesssim \|\mu\|_{L^q} \qquad \text{se } 1<q<\infty \,. \tag{2.2}$$

Quindi, nel caso generale abbiamo

$$\mu \in L^q \Longrightarrow D^2u \in L^q \qquad \text{se } 1<q<\infty \,. \tag{2.3}$$

La precedente implicazione smette di valere nei casi limite $q = 1, \infty$. Inoltre, osserviamo che la (2.3) è dimensionalmente corretta e ottimale: stiamo ottenendo sull'Hessiano la stessa informazione che abbiamo sul Laplaciano, che è la somma delle derivate seconde pure. Diamo allora un'occhiata a possibili strategie dimostrative della (2.2). L'approccio classico fa uso delle formule classiche di rappresentazione. Più precisamente, si usa la rappresentazione via nucleo di convoluzione

$$u(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y) \tag{2.4}$$

dove $G(\,\cdot\,)$ è la funzione di Green

$$G(x-y) \approx \begin{cases} |x-y|^{2-n} & \text{se} \quad n \geq 3 \\ \log\,|x-y| & \text{se} \quad n = 2 \,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Si osservi – per un attimo limitiamoci al caso $n \geq 3$ – che il nucleo $|x|^{2-n}$ è localmente integrabile; quindi osserviamo subito che eventuali formule di maggiorazione per la u, in termini del dato μ, si possono ottenere usando questo fatto, e semplici maggiorazioni quantitative sul nucleo di convoluzione. In altre parole, possiamo limitarci a studiare quanto è grande $G(\,\cdot\,)$ e su questo punto torneremo più tardi, nella Sezione 6.

Adesso, differenziando la (2.4) due volte sotto il segno di integrale, si arriva alla nuova formula di rappresentazione

$$D^2u(x) \approx \int K(x-y)\,d\mu(y) \tag{2.6}$$

dove stavolta $|K(x)| \lesssim |x|^{-n}$ è un nucleo non localmente integrabile. L'analisi della trasformazione naturalmente indotta dalla (2.6) diventa quindi più delicata, e si richiede un procedimento più raffinato: non bastando le sue proprietà di crescita si userà il fatto che il nucleo $K(\,\cdot\,)$ soddisfa comunque delle proprietà di cancellazione che verranno esplicitate mediante un opportuno procedimento di microlocalizzazione. In altre parole, il motto sembra essere: "Quando le proprietà di crescita non bastano, si cerchino quelle di cancellazione". Questo tipo di approccio è oggi un paradigma nella moderna analisi non lineare: ove si presenti una situazione dove si osserva una "crescita critica" che non consente di ottenere risultati basandosi solo sull'analisi di quanto le quantità in gioco "sono grandi", si passa a ottenere risultati scovando la presenza di opportune cancellazioni, che poi si rivelano immancabilmente l'ingrediente fondamentale. Si osservano fenomeni del genere nella teoria delle mappe armoniche, nell'integrabilità per compensazione dei determinanti, nell'analisi di problemi invarianti per trasformazioni conformi – raccomandiamo a questo proposito di dare un'occhiata al recente lavoro di Rivière [77]. Quella che stiamo osservando in questo caso sembra essere una delle prime – se non proprio la prima in assoluto – circostanza in cui tale punto di vista viene seguito in modo esplicito.

Veniamo adesso ai dettagli: la (2.6) spinge appunto a considerare la trasformazione integrale

$$CZ(\mu)(x) := \int K(x-y)\,d\mu(y)\,,$$

definita inizialmente su funzioni lisce a supporto compatto. Si osserva ora che il nucleo $K(\,\cdot\,)$ soddisfa le seguenti proprietà:

$$\|K\|_{L^2} + \|\hat{K}\|_{L^\infty} \leq B\,, \tag{2.7}$$

dove $\hat{K}$ è la trasformata di Fourier di $K(\,\cdot\,)$. Questo, e il classico teorema di Plancherel, permettono di dedurre la limitatezza di $CZ(\,\cdot\,)$ su L^2

$$\|CZ(\mu)\|_{L^2} \lesssim \|\mu\|_{L^2}\,. \tag{2.8}$$

Adesso, ecco *le cancellazioni*: vale la condizione (detta di Hörmander)

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx \leq B \qquad \text{per ogni } \ y \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

che è verificata per una certa costante finita B. Usando (2.7)-(2.9), e poi usando argomenti di interpolazione e dualità usuali, si può adesso dimostrare che

$$\|CZ(\mu)\|_{L^q} \lesssim \|\mu\|_{L^q} \qquad \text{se } 1 < q < \infty \tag{2.10}$$

e che in ultima analisi vale la (2.2). L'approccio appena descritto è stato originariamente introdotto e seguito nei classici lavori [20, 21], dove la condizione di cancellazione (2.9) veniva data in una forma meno generale, più adatta al nucleo considerato in (2.6). Il caso $q=1$ rimane fuori, poiché in generale la (2.2) non vale. Quello che in realtà vale è più debole ma non è meno importante e infatti viene usato come base per i procedimenti interpolativi che poi portano alla (2.10); per questo abbiamo bisogno di introdurre gli spazi di Marcinkiewicz (spazi di Lebesgue deboli).

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia $t \geq 1$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile; una funzione misurabile $w : \Omega \to \mathbb{R}^k$ appartiene a $\mathcal{M}^t(\Omega,\mathbb{R}^k) \equiv \mathcal{M}^t(\Omega)$ se e solo se*

$$\sup_{\lambda\geq 0} \lambda^t |\{x \in \Omega \ : \ |w| > \lambda\}| =: \|w\|^t_{\mathcal{M}^t(\Omega)} < \infty\,. \tag{2.11}$$

Questi spazi sono particolarmente adatti a studiare situazioni limite, ed in particolare i problemi che coinvolgono potenziali Newtoniani, come quelli che stiamo analizzando qui e come quelli che intervengono nell'analisi dei problemi con dato misura. Per esempio, si ha

$$\frac{1}{|x|^{n/t}} \in \mathcal{M}^t(B(0,1)) \setminus L^t(B(0,1))$$

per ogni $t \geq 1$. In generale si ottiene

$$L^t \subsetneqq \mathcal{M}^t \subsetneqq L^{t-\varepsilon} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0\,. \tag{2.12}$$

per quanto riguarda la prima inclusione in (2.12), e per la motivazione stessa della definizione in (2.11), basta osservare che

$$|\{|w|>\lambda\}| = \int_{\{|w|>\lambda\}} dx \leq \int_{\{|w|>\lambda\}} \frac{|w|^t}{\lambda^t}\,dx \leq \frac{\|w\|^t_{L^t}}{\lambda^t}$$

cosicché $\|w\|_{\mathcal{M}^t} \leq \|w\|_{L^t}$. Abbiamo allora che il caso limite della (2.10) è dato da

$$\|CZ(\mu)\|_{\mathcal{M}^1} \lesssim \|\mu\|_{L^1} \tag{2.13}$$

e, in ultima analisi,

$$\|D^2 u\|_{\mathcal{M}^1} \lesssim \|\mu\|_{L^1} .$$

In realtà, come già accennato sopra, la dimostrazione della (2.10) si ottiene proprio impiegando la (2.8) in combinazione con la (2.13): usando la classica interpolazione di Marcinkiewicz si ottiene la validità della (2.10) per $1<q<2$. Infine, usando la dualità – ricordiamo che il problema è lineare – si ottiene la (2.10) anche per $2<q<\infty$.

Concludendo, sembra chiaro che l'approccio descritto sopra si basa su un programma che dipende fortemente dalla linearità del problema considerato, e addirittura dalla sua forma esplicita. Riassumendo, abbiamo il seguente:

PROGRAMMA CZ1 (Classico dopo Calderòn & Zygmund)

- Si usa la struttura dell'equazione per ottenere una formula di rappresentazione integrale.
- Si studia l'operatore integrale indotto da tale formula di rappresentazione analizzando le proprietà di cancellazione del nucleo per ottenere la (2.13).
- Si usa infine l'interpolazione e la dualità per ottenere la (2.10) dalla combinazione di (2.8) e (2.13).

2.1 – *Un approccio più generale*

La ricetta descritta nella sezione precedente propone un piatto un po' pesante: prima l'uso di una formula di rappresentazione usata per abbandonare l'equazione di partenza, poi l'analisi di una trasformazione integrale e delle cancellazioni del suo nucleo e, infine, l'uso di teoremi di interpolazione e di metodi di dualità. Sarebbe quindi auspicabile avere una dimostrazione più legata alla teoria delle equazioni alle derivate parziali, che utilizzasse magari strumenti circoscritti all'ambito della teoria stessa. Questo alleggerimento è infatti possibile e iniziamo qui a descrivere un percorso *di destrutturazione del Programma CZ1* che porterà alla fine ad una dimostrazione essenzialmente elementare dei principali risultati, anche per equazioni non lineari, che non fa uso esplicito degli strumenti di Analisi Armonica presenti nel Programma CZ1. Di questi si conserverà però, e inevitabilmente, lo spirito. Questo percorso troverà la sua conclusione nel Programma CZ4 descritto più in basso nella Sezione 4.1.

Il primo tentativo in questa direzione risale al lavoro di Campanato e Stampacchia [22]. In ultima analisi, i primi due punti del Programma CZ1 vengono saltati, e si usa soltanto la dualità e un più efficace risultato di interpolazione ottenuto in [81, 82]. Descriveremo questo procedimento per un problema leggermente differente, ma che presenta, per quello che ci interessa, le stesse caratteristiche di quello affrontato nella sezione precedente. Più precisamente consideriamo l'equazione

$$\triangle u = \operatorname{div} F \tag{2.14}$$

per le soluzioni della quale vogliamo stabilire una maggiorazione dimensionalmente ottimale del tipo

$$\|Du\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q} \qquad \text{quando } 1 < q < \infty\,. \tag{2.15}$$

Lo schema della sezione precedente si può ancora seguire, come si diceva, semplicemente sostituendo μ con $\operatorname{div} F$ in (2.4), derivando *una sola volta* sotto al segno di integrale e poi integrando per parti per avere un operatore integrale, del tipo $CZ(\,\cdot\,)$, che agisce su F e non su $\operatorname{div} F$. Qui prendiamo però un'altra strada, considerando l'operatore, palesemente lineare, definito da

$$T\colon F \mapsto Du \qquad \text{dove } u \text{ e la soluzione di (2.14)}\,.$$

L'operatore viene definito in realtà specificando un aperto di riferimento sufficientemente regolare, eventualmente prendendo anche $\mathbb{R}^n$, e un dato al bordo, in questo caso prendiamo quello nullo per fissare le idee. Moltiplicando la (2.14) e integrando per parti si ottiene facilmente la stima

$$\|T(F)\|_{L^2} \lesssim \|F\|_{L^2}\,. \tag{2.16}$$

In generale, la stima $\|T(F)\|_{L^\infty} \lesssim \|F\|_{L^\infty}$ non vale: si ottiene invece

$$\|T(F)\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|F\|_{L^\infty} \tag{2.17}$$

dove BMO è uno spazio funzionale che descriveremo qualche riga più in basso. Adesso il punto è che BMO è uno spazio *opportunamente vicino a L^∞ da consentire di interpolare* (2.16) *e* (2.17) *come se fosse proprio L^∞*, alla fine ottenendo

$$\|T(F)\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q} \qquad \text{quando } 2 \le q < \infty\,.$$

Quest'ultima maggiorazione non è nient'altro che quella nella (2.14) per $2 \le q < \infty$; il caso $1 < q < 2$ viene infine ottenuto per dualità grazie ancora una volta alla linearità del problema. Come si diceva prima, il teorema di interpolazione rilevante nella fattispecie è stato ottenuto da Stampacchia in [81, 82], mentre l'armamentario di stime integrali che permette di ottenere (2.17) è essenzialmente frutto dell'approccio di Campanato alla regolarità. Per una buona introduzione a questi argomenti ci sentiamo di raccomandare la lettura dell'eccellente trattato di Giusti [38].

L'approccio appena descritto permette allora di saltare i primi due punti del precedente Programma CZ1, trattenendo soltanto il terzo. In particolare, l'uso delle cancellazioni sembra essere evitato. In realtà non è cosi: come spesso capita, quando si pensa di essersi sbarazzati di uno strumento molto influente e ingombrante, esso, o il suo fantasma, riappare altrove. In questo caso, un accurato uso di proprietà di cancellazione si nasconde proprio nell'unico punto che non abbiamo specificato qui, lo spazio BMO, e nel suo uso nell'ambito della teoria dell'interpolazione. È quindi venuto il momento di dare, di tale spazio, la definizione precisa. Di seguito denotiamo con

$$B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |x-y| < R\}$$

la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio $R > 0$ e con

$$(v)_{B(x,R)} := \fint_{B(x,R)} v(y)\, dy$$

la media integrale di una funzione integrabile v su $B(x,R)$. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la funzione $v \in L^1(\Omega)$ appartiene a BMO(Ω) se e solo se

$$[v]_{\mathrm{BMO}} := \sup_{B(x,R)\cap\Omega, R>0} \ \fint_{B(x,R)\cap\Omega} |v(y) - (v)_{B(x,R)}|\, dy < \infty\,. \tag{2.18}$$

Questo spazio funzionale è stato introdotto da John & Nirenberg [48], che ne hanno descritto alcune importanti proprietà, tra le quali, quella che più ci interessa qui, è quella di integrabilità limite di tipo esponenziale

$$\int_\Omega \exp(c|v|)\, dx < \infty \tag{2.19}$$

dove c è una costante che dipende da n e, ovviamente, dalla seminorma $[v]_{\mathrm{BMO}}$. Dalla (2.19) seguono tra l'altro le inclusioni (strette)

$$L^\infty \subset \mathrm{BMO} \subset L^q \qquad \text{per ogni } q < \infty\,.$$

La (2.18) dà in qualche modo conto del fatto che BMO è uno spazio sufficientemente vicino a L^∞ da comportarsi, dal punto vista dell'interpolazione, come L^∞, motivando l'affermazione fatta qualche rigo più in alto. L'informazione fondamentale che differenzia BMO da L^∞ è allora proprio contenuta nella finitezza di $[v]_{\mathrm{BMO}}$, che, a sua volta, riferisce del fatto che le oscillazioni di v sono in qualche modo controllate, in modo integrale, a ogni scala. Questa informazione si ricombina opportunamente con gli argomenti di interpolazione sviluppati in [81, 82], dando un risultato che contiene un'informazione analoga a quella del terzo punto del programma classico (CZ1), costituendone in ultima analisi la controparte nel presente contesto. Ad essere pignoli anche il secondo punto del Programma CZ1 ammette un analogo, questa volta locale: la formula di rappresentazione viene sostituita localmente dalle stime *a priori* per equazioni omogenee, che mostrano, "localmente", un'omogeneità simile a quella delle formule di rappresentazione usuali. Possiamo allora sintetizzare con il seguente

PROGRAMMA CZ2 (di Campanato e Stampacchia)

- Si usa la linearità dell'equazione, ma non la sua forma esplicita, per definire un operatore lineare, che però stavolta non è di tipo convoluzione.
- Le formule di rappresentazione vengono sostituite da opportune stime di regolarità per soluzioni locali di equazioni omogenee [22]; queste permettono di ottenere alcune proprietà rilevanti dell'operatore su "spazi limite".
- Si usano infine l'interpolazione nella forma introdotta in [81, 82] e la dualità, direttamente sull'operatore.

2.2 – *Potenziali frazionari*

Ritorniamo brevemente ad un discorso accennato poco dopo la (2.6) e più precisamente torniamo adesso a considerare la (2.4), che vogliamo stavolta differenziare al più una volta. L'analisi del nucleo e delle sue derivate porta a dare la seguente

DEFINIZIONE 2.2. – *Sia $\beta \in (0, n]$; l'operatore*

$$I_\beta(\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\beta}} \ ,$$

definito per qualsiasi misura di Borel μ, si chiama potenziale di Riesz di μ di ordine β.

Quando $n \geq 3$ dalla (2.4) discendono le seguenti *limitazioni puntuali*

$$|u(x)| \lesssim |I_2(\mu)(x)| \qquad \text{e} \qquad |Du(x)| \lesssim I_1(|\mu|)(x)\,, \tag{2.20}$$

con la seconda delle due che rimane in realtà valida anche quando $n = 2$. Le maggiorazioni precedenti permettono di ricondurre il problema dell'integrabilità della soluzione e del suo gradiente a quello del relativo potenziale di Riesz. Infatti, il comportamento di quest'ultimo è noto in vari spazi funzionali [3]. Per esempio si ha

$$I_\beta \colon L^q \to L^{\frac{nq}{n-\beta q}}\,, \qquad q > 1\,, \qquad \beta q < n \tag{2.21}$$

da cui, tramite la seconda disuguaglianza in (2.20), si ottiene

$$\|Du\|_{L^{\frac{nq}{n-q}}} \lesssim \|\mu\|_{L^q}\,, \qquad q > 1\,, \qquad q < n\,.$$

Inoltre, grazie ad un caso limite della (2.21) in cui intervengono gli spazi di Marcinkiewicz, vale pure

$$\|Du\|_{\mathcal{M}^{\frac{n}{n-1}}} \lesssim \|\mu\|_{L^1}$$

con una stima analoga, ottenuta per approssimazione, nel caso in cui μ sia in generale una misura.

3. – Il caso non lineare e la sua problematicità

La linearità dell'equazione di Poisson (2.1) permette una varietà di approcci al problema della risolubilità, e poi della regolarità, ma prima di tutto alla definizione stessa di soluzione: formule di rappresentazione, metodo di energia (Calcolo delle Variazioni o metodi di monotonia), approcci per dualità, metodo di Perron (principio di massimo e approcci tipo viscosità). Si tratta, in altre parole "dell'equazione perfetta" (come per esempio ama ripetere Luis Caffarelli). Tali approcci trovano estensione più o meno diretta al caso di equazioni ellittiche lineari generali, permettendo anche un certo grado di irregolarità sui coefficienti che eventualmente si volessero considerare. La situazione cambia nel caso non lineare, che si presenta invece in modo assai più problematico, come vedremo tra pochissimo. Andiamo allora per gradi e consideriamo di seguito equazioni del tipo

$$-\operatorname{div} a(Du) = H \tag{3.1}$$

dove *il dato* $H \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione sulla quale faremo via via delle ipotesi opportune. Il campo vettoriale $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e verifica le ipotesi di crescita ed ellitticità seguenti

$$\begin{cases} |a(z)| + (s^2+|z|^2)^{1/2}|\partial a(z)| \le L(s^2+|z|^2)^{(p-1)/2} \\ \nu(s^2+|z|^2)^{(p-2)/2}|\lambda|^2 \le \langle \partial a(z)\lambda, \lambda\rangle \,, \end{cases} \tag{3.2}$$

per ogni scelta di $z, \lambda \in \mathbb{R}^n$, dove $s \ge 0$ e $0 < \nu \le L$ sono *parametri strutturali prefissati*. In generale assumeremo $p > 1$, mentre in alcune situazioni, e più che altro per agevolare la presentazione e limitarci alle idee essenziali, tratteremo il caso sopraquadratico $p \ge 2$. L'equazione (3.1) verrà considerata in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ per $n \ge 2$. Vale la pena osservare preliminarmente che alcuni dei risultati che verranno riportati in seguito rimangono validi sotto ipotesi meno generali di quelle in (3.2), che però d'altra parte riescono a coprire tutti i principali casi modello. Le ipotesi (3.2) sono in ogni caso considerate usuali a partire dalle ricerche iniziali di Ladyzhenskaya & Ural'tseva [65] che le hanno assunte e studiate in modo sistematico. Il principale caso che qui abbiamo in mente, su cui le (3.2) *sono in realtà modellate*, è dato dall'equazione

$$-\operatorname{div}((s^2+|Du|^2)^{(p-2)/2}Du) = H\,.$$

Nel caso $s = 0$ l'equazione precedente diventa degenere e coinvolge l'importante caso del p-Laplaciano

$$-\triangle_p u = -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = H$$

che poi, quando $H = 0$, diventa a sua volta l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale variazionale

$$v \mapsto \int_{\Omega} |Dv|^p \, dx \,. \tag{3.3}$$

A questo punto la classica definizione distribuzionale è

DEFINIZIONE 3.1. – *Una funzione $u \in W^{1,1}(\Omega)$ è una soluzione distribuzionale di* (3.1) *se e solo se $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e soddisfa*

$$\int_{\Omega} \langle a(Du), D\varphi \rangle \, dx = \langle H, \varphi \rangle \qquad \text{per ogni } \varphi \in C^{\infty}_c(\Omega) \,. \tag{3.4}$$

Si osservi immediatamente che la condizione $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ serve ad assicurare che il membro a destra dell'equazione nella (3.4) risulti finito. Dalle (3.2) segue in particolare che l'integrabilità $u \in W^{1,p-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ assicura che $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}$.

La prima osservazione fondamentale che a questo punto bisogna fare è che le soluzioni considerate nella precedente definizione non devono necessariamente appartenere allo spazio di definizione naturale $W^{1,p}(\Omega)$ fissato dalle (3.2) – su cui per esempio il funzionale in (3.3) risulta finito – ma possono esibire un minor grado di integrabilità. Soluzioni che non appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ effettivamente esistono e vengono chiamate, per ovvi motivi, *soluzioni molto deboli*. La loro presenza è intimamente legata a varie questioni abbastanza profonde sulla natura delle equazioni qui considerate, ma non è questo il luogo per dare una panoramica, anche incompleta, dei problemi che da esse scaturiscono. Rimandiamo per esempio a [10, 24] per una larga discussione sull'argomento. Qui ci limitiamo soltanto a ricordare che le soluzioni molto deboli possono esistere accanto a quelle usuali a "energia finita" (cioè quelle che appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$) e che le soluzioni distribuzionali non sono in generale uniche già quando H è "semplicemente" una misura (si veda per esempio [79]). A questo proposito, visto che di problemi con dati misura ci occuperemo anche in seguito, è utile anticipare che *non si conosce una classe funzionale in cui risolvere in modo unico il problema dell'esistenza di soluzioni per problemi con dato misura*. Essendo in questa sede interessati a stime di regolarità e quindi in ultima analisi a presentare stime *a priori* per le soluzioni, non toccheremo qui questa problematica per la quale rimandiamo di nuovo a [10, 24]. Ci limitiamo quindi a riassumere la situazione, toccando i punti più significativi per quello che qui ci riguarda, come segue

- da un lato è possibile avere una teoria dell'esistenza quando il dato H appartiene al duale di $W^{1,p}$. In questo caso è anche possibile, nella formulazione debole (3.4), usare funzioni test φ che sono proporzionali alla soluzione stessa, $\varphi \equiv u$, e ottenere così agevolmente *stime di energia* (disuguaglianze di Caccioppoli) che sono di solito il primo passo nei successivi procedimenti di regolarizzazione delle soluzioni. In questo caso i teoremi di esistenza disponibili forniscono soluzioni di classe $W^{1,p}$ che sono quindi *soluzioni a energia finita*

- dall'altro lato il quadro precedente si dualizza completamente nel caso in cui H non appartenga al duale di $W^{1,p}$. Non è possibile adesso usare funzioni test $\varphi \equiv u$ in (3.4), e in questo caso si opera di solito usando funzioni test φ ottenute proiettando la soluzione u su opportuni spazi di funzioni più regolari, dipendenti da H, in modo da soddisfare la dualità $\langle H, \varphi\rangle$. Una volta ottenute le relative stime *a priori* è possibile poi ottenere teoremi di esistenza tramite procedimenti di approssimazione (si veda per esempio il caso in H è una misura trattato nella Sezione 5). Concludendo, in questo caso le soluzioni ottenute non sono sempre di classe $W^{1,p}$, sono quindi *soluzioni molto deboli*, e non a caso vengono talora chiamate *soluzioni ad energia infinita*. Va qui osservato che trovare opportune proiezioni di u su spazi più regolari, e in ultima analisi costruire adeguate funzioni test per la (3.4), è in generale cosa tutt'altro che agevole. Ad esempio, quando H è una misura si possono usare semplici troncamenti di u (si proietta cioè u su L^∞ come in [11, 12]); nel caso in cui H si presenti in forma di divergenza, si devono operare scelte più delicate. In questo caso si usano proprietà fini della decomposizione di Hodge ([43, 46]) oppure troncamenti sull'operatore massimale del gradiente ([67, 53]). Per questo rimandiamo anche alla Sezione 4.2 più in basso.

Il precedente quadro porta quindi a sdoppiare la trattazione seguente in due situazioni distinte. La prima si ha quando H appartiene al duale di $W^{1,p}$; in questo caso si procede poi nella dimostrazione della regolarità più alta delle soluzioni. Nella seconda, in cui il quadro teorico generale attualmente disponibile appare ancora incompleto, la regolarià massimale delle soluzioni è al più quella $W^{1,p}$. La dimostrazione di questo fatto è spesso l'obiettivo finale in molte situazioni (si veda di nuovo la Sezione 4.2 più in basso). Nel resto del lavoro gli argomenti saranno appunto presentati seguendo questa dicotomia.

OSSERVAZIONE 3.1. – Le precedenti definizioni di soluzione, insieme a tutte le considerazioni fatte, continuano a valere mutatis mutandis nel caso dei sistemi, quando cioè $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ con $N > 1$ e $a\colon \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^{N\times n}$. Esse si estendono inoltre al caso parabolico, che tuttavia di seguito verrà trattato solo nel caso di usuali soluzioni a energia finita; si veda la Sezione 4.1.

4. – Il caso sopraduale

In questa sezione trattiamo equazioni (e sistemi) del tipo in (3.1) quando H appartiene al duale di $W^{1,p}(\Omega)$. Specificatamente possiamo assumere che $H = -\operatorname{div} G$ con G che è un campo vettoriale appartenente a $L^{p/(p-1)}$, ricordando sempre che stiamo supponendo che $p > 1$. Operando inoltre un cambiamento di variabile possiamo riscrivere H nella forma $H = -\operatorname{div}(|F|^{p-2}F)$ per qualche $F \in L^p$ in modo da garantire una più agevole e concisa esposizione dei risultati; considereremo allora equazioni della forma

$$\operatorname{div} a(Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)\,, \qquad F \in L^p \tag{4.1}$$

dove il campo vettoriale $a(\cdot)$ verifica le ipotesi descritte nella (3.2). Il primo risultato di tipo Calderón-Zygmund per equazioni non lineari degeneri si deve a Tadeusz Iwaniec ed è il

TEOREMA 4.1 ([42]). – *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione*

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)$$

in $\mathbb{R}^n$, con $p > 1$; vale allora

$$F \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \qquad \text{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.2}$$

Il precedente teorema si generalizza, essenzialmente con le stesse tecniche, al caso di equazioni generali del tipo (4.1), definite su aperti generali del tipo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (si veda per esempio [1, 54]). Vale infatti il seguente

TEOREMA 4.2. – *Nelle ipotesi* (3.2) *con $p > 1$, sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione* (4.1) *in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora vale*

$$F \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \text{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.3}$$

Inoltre, esiste una costante c dipendente solo da n, p, v, L e q tale che per ogni palla $B_R \subseteq \Omega$ di raggio $R > 0$ vale la stima locale

$$\left(\fint_{B_{R/2}} |Du|^q \, dx \right)^{1/q} \leq c \left(\fint_{B_R} (|Du| + s)^p \, dx \right)^{1/p} + c \left(\fint_{B_R} |F|^q \, dx \right)^{1/q}. \tag{4.4}$$

Il caso vettoriale è stato invece trattato da DiBenedetto & Manfredi, che, estendendo le tecniche di Iwaniec, riescono anche a coprire il caso limite della regolarità BMO.

TEOREMA 4.3 ([26]). – *Sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ *una soluzione distribuzionale del sistema*

$$\operatorname{div}\,(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}\,(|F|^{p-2}F)$$

in $\mathbb{R}^n$, *con* $p > 1$ *e* $N \geq 1$; *vale allora la* (4.2) *e inoltre*

$$F \in BMO(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times n}) \Longrightarrow Du \in BMO(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times n})\,.$$

Vale la pena rimarcare che il precedente risultato non rimane valido quando si considerano sistemi generali del tipo in (4.1); infatti, anche nel caso maggiormente favorevole in cui $F = 0$, essi ammettono in generale soluzioni illimitate, come dimostrato recentemente da Šverák & Yan in [84]. Risultati intermedi, ed essenzialmente ottimali, sono stati ottenuti in [56, 57]. La possibilità di dimostrare il precedente teorema si lega in ultima analisi alla struttura molto particolare del sistema in questione: il campo vettoriale $a(z) := |z|^{p-2}z$ è di forma diagonale, e si può fattorizzare come un Laplaciano moltiplicato per un coefficiente che dipende in modo non lineare (polinomiale) e degenere dal modulo del gradiente. Una struttura di questo tipo, spesso chiamata di tipo Uhlenbeck, è essenzialmente l'unica nota che permette di ricavare risultati di regolarità per sistemi che vadano oltre quelli di cosiddetta "regolarità parziale", ed è stata identificata per la prima volta nel lavoro fondamentale [87]. Per ulteriori informazioni circa la regolarità per sistemi si rimanda al classico trattato di Giaquinta [37] e al più recente lavoro di rassegna [73].

Veniamo adesso a descrivere la tecnica originale di Iwaniec, che si può sintetizzare nel seguente

PROGRAMMA CZ3 (di Tadeusz Iwaniec [42])

- Si usa un confronto locale con soluzioni dell'equazione omogenea $\operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv) = 0$, usando le stime di regolarità locale $C^{1,\alpha}$ per v per ottenere un *surrogato locale* della formula di rappresentazione globale (2.4) valida nel caso lineare
- Si usano operatori massimali (di tipo sharp) per globalizzare le stime ottenute nel passo precedente, e si ottiene una stima puntuale per l'operatore massimale di Du in termini di quello di F; si arriva quindi ad un *surrogato globale* della formula di rappresentazione lineare che usa gli operatori massimali
- Le proprietà di limitatezza degli operatori massimali (teoremi di Hardy & Littlewood e di Fefferman & Stein) permettono poi di concludere con le stime integrali desiderate

Si nota in altre parole che il Programma CZ1 della precedente sezione viene abbandonato e si utilizzano dei surrogati non lineari degli strumenti lineari di Analisi Armonica in esso utilizzati. In particolare, gli integrali singolari vengono abbandonati e vengono rimpiazzati dall'operatore massimale sharp di Fefferman-Stein, che permette, in un certo senso, di codificare la stessa informazione apportata dagli integrali singolari. Si nota ancora una certa continuità con il Programma CZ2 in quanto vengono di nuovo impiegate stime locali per equazioni omogenee, qui usate però non nel contesto dell'interpolazione ma in quello di una tecnica di confronto più diretta e locale.

4.1 – *Il caso parabolico*

Nel caso di equazioni paraboliche generali del tipo

$$u_t - \operatorname{div}\, a(Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)\,, \qquad F \in L^p \tag{4.5}$$

definite in un dominio cilindrico del tipo $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, la validità di risultati come il Teorema 4.1 è rimasta una questione aperta fino al lavoro [2], in cui è stato finalmente ottenuto un analogo essenzialmente ottimale dei risultati originali di Iwaniec e DiBenedetto & Manfredi.

Teorema 4.4 ([2]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con*

$$p > \frac{2n}{n+2}\,, \tag{4.6}$$

sia $u \in L^p(0, T, W^{1,p}(\Omega))$ *una soluzione debole dell'equazione* (4.5), *dove* Ω *è un dominio di* $\mathbb{R}^n$. *Allora vale*

$$F \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega_T, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega_T, \mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.7}$$

Inoltre il risultato (4.7) *continua a valere per soluzioni* $u \in L^p(0, T, W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N))$, $N \geq 1$, *del sistema del p-Laplaciano parabolico*

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)\,.$$

Osserviamo subito che la limitazione inferiore su p descritta in (4.6) è necessaria. Infatti, già nel caso della singola equazione $u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$, esistono soluzioni addirittura non appartenenti a L^q per ogni q quando $p \leq 2n/(n+2)$; per una discussione del problema si rimanda a [25].

La tecnica dimostrativa introdotta per ottenere il risultato precedente consente generalizzazioni in numerose direzioni: si possono trattare ad esempio equazioni con coefficienti di tipo *VMO* (rispetto alla variabile spaziale) e sistemi generali quando si introduca un'opportuna restrizione sull'esponente q – si guardi anche a [34, 78]. Il Teorema 4.4 si estende anche a problemi con ostacolo: in questo caso l'integrabilità del gradiente delle soluzioni è la stessa di quella del gradiente dell'ostacolo [13] e questo risultato risulta nuovo già nel caso ellittico.

Veniamo adesso a descrivere brevemente le difficoltà aggiuntive, rispetto a quelle tipiche del caso ellittico, che si presentano quando si affronta quello parabolico. Sarà la buona occasione per introdurre il concetto, fondamentale, di *geometria intrinseca*, dovuto a Emmanuele DiBenedetto (si veda [25] per una descrizione generale). Il problema principale si lega al fatto che, già nel caso omogeneo

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0\,,$$

l'equazione considerata è priva di un riscalamento universale. In altra parole, moltiplicando la soluzione per una costante non si ottiene una soluzione della stessa equazione. A sua volta, questo fatto si riflette nella mancanza di stime locali di tipo omogeneo per le soluzioni: al contrario, queste presentano un difetto di omogeneità che è *esattamente quello dell'equazione*. Infine, essendo l'omogenità delle stime locali un ingrediente essenziale nel Programma CZ3, si è immediatamente costretti a cercare approcci completamente diversi. Il modo di ovviare a questo inconveniente è allora quello di ottenere stime locali omogenee su cilindri particolari, che dipendono dalla soluzioni stessa, secondo il succitato concetto di *geometria intrinseca*. Più precisamente si considerano cilindri della forma

$$Q_r^{\lambda}(x_0, t_0) \equiv B_r(x_0) \times (t_0 - \lambda^{2-p} r^2, t_0 + \lambda^{2-p} r^2)\,,$$

dove $\lambda > 0$ si lega alla soluzione tramite una relazione del tipo $|Du| \approx \lambda$ da verificarsi *sullo stesso cilindro* $Q_r^{\lambda}(x_0, t_0)$. Una tale condizione in realtà si realizza di solito usando relazioni integrali, come per esempio

$$\fint_{Q_r^{\lambda}(x_0,t_0)} |Du|^p \approx \lambda^p\,. \tag{4.8}$$

Il vantaggio di tale scelta è abbastanza ovvio una volta che ci si riesca a convincere della validità, o meglio, dell'implementabilità del seguente ragionamento euristico: siccome $|Du| \approx \lambda$ su $Q_r^{\lambda}(x_0, t_0)$ allora abbiamo anche

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) \approx u_t - \lambda^{p-2} \triangle u$$

cosicchè, effettuando il cambio di variabile $v(x, t) := u(x_0 + rx, t_0 + \lambda^{2-p} r^2 t)$ abbiamo quindi che v risolve l'equazione del calore

$$v_t - \triangle v = 0 \qquad \text{in} \qquad B(0, 1) \times (-1, 1)$$

e come tale soddisfa delle stime di regolarità favorevoli, di tipo omogeneo. Malgrado la sua evidente naturalezza, realizzare in termini rigorosi una tale argomentazione è tutt'altro che agevole e il processo richiede il superamento di vari punti assai delicati, prima di tutto quello di verificare, durante gli opportuni procedimenti di iterazione, che condizioni del tipo (4.8) vengano verificate "ad ogni scala" (cioè quando i cilindri degenerano ad un punto). Di fatto il metodo della geometria intrinseca conduce ad ottenere stime omogenee per le soluzioni; per esempio, è possibile dimostrare (si veda [25, 61]) che, per una opportuna costante c dipendente solo da n e p, vale

$$c\left(\fint_{Q_r^\lambda(x_0,t_0)} |Du|^{p-1}\,dx\,dt\right)^{1/(p-1)} \leq \lambda \Rightarrow |Du(x_0,t_0)| \leq \lambda\,.$$

Alla radice del metodo proposto in [2] si trova allora una decomposizione di tipo Calderón-Zygmund degli insiemi di livello del gradiente Du, operata cambiando il tipo di cilindri usati a seconda del livello considerato. In sintesi, abbiamo il

Programma CZ4 (introdotto in [2])

- Considerato l'insieme di livello $|\{|Du|>\lambda\}|$, se ne effettua una decomposizione in cilindri intrinseci del tipo Q_r^λ usando un argomento di tipo "tempo di uscita" su una quantità che coinvolge sia Du che F, che vengono però *pesati in modo diverso*, usando un parametro di peso M. In altre parole, i risultanti cilindri sono tali che in ognuno di essi si verifica $|Du| \approx \lambda$ e $|F| \lesssim \lambda/M$ con $M \geq 1$.
- Si usa un confronto locale con soluzioni dell'equazione omogenea associata $v_t - \operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv) = 0$ sui cilindri del tipo Q_r^λ determinati nel passo precedente onde trasferire informazione da Dv a Du, tenendo conto di quella disponibile per F. Le stime locali di tipo $C^{0,1}$ si utilizzano di nuovo per ottenere un *surrogato locale* della formula di rappresentazione valida nel caso lineare.
- Si conclude usando il lemma di ricoprimento di Vitali, integrando sugli insiemi di livello di Du e F e infine scegliendo M opportunamente grande per operare dei necessari riassorbimenti nelle disuguaglianze.

In questo caso si evita l'uso di ogni strumento di Analisi Armonica; in realtà, gli argomenti di ricoprimento utilizzati sono gli stessi alla base della dimostrazione delle formule di limitazione valide sia per integrali singolari che per operatori massimali: essi vengono applicati adesso direttamente all'equazione, permettendo di usare cilindri la cui forma cambia al variare dell'insieme di livello considerato. Inoltre, l'uso delle cosiddette "good-λ inequality", tipiche dei contesti in cui vengono impiegati operatori massimali, viene rimpiazzato localmente con la decomposizione simultanea a due livelli di Du e F tramite il parametro M.

I metodi introdotti in [2] permettono di dare una dimostrazione più elementare di tutti i risultati ellittici precedentemente esposti. Inoltre, si può ottenere

- Una dimostrazione della stima *a priori* $\|Du\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q}$ quando $q>1$ per soluzioni di $\triangle u = \operatorname{div} F$, che usa soltanto *il lemma di ricoprimento di Vitali e il principio della media per funzioni armoniche.*

- Una dimostrazione dei Teoremi 4.1-4.3 che utilizza soltanto la teoria della regolarità per equazioni ellittiche ma non strumenti di Analisi Armonica quali, ad esempio, gli operatori massimali.
- Una dimostrazione diretta e alternativa del teorema originale di Calderón & Zygmund che non fa uso dei classici teoremi di interpolazione e neanche della classica decomposizione di Calderón-Zygmund, come fatto vedere in [88].
- Dimostrazioni di maggiore integrabilità fino al bordo per sistemi ellittici e parabolici in domini con bordo fortemente irregolare [15].

OSSERVAZIONE 4.1 (Equazioni totalmente non lineari). – Un caso non lineare importante, che non ricade in quello delle equazioni quasilineari in forma divergenza trattate sopra, è quello delle equazioni totalmente non lineari del tipo

$$F(D^2u) = \mu\,. \tag{4.9}$$

Una teoria di tipo Calderòn-Zygmund per tali problemi è dovuta a Caffarelli [18, 17], e permette di ottenere implicazioni del tipo

$$\mu \in L^q \Longrightarrow D^2u \in L^q \qquad \text{per ogni } q \geq n\,.$$

La limitazione dal basso su q è sostanzialmente ottimale (si veda [35]) ed risulta essere legata all'applicabilità del principio di Aleksandrof-Bakelman-Pucci. Osserviamo che le equazioni del tipo in (4.9) sono ovviamente più generali di quelle quasilineari, ma non coprono il caso degenere in quanto l'ipotesi di ellitticità considerata è del tipo

$$F(A+B) - F(A) \geq \nu|A|^2 \qquad \text{per ogni scelta di } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con } B \geq 0$$

dove $\nu > 0$, e in questo senso, una volta adottato l'approccio delle soluzioni di viscosità – necessario poiché non è possibile dare a tali equazioni una formulazione debole di sapore distribuzionale – si possono effettuare opportuni procedimenti di linearizzazione via i cosiddetti operatori estremali di Pucci. Le idee esposte da Caffarelli in [18], ancora basate sull'uso degli operatori massimali, sono poi state trasportate da Caffarelli & Peral [19] nel contesto quasilineare degenere dove hanno dato luogo a dimostrazioni alternative ed estensioni dei Teoremi 4.1-4.3 (si veda per esempio [1, 16]).

4.2 – *Stime sotto l'esponente naturale e un primo caso sottoduale*

In questa sezione cominciamo a interessarci a qualche caso in cui il dato H dell'equazione (3.1) non appartiene al duale di $W^{1,p}$, e riportiamo anche qualche importante problema aperto la cui natura sembra legata a parecchie e svariate questioni rilevanti nell'Analisi moderna. Cominciamo a osservare che il confronto tra il risultato del Teorema 4.1 e la stima (2.15) valida per l'equazione $\triangle u = \operatorname{div} F$

porta a congetturare che il Teorema 4.1 continui a valere anche nel caso $q > p - 1$. Questo risultato è stato congetturato in [46] ed ha connessioni con questioni importanti come la stima della costante ottimale della norma della trasformata di Beurling-Ahlfors [44]. Una congettura legata a questo problema, e ancora riportata in [46, Conjecture 1], afferma che se $u \in W^{1,q}$ è una soluzione molto debole di $\triangle_p u = 0$ con $q > p - 1$, allora essa appartiene anche a $W^{1,p}$, ed è quindi *una usuale soluzione debole ad energia finita*. Fino ad oggi, l'unico progresso che si conosce in questa direzione è contenuto nei lavori di Iwaniec & Sbordone [46] e Lewis [67], e afferma l'esistenza di una quantità positiva ε, dipendente solo dai parametri strutturali n, p, ν, L, *ma altrimenti indipendente dall'equazione e dalla soluzione considerata*, tale che se

$$\operatorname{div} a(Du) = 0 \qquad u \in W^{1,q} \qquad q > p - \varepsilon$$

allora in realtà vale anche $u \in W^{1,p}$; si veda pure un risultato analogo, valido per mappe quasiconformi, ottenuto da T. Iwaniec in [43]. L'analogo parabolico di questo risultato è stato successivamente stabilito da Kinnunen & Lewis in [53]. Tale questione si lega naturalmente alla risolubilità del problema di Dirichlet quando il dato non è sufficientemente regolare. A questo proposito riportiamo il seguente risultato dovuto a Iwaniec & Sbordone.

TEOREMA 4.5 ([46]). – *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto sufficientemente regolare e $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale soddisfacente le* (3.2). *Allora esiste un numero $\varepsilon > 0$, dipendente solo da n, p, ν, L, tale che il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\, a(Du) = \operatorname{div}\, (|F|^{p-2}F) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una soluzione $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ quando $F \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $q \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Inoltre, per una costante c dipendente solo da n, p, ν, L, vale la stima globale

$$\int_\Omega |Du|^q \, dx \leq c \int_\Omega |F|^q \, dx \, .$$

La dimostrazione fornita in [46] è molto interessante, e riposa su una profonda proprietà di stabilità per perturbazione non lineare della classica decomposizione di Hodge. Una proprietà, questa, che trova applicazioni in contesti molto diversi (si veda per esempio [45, 47]).

I risultati disponibili nel caso di equazioni generali del tipo (4.1) e che riguardano un dato che non appartiene al duale di $W^{1,p}$ finiscono essenzialmente qui. Molto di più si può dire invece del caso in cui il dato H nell'equazione (3.1) non sia in forma di divergenza. Un caso del genere è quello delle equazioni con dato misura, che andiamo adesso a trattare e a cui dedichiamo la prossima sezione.

5. – Equazioni con dato misura

Le equazioni con un dato misura μ (che da ora in poi prenderemo di Borel e con massa finita) sono un esempio importante di situazione in cui si può costruire una teoria delle soluzioni molto deboli essenzialmente completa dal punto di vista delle stime *a priori*, anche se, come accennato in precedenza, il problema di trovare una classe funzionale in cui risolvere in modo unico problemi di Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(Du) = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

rimane tutt'ora aperto. Non ci occuperemo in questa sede del problema dell'unicità in quanto siamo essenzialmente interessati a stime *a priori*, ma ci limitiamo a ricordare che di seguito tratteremo solo le cosiddette soluzioni di tipo SOLA (Soluzioni Ottenute da Limiti di Approssimazioni). Implicitamente definite nel fondamentale lavoro di Boccardo & Gallouët in [11], esse sono quelle soluzioni che si possono ottenere come limiti di problemi approssimanti del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(Du_k) = \mu_k & \text{in } \Omega \\ u_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

dove per comodità assumiamo che Ω sia un aperto limitato e Lipschitziano. Più precisamente, si definiscono le funzioni $\mu_k \in C^\infty$ (si noti che possiamo sempre assumere, a meno di prolungamenti banali, che la misura μ iniziale sia definita su tutto $\mathbb{R}^n$) come le convoluzioni di μ con opportuni nuclei di convoluzione lisci ϕ_k, e poi si risolve il problema (5.2), trovando, grazie agli usuali metodi di monotonia [66], una soluzione $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Infine, come fatto vedere in [11, 12], si può dimostrare l'esistenza di una funzione $u \in W_0^{1,p-1}(\Omega)$ tale che $u_k \to u$ in $W_0^{1,p-1}(\Omega)$; tale convergenza forte permette di passare al limite nelle equazioni approssimanti e u si rivela essere poi una soluzione, in generale molto debole, del problema (5.1). Da ora in poi noi ci occuperemo solo di queste soluzioni, la cui unicità non è in generale nota se non in situazioni particolari. Un primo caso è quello in cui $\mu \in L^1(\Omega)$. Un secondo caso, forse più interessante, è quando la misura μ si concentra in un punto, più precisamente $\mu = \delta$, dove δ è una delta di Dirac. Consideriamo infatti il problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = \delta & \text{in } B(0,1) \\ u = 0 & \text{on } \partial B(0,1)\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

con δ che si concentra nell'origine. Usando in modo opportuno il principio di massimo e i risultati contenuti in [80] e in [49] si può allora dimostrare che la cosiddetta “soluzione fondamentale” (funzione di Green non lineare)

$$
G_p(x) := c\begin{cases} \left(|x|^{\frac{p-n}{p-1}} - 1\right) & \text{se} \quad 1<p \neq n \\ \log|x| & \text{se} \quad p = n \end{cases} \tag{5.4}
$$

è l’unica SOLA del problema (5.3), per una opportuna costante c dipendente solo da n e p. Si noti come nel caso $p = 2$ la precedente funzione $G_p(\,\cdot\,)$ coincida con quella definita in (2.5). Questo fatto è molto rilevante per quanto andiamo a trattare poiché permette di controllare l’ottimalità dei risultati che andremo a presentare per le SOLA confrontandoli con la regolarità esibita da $G_p(\,\cdot\,)$.

Le fondamenta di una teoria di tipo Calderón-Zygmund per i problemi quasilineari con dato misura sono state essenzialmente gettate da Boccardo & Gallouët in [11, 12], che hanno trattato il caso della *regolarità base*, cioè dell’integrabilità del gradiente. I risultati contenuti in [11, 12] sono stati poi successivamente estesi in varie direzioni e il teorema seguente incorpora ad esempio alcuni dei risultati ottenuti in [9, 31, 36, 39].

TEOREMA 5.1 (Regolarità base per dati misura). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \leq p \leq n$, *ogni SOLA* $u \in W_0^{1,p-1}(\Omega)$ *del problema* (5.1) *è tale che*

$$
|Du|^{p-1} \in \mathcal{M}^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)\,.
$$

L’ottimalità del risultato del precedente Teorema 5.1 segue dall’analisi della soluzione fondamentale $G_p(\,\cdot\,)$, ma tuttavia riguarda soltanto la sommabilità del gradiente delle soluzioni. D’altra parte l’operatore considerato nel problema è del secondo ordine e sarebbe auspicabile ottenere qualche risultato di maggiore regolarità, come per esempio la differenziabilità del gradiente. Classici controesempi mostrano che in generale $\triangle u \in L^1$ non implica $Du \in W^{1,1}$, ma, come visto nel caso lineare, quando $\triangle u \in L^q$ con $q > 1$ abbiamo $Du \in W^{1,q}$. Pare quindi esserci una distanza da colmare tra questa circostanza e il fatto che nel caso dei dati misura il Teorema 5.1 possa fornire l’unico dato di regolarità disponibile per equazioni non lineari. Infatti, quando si passa da $\triangle u \in L^q$ a $\triangle u \in L^1$, qualcosa, e anzi, molto, rimane e per descrivere i risultati disponibili dobbiamo richiamare la definizione di spazio di Sobolev frazionario.

DEFINIZIONE 5.1. – *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme aperto e* $k \geq 1$, $\sigma \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$; *lo spazio di Sobolev frazionario* $W^{\sigma,q}(A,\mathbb{R}^k)$ *si definisce come il sottinsieme delle funzioni* $w \in L^q(A,\mathbb{R}^k)$ *tali che la seguente norma di Gagliardo risulta finita*

$$
\|w\|_{W^{\sigma,q}(A)} := \left(\int_A |w|^q\,dx\right)^{1/q} + \left(\int_A\int_A \frac{|w(x)-w(y)|^q}{|x-y|^{n+\sigma q}}\,dx\,dy\right)^{1/q}.
$$

Gli spazi di Sobolev frazionari giocano un ruolo molto importante nell'Analisi contemporanea e per una panoramica si veda ad esempio [30]; essi sono stati recentemente usati da Kristensen e dall'autore per stabilire stime sulla dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare delle soluzioni di problemi vettoriali [56, 57, 73].

Il prossimo risultato stabilisce che, malgrado non si possa dimostrare che $Du \in W^{1,1}$ (quando $p = 2$), si può ancora ottenere ogni derivata frazionaria del gradiente prima di quella di ordine uno.

TEOREMA 5.2 (Regolarità superiore per dati misura [70]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \le p \le n$, *ogni SOLA* $u \in W_0^{1,p-1}(\Omega)$ *del problema* (5.1) *soddisfa*

$$Du \in W^{\frac{1-\varepsilon}{p-1},p-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni} \;\; \varepsilon > 0\,. \tag{5.5}$$

In particolare, quando $p = 2$ *si ha*

$$Du \in W^{1-\varepsilon,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni} \;\; \varepsilon > 0\,.$$

L'ottimalità della (5.5) segue ancora dall'analisi della soluzione fondamentale $G_p(\,\cdot\,)$, che esibisce appunto la regolarità descritta in (5.5). Il modo più rapido di osservare questo fatto viene dall'uso delle proprietà di immersione degli spazi frazionari:

$$W^{\sigma,q}_{\mathrm{loc}} \hookrightarrow L^{nq/(n-\sigma q)}_{\mathrm{loc}} \qquad\qquad \text{quando } \sigma q < n$$

per le quali rimandiamo a [6]. Se allora la (5.5) valesse per $\varepsilon = 0$ avremmo anche che $|Du|^{p-1} \in L^{n/(n-1)}_{\mathrm{loc}}$, che invece non vale per la funzione di Green $G_p(\,\cdot\,)$ descritta in (5.4).

Osserviamo infine che il caso $p \le n$ è stato considerato per ridurci al caso in cui il dato (in questo caso la misura μ) non appartenesse al duale di $W_0^{1,p}$; per il caso $p > n$ si rimanda a [70] e per quello in cui $p < 2$ a [74].

6. – "Torniamo ai classici" - Stime puntuali

In quest'ultima parte ci occupiamo di un'estensione più radicale della classica teoria di Calderón-Zygmund lineare; faremo vedere come le stime puntuali (2.20), apparentemente legate alla specifica struttura lineare dell'equazione di Poisson, ammettano in realtà una controparte non lineare naturale valida per equazioni del tipo

$$-\operatorname{div} a(Du) = \mu\,. \tag{6.1}$$

Per semplicità, anche in questa sezione ci limiteremo a considerare il caso $p \ge 2$. Ancora per comodità di esposizione considereremo il caso di stime *a priori*, cioè valide per soluzioni a priori supposte più regolari – C^0, C^1 ecc. – ma che non dipendono in modo quantitativo da tale regolarità. Tutto questo non è restrittivo poiché, come noto, i risultati per soluzioni generali seguono tramite gli usuali procedimenti di approssimazione con soluzioni più regolari.

Prima di cominciare, siccome in quanto segue considereremo anche problemi su domini limitati, ci serve un'opportuna versione localizzata dei potenziali di Riesz. Considereremo quindi i potenziali troncati

$$\boldsymbol{I}^{\mu}_{\beta}(x,R) := \int_0^R \frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{n-\beta}}\,\frac{d\rho}{\rho}\,,$$

osservando che $\boldsymbol{I}^{\mu}_{\beta}(x,R) \lesssim I_\beta(\mu)(x)$ quando μ è una misura non negativa. Si vede facilmente, con un semplice argomento di riscalamento, che quando $p > 2$ le stime (2.20) non possono essere vere. Consideriamo infatti una soluzione non nulla di $-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \mu$, ponendo $\tilde{u} = c^{1/(p-1)}u$ e $\tilde{\mu} = c\mu$ con $c > 0$, si ottiene $-\operatorname{div}(|D\tilde{u}|^{p-2}D\tilde{u}) = \tilde{\mu}$; se allora la prima delle (2.20) fosse vera, avremmo, applicandola a $\tilde{u}$, che $u(x) \leq c^{(p-2)/(p-1)}I_1(\mu)(x)$ da cui, passando $c \to 0$, avremmo ancora $u \equiv 0$. Nel caso non lineare entra allora in gioco un altro tipo di potenziale, che incorpora l'informazione sull'esponente di riscalamento del problema, cioè $1/(p-1)$, e che diventa come tale un potenziale non lineare.

DEFINIZIONE 6.1. – *Sia μ una misura di Borel definita su $\mathbb{R}^n$; il potenziale di Wolff $\boldsymbol{W}^{\mu}_{\beta,p}$ si definisce come*

$$\boldsymbol{W}^{\mu}_{\beta,p}(x,R) := \int_0^R \left(\frac{|\mu|(B(x,\rho))}{\rho^{n-\beta p}}\right)^{1/(p-1)} \frac{d\rho}{\rho}\,, \qquad \beta \in (0, n/p]$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < R \leq \infty$.

I potenziali di Wolff sono stati per la prima volta studiati nel fondamentale lavoro di Havin & Maz'ya [40] e successivamente in [5] e [41]. Nel caso $p = 2$ essi coincidono ovviamente con i potenziali di Riesz, mentre nel caso $p > 2 - 1/n$ (e quindi quello che ci interessa poiché qui ci siamo limitati al caso $p \geq 2$) la crescita dei potenziali di Wolff può essere descritta puntualmente tramite i potenziali di Riesz:

$$\boldsymbol{W}^{\mu}_{\beta,p}(x,\infty) \lesssim I_\beta\{[I_\beta(|\mu|)]^{1/(p-1)}\}(x) =: \boldsymbol{V}_{\beta,p}(|\mu|)(x)\,.$$

Questo fatto di base è stato dimostrato in [40] e infatti la quantità $\boldsymbol{V}_{\beta,p}$ definisce un altro potenziale non lineare che viene usualmente chiamato in letteratura potenziale di Havin-Maz'ya (si veda [23]).

Kilpeläinen & Malý [51, 52] sono stati i primi a dimostrare la possibilità di estendere la prima stima in (2.20) a soluzioni di equazioni non lineari possibilmente degeneri.

TEOREMA 6.1. – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \le p \le n$, *sia* $u \in C^0(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *una soluzione debole dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita. Esiste una costante* $c \equiv c(n,p,v,L) > 0$ *tale che per ogni palla* $B(x,R) \subseteq \Omega$ *vale la stima puntuale*

$$|u(x)| \le c\boldsymbol{W}^{\mu}_{1,p}(x,R) + c \fint_{B(x,R)} (|u| + Rs)\, dy\,. \tag{6.2}$$

Per vari approcci al precedente risultato si veda [51, 52, 86, 55, 32]. Si noti inoltre come per $p = 2$ risulti $\boldsymbol{W}^{\mu}_{1,p} \equiv \boldsymbol{I}^{|\mu|}_2$ e quindi la prima stima nella (2.20), per problemi definiti in $\mathbb{R}^n$ e per soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segua dalla (6.2) passando $R \to \infty$. La stima (6.2) risulta di fondamentale importanza in varie questioni che riguardano la regolarità fine delle soluzioni di equazioni quasilineari: gli stessi Kilpeläinen & Malý l'hanno usata per dimostrare la necessità del criterio di Wiener per equazioni generali (la sua sufficienza era stata dimostrata da Maz'ya molti anni prima in [69]); ulteriori applicazioni si trovano per esempio nei lavori di Phuc & Verbitsky [75, 76]. Si noti come il Teorema 6.1, data la nonlinearità del contesto, sia completamente non banale già nel caso $p = 2$.

La questione delle stime potenziali per il gradiente è stata affrontata per la prima volta in [72], dove è stato trattato il caso $p = 2$ descritto nel

TEOREMA 6.2 ([72]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $p = 2$, *sia* $u \in C^1(\Omega)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita. Allora esiste una costante* c *dipendente solo da* n, v, L *tale che la stima puntuale*

$$|D_\xi u(x)| \le c\boldsymbol{I}^{|\mu|}_1(x,R) + c \fint_{B(x,R)} |D_\xi u|\, dy$$

vale per ogni scelta della componente del gradiente $\xi \in \{1,\dots,n\}$ *e per ogni palla* $B(x,R) \subseteq \Omega$.

L'estensione del precedente risultato a contesti degeneri si è realizzata attraverso diversi passi successivi. Ad una prima occhiata, si potrebbe pensare che i potenziali di Wolff giochino un ruolo decisivo anche per quanto riguarda le stime gradiente. In effetti il primo risultato per equazioni degeneri ($p > 2$) è stato ottenuto in [32] dove è stata dimostrata la seguente disuguaglianza puntuale

$$|Du(x)| \lesssim \boldsymbol{W}^{\mu}_{1/p,p}(x,R) + \fint_{B(x,R)} (|Du| + s)\, dy \tag{6.3}$$

valida per ogni palla $B(x,R) \subseteq \Omega$. Ancora una volta, quando $p = 2$, la precedente stima costituisce una versione locale della stima gradiente lineare che appare in (2.20) e si ricollega a quella del Teorema 6.2. Inoltre, quando $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ allora la seconda stima in (2.20) segue dalla (6.3) per $p = 2$ (mandando $R \to \infty$). La stima (6.3) si rivela ottimale in molte situazioni, come per esempio nel caso fondamentale in cui μ è una misura di Dirac che si concentra in un punto x_0. In questo caso, prendendo $x \neq x_0$ in (6.3) abbiamo che primo e secondo membro si equivalgono (si veda [32, Remark 6.2]). Ciononostante, la stima (6.3) non è ancora quanto di meglio si possa fare e, come vedremo tra poche righe, piuttosto inaspettatamente anche nel caso degenere i potenziali lineari di Riesz tornano a giocare un ruolo fondamentale.

Esaminiamo quindi l'equazione

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \mu \tag{6.4}$$

da un altro punto di vista, osservando come questa si possa ovviamente leggere come un'equazione non lineare nel gradiente, ma anche come *un'equazione lineare nel campo vettoriale non lineare del gradiente* $|Du|^{p-2}Du$. Decomponiamola allora nel sistema

$$-\operatorname{div} v = \mu\,, \qquad\qquad v = |Du|^{p-2}Du\,. \tag{6.5}$$

Adesso, è noto che la prima equazione nella riga precedente si può risolvere usando potenziali di tipo Riesz; tuttavia, la risolubilità non è univoca [14], in altre parole, non abbiamo la sicurezza che la soluzione trovata sia della forma richiesta nella (6.5). Immaginiamo per un attimo che la (6.5) sia vera, allora invertendo formalmente $\operatorname{div} v = \mu$ via potenziali di Riesz possiamo immaginare la validità di una stima del tipo $|v| = |Du|^{p-1} \lesssim I_1(\mu)(x)$. Questo ragionamento euristico è assai coraggioso, poiché usa implicitamente ragionamenti che, benché dimensionalmente corretti, fanno perno su risultati che sono in generale falsi. Tuttavia le cose si ricombinano per il meglio e l'aspetto dimensionale risulta prevalere; piuttosto sorprendentemente vale infatti il

TEOREMA 6.3 ([63, 64]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $p \geq 2$, *sia* $u \in C^1(\Omega)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita definita su* Ω. *Allora esiste una costante* c, *dipendente solo da* n, p, ν, L, *tale che la stima puntuale*

$$|Du(x)|^{p-1} \leq c\boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) + c\left(\fint_{B(x,R)} (|Du| + s)\,dy\right)^{p-1}$$

vale per ogni palla $B(x,R) \subseteq \Omega$.

Si ottiene quindi il

COROLLARIO 6.1. – *Sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.4) *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita definita su* $\mathbb{R}^n$.

Allora la seguente stima puntuale vale per una costante dipendente solo da n *e* p*, e per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Du(x)|^{p-1} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(y)}{|x-y|^{n-1}} .$$

Osserviamo che la stima del Teorema 6.3 estende quella in (6.3) poiché si ha

$$\boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) \lesssim \left[\boldsymbol{W}^{\mu}_{1/p,p}(x,2R)\right]^{p-1} \qquad \text{quando } p \geq 2 .$$

Il fatto sorprendente, nel Teorema 6.3 e nel Corollario 6.1, è che la stima puntuale gradiente è adesso costruita con un *potenziale lineare* che, come tale, non dipende da p. In altre parole, dal punto di vista delle stime gradiente non si rilevano differenze tra il Laplaciano e il p-Laplaciano. Se vogliamo, dato il carattere degenere del p-Laplaciano, è ancora più sorprendente rilevare che tale analogia di comportamento si estende fino alla regolarità di classe C^1, come descritto nel seguente

TEOREMA 6.4 ([63, 64]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $p \geq 2$*, sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1)*, dove* μ *è una misura di Borel di massa finita definita su* Ω*. Se*

$$\lim_{R\to 0} \boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) = 0 \ \ \textit{uniformemente rispetto a } x, \ \textit{localmente in } \Omega ,$$

allora il gradiente Du *della soluzione è continuo in* Ω*.*

Il Teorema 6.3 ammette svariate applicazioni ed anche una versione per equazioni a coefficienti misurabili per la quale rimandiamo a [71] (si veda anche [74, Theorem 6.1] e [28]) ed estensioni a casi intermedi [58, 59]. Esso implica e migliora tutti i risultati noti di regolarità del gradiente per l'equazione modello (6.4) in spazi invarianti per riordinamento. Inoltre, alcuni casi limite di difficile raggiungibilità con le tecniche note, possono essere ottenuti adesso come corollario insieme ai risultati già acquisiti.

Le stime del gradiente via potenziali riportate in questa sezione ammettono un analogo parabolico, per il quale rimandiamo a [60, 61, 62, 29, 7, 8]. Per il caso sottoquadratico $2-1/n < p \leq 2$ rimandiamo invece a [33].

Ringraziamenti. – Le ricerche dell'autore sono realizzate con il supporto dell'ERC grant 207573 "Vectorial problems". Sentiti ringraziamenti vanno a Serena Nono per il suo particolare contributo alla buona riuscita della conferenza generale tenuta al Congresso UMI. Ulteriori ringraziamenti vanno ad Agnese Di Castro e Giampiero Palatucci per le osservazioni su una versione preliminare del lavoro.

REFERENCES

[1] E. ACERBI - G. MINGIONE, *Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacean system*. J. Reine Ang. Math. (Crelles J.), **584** (2005), 117-148.

[2] E. ACERBI - G. MINGIONE, *Gradient estimates for a class of parabolic systems*. Duke Math. J. **136** (2007), 285-320.

[3] D. R. ADAMS, *A note on Riesz potentials*. Duke Math. J. **42** (1975), 765-778.

[4] D. R. ADAMS - L. I. HEDBERG, *Function spaces and potential theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 314. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] D. R. ADAMS - N. G. MEYERS, *Thinnes and Wiener criteria for nonlinear potentials*. Indiana Univ. Math. J. **22** (1972/73), 169-197.

[6] R. A. ADAMS - J. J. F. FOURNIER, *Sobolev Spaces. Second edition.* Pure and Appl. Math. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[7] P. BARONI - J. HABERMANN, *Calderón-Zygmund estimates for parabolic measure data problems*. J. Diff. Equ. **252** (2012), 412-447.

[8] P. BARONI - J. HABERMANN, *New gradient estimates for parabolic equations*. Houston J. Math., in stampa.

[9] P. BÉNILAN - L. BOCCARDO - T. GALLOUËT - R. GARIEPY - M. PIERRE - J. L. VÁZQUEZ, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **22** (1995), 241-273.

[10] L. BOCCARDO, *Problemi differenziali ellittici e parabolici con dati misure*. Boll. UMI A (VII), **11** (1997), 439-461.

[11] L. BOCCARDO - T. GALLOUËT, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. J. Funct. Anal. **87** (1989), 149-169.

[12] L. BOCCARDO - T. GALLOUËT, *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures*. Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 641-655.

[13] V. BÖGELEIN - F. DUZAAR - G. MINGIONE, *Degenerate problems with irregular obstacles*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **650** (2011), 107-160.

[14] J. BOURGAIN - H. BREZIS, *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *application to control of phases*. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 393-426.

[15] S. S. BYUN - L. WANG, *Gradient estimates for elliptic systems in non-smooth domains*. Math. Ann. **341** (2008), 629-650.

[16] S. S. BYUN - L. WANG - S. ZHOU, *Nonlinear elliptic equations with* BMO *coefficients in Reifenberg domains*. J. Funct. Anal. **250** (2007), 167-196.

[17] L. CAFFARELLI, *Elliptic second order equations*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **58** (1988), 253-284.

[18] L. CAFFARELLI, *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*. Ann. of Math. (II), **130** (1989), 189-213.

[19] L. CAFFARELLI - I. PERAL, *On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form*. Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 1-21.

[20] A. P. CALDERÓN - A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals*. Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[21] A. P. CALDERÓN - A. ZYGMUND, *On singular integrals*. Amer. J. Math. **78** (1956), 289-309.

[22] S. CAMPANATO - G. STAMPACCHIA, *Sulle maggiorazioni in L^p nella teoria delle equazioni ellittiche*. Boll. UMI (III), **20** (1965), 393-399.

[23] A. CIANCHI, *Nonlinear potentials, local solutions to elliptic equations and rearrangements*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), **10** (2011), 335-361.

[24] G. DAL MASO - F. MURAT - L. ORSINA - A. PRIGNET, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **28** (1999), 741-808.

[25] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.
[26] E. DiBenedetto - J. J. Manfredi, *On the higher integrability of the gradient of weak solutions of certain degenerate elliptic systems*. Amer. J. Math. **115** (1993), 1107-1134.
[27] A. Di Castro, *Anisotropic elliptic problems with natural growth terms*. Manuscripta Math. **135** (2011), 521-543.
[28] A. Di Castro - G. Palatucci, *Measure data problems, lower order terms and interpolation effects*. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) DOI: 10.1007/s10231-012-0277-7.
[29] A. Di Castro - G. Palatucci, *Nonlinear parabolic problems with lower order terms and related integral estimates*. Nonlinear Anal. **75** (2012), 4177-4197.
[30] E. Di Nezza - G. Palatucci - E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bull. Sci. math., in stampa.
[31] G. Dolzmann - N. Hungerbühler - S. Müller, *Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right hand side*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **520** (2000), 1-35.
[32] F. Duzaar - G. Mingione, *Gradient estimates via non-linear potentials*. Amer. J. Math. **133** (2011), 1093-1149.
[33] F. Duzaar - G. Mingione, *Gradient estimates via linear and nonlinear potentials*. J. Funct. Anal. **259** (2010), 2961-2998.
[34] F. Duzaar - G. Mingione - K. Steffen, *Parabolic systems with polynomial growth and regularity*. Mem. Amer. Math. Soc. **214**, no. 1005 (2011), 128.
[35] L. Escauriaza, $W^{2,n}$ *a priori estimates for solutions to fully nonlinear equations*. Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 413-423.
[36] M. Fuchs - J. Reuling, *Non-linear elliptic systems involving measure data*. Rend. Mat. Appl. (7), **15** (1995), 311-319.
[37] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Annals of Mathematics Studies, 105. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
[38] E. Giusti, *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.
[39] L. Greco - T. Iwaniec - C. Sbordone, *Inverting the p-harmonic operator*. Manuscripta Math. **92** (1997), 249-258.
[40] M. Havin - V. G. Maz'ya, *A nonlinear potential theory*. Russ. Math. Surveys, **27** (1972), 71-148.
[41] L. I. Hedberg - T. Wolff, *Thin sets in nonlinear potential theory*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **33** (1983), 161-187.
[42] T. Iwaniec, *Projections onto gradient fields and* L^p*-estimates for degenerated elliptic operators*. Studia Math. **75** (1983), 293-312.
[43] T. Iwaniec, *p-harmonic tensors and quasiregular mappings*. Ann. Math. (II), **136** (1992), 589-624.
[44] T. Iwaniec, *Nonlinear Cauchy-Riemann operators in* $\mathbb{R}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 1961-1995.
[45] T. Iwaniec - C. Sbordone, *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*. Arch. Ration. Mech. Anal. **119** (1992), 129-143.
[46] T. Iwaniec - C. Sbordone, *Weak minima of variational integrals*. J. Reine Angew. Math. (Crelle J.), **454** (1994), 143-161.
[47] T. Iwaniec - C. Sbordone, *Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients*. J. Anal. Math. **74** (1998), 183-212.
[48] F. John - L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415-426.

[49] S. Kichenassamy - L. Verón, *Singular solutions to the p-Laplace equation*. Math. Ann. **275** (1986), 599-615.

[50] T. Kilpeläinen - T. Kuusi - A. Tuhola-Kujanpää, *Superharmonic functions are locally renormalized solutions*. Ann. Inst. H. Poincarè, Anal. Non Lin., **28** (2011), 775-795.

[51] T. Kilpeläinen - J. Malý, *Degenerate elliptic equations with measure data and nonlinear potentials*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **19** (1992), 591-613.

[52] T. Kilpeläinen - J. Malý, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*. Acta Math. **172** (1994), 137-161.

[53] J. Kinnunen - J. L. Lewis, *Very weak solutions of parabolic systems of p-Laplacian type*. Ark. Mat. **40** (2002), 105-132.

[54] J. Kinnunen - S. Zhou, *A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients*. Comm. Partial Differential Equations, **24** (1999), 2043-2068.

[55] R. Korte - T. Kuusi, *A note on the Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations involving measures*. Adv. Calc. Var. **3** (2010), 99-113.

[56] J. Kristensen - G. Mingione, *The singular set of minima of integral functionals*. Arch. Ration. Mech. Anal. **180** (2006), 331-398.

[57] J. Kristensen - G. Mingione, *Boundary regularity in variational problems*. Arch. Ration. Mech. Anal. **198** (2010), 369-455.

[58] T. Kuusi - G. Mingione, *Universal potential estimates*. J. Funct. Anal. **262** (2012), 4205-4269.

[59] T. Kuusi - G. Mingione, *Endpoint and intermediate potential estimates for nonlinear equations*. Boll. UMI (IX), **4** (2011), 149-157.

[60] T. Kuusi - G. Mingione, *Nonlinear potential estimates in parabolic problems*. Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni, **22** (2011), 161-174.

[61] T. Kuusi - G. Mingione, *The Wolff gradient bound for degenerate parabolic equations*. J. Europ. Math. Soc., in stampa.

[62] T. Kuusi - G. Mingione, *Gradient regularity for nonlinear parabolic equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), in stampa.

[63] T. Kuusi - G. Mingione, *Linear potentials in nonlinear potential theory*. Arch. Rat. Mech. Anal. **207** (2013), 215-246.

[64] T. Kuusi - G. Mingione, *A surprising linear type estimate for nonlinear elliptic equations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **349** (2011), 889-892.

[65] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York-London 1968.

[66] J. Leray - J.-L. Lions, *Quelques résulatats de Vi\v sik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97-107.

[67] J. L. Lewis, *On very weak solutions of certain elliptic systems*. Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 1515-1537.

[68] P. Lindqvist, *On the definition and properties of p-superharmonic functions*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **365** (1986), 67-79.

[69] V. Maz'ya, *The continuity at a boundary point of the solutions of quasi-linear elliptic equations. (Russian)*, Vestnik Leningrad. Univ. **25** (1970), 42-55.

[70] G. Mingione, *The Calderón-Zygmund theory for elliptic problems with measure data.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), **6** (2007), 195-261.

[71] G. Mingione, *Gradient estimates below the duality exponent*. Math. Ann. **346** (2010), 571-627.

[72] G. Mingione, *Gradient potential estimates*. J. Europ. Math. Soc. **13** (2011), 459-486.

[73] G. MINGIONE, *Regularity of minima: an invitation to the Dark Side of the Calculus of Variations*. Applications of Mathematics, **51** (2006), 355-425.
[74] G. MINGIONE, *Nonlinear measure data problems*. Milan J. Math. **79** (2011), 429-496.
[75] N. C. PHUC - I. E. VERBITSKY, *Quasilinear and Hessian equations of Lane-Emden type*. Ann. of Math. (II), **168** (2008), 859-914.
[76] N. C. PHUC - I. E. VERBITSKY, *Singular quasilinear and Hessian equations and inequalities*. J. Funct. Anal. **256** (2009), 1875-1906.
[77] T. RIVIÈRE, *The role of conservation laws in the analysis of conformally invariant problems*. In Topics in modern regularity theory (G. Mingione ed.). Sc. Normale Superiore 2012.
[78] C. SCHEVEN, *Non-linear Calderón-Zygmund theory for parabolic systems with subquadratic growth*. J. Evol. Equ. **10** (2010), 597-622.
[79] J. SERRIN, *Pathological solutions of elliptic differential equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III), **18** (1964), 385-387.
[80] J. SERRIN, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*. Acta Math. **111** (1964), 247-302.
[81] G. STAMPACCHIA, *The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III), **19** (1965), 443-462.
[82] G. STAMPACCHIA, *$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation*. Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 293-306.
[83] E. M. STEIN - G. WEISS, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton Math. Ser., 32. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1971.
[84] V. ŠVERÁK - X. YAN, *Non-Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex functionals*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **99/24** (2002), 15269-15276.
[85] G. TALENTI, *Elliptic equations and rearrangements*. Ann Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **3** (1976), 697-717.
[86] N. S. TRUDINGER - X. J. WANG, *On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory*. Amer. J. Math. **124** (2002), 369-410.
[87] K. UHLENBECK, *Regularity for a class of nonlinear elliptic systems*. Acta Math. **138** (1977), 219-240.
[88] F. YAO, *A new approach to L^p estimates for Calderón-Zygmund type singular integrals*. Arch. Math. (Basel), **92** (2009), 137-146.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma
Viale G. P. Usberti 53/a, Campus, 43100 Parma, Italy
E-mail: giuseppe.mingione@unipr.it.

Received January 14, 2012 and accepted March 3, 2012