
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCO FLANDOLI

Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. 6 (2013), n.2,
p. 253–267.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_2_253_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali

FRANCO FLANDOLI

XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Bologna, Settembre 2011

Abstract. – *Viene discussa la possibilità che la presenza di rumore nelle PDE impedisca l'insorgere di singolarità. I risultati principali riguardano equazioni del trasporto lineari ed includono una discussione del prolungamento dopo una singolarità ed il limite per il noise che tende a zero. Il caso non lineare è più complesso ed ampiamente aperto.*

1. – Introduzione

Come è noto, ci sono moltissimi esempi rilevanti di equazioni alle derivate parziali (PDE) in cui si sviluppano singolarità in tempo finito. Partendo da dati iniziali regolari, le soluzioni diventano ad esempio discontinue o illimitate, ad un certo istante. In alcuni casi molto importanti – ad esempio per le equazioni di Eulero – pur non avendo esempi di singolarità, si sospetta per lo meno che esse possano accadere.

Un po' tutti i sistemi reali sono soggetti a perturbazioni. Spesso queste non possono essere descritte in modo preciso e deterministico, ad esempio come variabili legate da ulteriori equazioni, per cui può aver senso considerarle come causali. Questa è una delle origini dell'interesse per le equazioni alle derivate parziali stocastiche (SPDE), ovvero PDE perturbate da termini di tipo rumore bianco. Negli ultimi decenni lo studio delle SPDE ha raggiunto un elevato grado di sviluppo e si può dire, molto vagamente, che la maggior parte delle teorie di base riguardanti le PDE sia stata opportunamente generalizzata al caso stocastico. A titolo di esempio si vedano le monografie [6], [22].

Lo studio descritto in questa nota tenta di capire che effetto può avere un noise sullo sviluppo delle singolarità di una PDE. A priori si potrebbe pensare che la presenza di perturbazioni casuali renda ancor più irregolare il comportamento delle soluzioni favorendo l'insorgenza di singolarità. Forse in alcuni esempi questo può anche succedere, ma qui vogliamo discutere la possibilità che accada il contrario, cioè che *il noise riesca a prevenire le singolarità*.

Alcuni esempi di singolarità sono molto robusti – ad esempio il collasso di una sfera secondo il moto per curvatura media. In questi casi è naturale pensare che il noise non abbia effetti rilevanti. Un problema che non sembra essere ancora stato studiato è ad esempio l'effetto di un noise sui flussi di Ricci, ma alcune analisi intuitive non lasciano molte speranze che il noise modifichi in positivo l'evoluzione quando questa è destinata a sviluppare una singolarità. Detto altrimenti, è difficile immaginare che un meccanismo di tipo rumore possa essere sostituito alle operazioni di chirurgia necessarie per rimuovere le singolarità e prolungare la dinamica, [21].

Ci sono invece altri esempi in cui lo sviluppo di una singolarità potrebbe richiedere un elevato grado di organizzazione, oltretutto persistente – ad esempio l'intensificazione di un tubo di vorticità in un fluido. Non è assurdo immaginare che un noise possa frammentare un tale processo ed impedire che si porti a compimento.

Un secondo problema estremamente interessante poi è quello del *prolungamento dopo la singolarità*. Quando nasce una singolarità la soluzione diventa meno regolare e, se questa entra in modo non-lineare nei coefficienti della PDE, i coefficienti diventano di conseguenza meno regolari. La PDE diventa più complessa matematicamente, perché ha coefficienti meno regolari e deve essere risolta in una classe di soluzioni meno regolari. Possono allora nascere problemi di non unicità. Riassumendo: dopo una singolarità non è infrequente che si verifichi un fenomeno di non unicità, o potenziale non unicità. Quando questo accade, le SPDE possono essere particolarmente interessanti per la seguente doppia ragione. Da un lato, può accadere che esse non soffrano degli stessi problemi di non unicità della corrispondente PDE. Dall'altro, facendo tendere il noise a zero, può accadere che vengano identificate particolari soluzioni della PDE deterministica, soluzioni che sono in un certo senso più rilevanti in quanto robuste rispetto a perturbazioni causali. Il limite per il noise che tende a zero potrebbe diventare un principio di selezione, nei casi di non unicità che seguono l'insorgenza di singolarità.

Lo scopo di questa nota è di capire alcuni di questi problemi nel caso della PDE più semplice possibile, pur di sapore fluidodinamico: l'equazione del trasporto lineare, non viscosa. Inizialmente mostreremo esempi di trasporto lineare in cui il noise previene le singolarità. Poi vedremo esempi in cui il noise restituisce l'unicità ed esempi di selezione tramite noise che tende a zero. Al termine della nota faremo alcuni commenti su alcuni casi non lineari, come le equazioni di Burgers, Hamilton-Jacobi, Eulero 2D e Vlasov-Poisson 1D.

Alcuni elementi sono riportati nel libro [13], si veda anche [14], e sono stati ottenuti in collaborazione con molti coautori, tra i quali Massimiliano Gubinelli ed Enrico Priola.

2. – Trasporto lineare

Esaminiamo la PDE

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

nell'incognita $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Il campo (detto *drift*) $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ è assegnato, misurabile e verrà preso con poca regolarità.

Nel caso classico in cui $b \in C([0, T]; Lip(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$, la PDE è ben posta in $C^1(\mathbb{R}^d)$, o anche in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il profilo iniziale $u_0(x)$ viene trasportato:

$$u(t, \varphi_t(x)) = u_0(x)$$

dal flusso $\varphi_t(x)$ delle caratteristiche, soluzione dell'equazione

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = b(t, \varphi_t(x)), \quad \varphi_0(x) = x.$$

Quando però b è meno regolare, possono insorgere problemi di non unicità e di nascita di singolarità. La singolarità tipica è la nascita di una discontinuità, a partire da dati iniziali regolari.

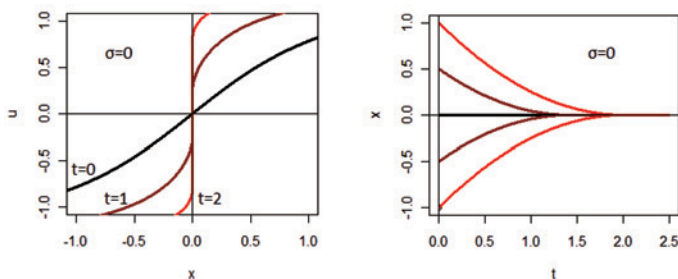
Vediamo un esempio:

$$d = 1, \quad b(x) = -2\text{sign}(x)\sqrt{|x|}.$$

Prendiamo per fissare le idee

$$u_0(x) = \arctan(x).$$

La soluzione, unica, dell'equazione del trasporto diventa discontinua immediatamente. Le seguenti due figure mostrano il profilo $x \mapsto u(t, x)$ a tre diversi istanti di tempo ($t = 0, 1, 2$) e le relative caratteristiche che coalescono.



Non è difficile simulare numericamente – risolvendo numericamente l'equazione delle caratteristiche stocastiche a partire da numerosi dati iniziali diversi, relativamente alla stessa realizzazione del rumore e trasportando il profilo

iniziale lungo le caratteristiche – la seguente variante stocastica della PDE precedente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + \sigma \nabla u \circ \frac{dW}{dt} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

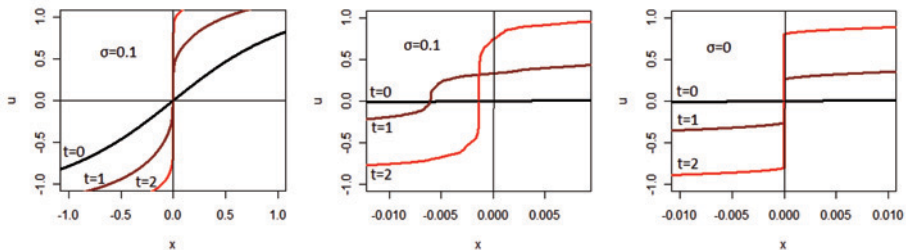
In questo modello viene aggiunto un noise di tipo trasporto (e in forma di Stratonovich, si veda [16] per una trattazione del calcolo stocastico necessario): si sostituisce $b(t, x)$ con $b(t, x) + \sigma \frac{dW(t)}{dt}$. L'equazione delle caratteristiche diventa l'equazione stocastica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x.$$

Per non stravolgere l'aspetto delle soluzioni, e per restare vicino all'idea che i sistemi hanno sì delle perturbazioni ma piccole, abbiamo preso

$$\sigma = 0.1.$$

Ecco come appaiono i profili $x \mapsto u(t, x)$ ai tre diversi istanti $t = 0, 1, 2$. La prima figura mostra la soluzione stocastica nella scala originaria sull'asse delle x . La seconda figura mostra uno zoom della soluzione stocastica nelle vicinanze di $x = 0$, zoom operato tramite cambio di scala (solamente) sull'asse delle x . La terza figura, a titolo di confronto, mostra la stessa simulazione, con lo stesso zoom, senza noise ($\sigma = 0$).



L'effetto di questo noise è quello di una traslazione aleatoria. La discontinuità è sparita. Inoltre, come si può osservare da altre semplici figure qui non riportate, la derivata numerica nella zona ripida è elevata (circa 310) ma non “infinita” (la partizione sull'asse delle x in questa simulazione è tale che potevano venire valori della derivata numerica pari a decine di migliaia).

REMARK 2.1. – Di solito si pensa che il noise produca profili altamente oscillanti. Nel tempo sì, ma non necessariamente nello spazio. Dipende dal tipo di noise, da come questo entra nell'equazione. Qui il noise entra come termine di

trasporto quindi rappresenta un contributo ulteriore al trasporto provocato dal campo b , una sorta di traslazione spaziale aleatoria. Come si vede dalle simulazioni, questo tipo di noise non corruga marcatamente il profilo.

Se osserviamo numericamente le curve caratteristiche del caso stocastico possiamo riconoscere che esse non collassano. Alcune figure si trovano nel lavoro [14].

2.1 – Risultati rigorosi (drift di classe Hölder)

Sia (Ω, F, P) uno spazio probabilizzato, $(F_t)_{t \geq 0}$ una filtrazione, $(W_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano d -dimensionale su $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$. Il seguente risultato è contenuto nel lavoro [11]:

THEOREM 2. – Se $b \in C([0, T]; C_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$, allora l'equazione differenziale stocastica

$$(1) \quad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x$$

genera un flusso stocastico di diffeomorfismi $\varphi_t(x, \omega)$, con derivate α' -Hölder continue per ogni $\alpha' < \alpha$.

Questo significa – eliminando alcune specifiche, per brevità – che esiste una funzione misurabile $(\omega, t, x) \mapsto \varphi_t(x, \omega)$ da $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che:

1. per ogni x , $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(x, \omega)$ è una soluzione dell'equazione (1);
2. per ogni t e quasi ogni ω , l'applicazione $(x) \mapsto \varphi_t(x, \omega)$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^d$ con derivate α' -Hölder continue per ogni $\alpha' < \alpha$.

Tramite questo risultato e con la stessa dimostrazione del teorema dell'Appendice A di [11] si ha:

THEOREM 3. – Se $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ allora $u(t, x) = u_0(\varphi_t^{-1}(x))$ è $C^1(\mathbb{R}^d)$ ed è l'unica soluzione forte dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + \sigma \nabla u \circ \frac{dW}{dt} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Per la definizione di soluzione di questa SPDE rimandiamo al lavoro [11].

Quindi questo tipo di perturbazione casuale impedisce l'insorgenza della singolarità, nel senso della discontinuità. Naturalmente, è pur vero che se il dato iniziale fosse C^∞ , la soluzione dell'equazione stocastica non sarebbe necessariamente C^∞ . Quindi non stiamo affermando che il noise elimina ogni forma di singolarità ma almeno qualche forma.

2.2 – Il flusso

Il punto cruciale del risultato precedente è l'esistenza e la regolarità del flusso associato all'equazione

$$(2) \quad X_t = \int_0^t b(s, X_s) ds + \sigma W_t, \quad X_0 = x$$

quando b è solo hölderiano: $b \in C([0, T]; C_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$.

La ragione di questo risultato è simile a quella dell'esistenza del cosiddetto “local time”, secondo l'approccio di Tanaka (si veda [23]). Vale infatti, per la formula di Itô,

$$\int_0^t b(s, X_s) ds = U(t, X_t) - U(0, x) - \int_0^t \nabla U(s, X_s) \sigma dW_s$$

dove $U(t, x)$ risolve

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \Delta U + (b \cdot \nabla) U = -b.$$

Il fatto cruciale è che U e ∇U sono più regolari di b : addirittura $\nabla U \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Quindi abbiamo sostituito il termine $\int_0^t b(s, X_s) ds$ dell'equazione (2) con termini più regolari, a coefficienti almeno lipschitziani. Questa è la ragione su cui poggia l'esistenza del flusso stocastico. Enfatizziamo questo fatto col seguente concetto.

2.3 – Misura di occupazione e funzioni non-regolari

La misura di occupazione di un processo X su $[0, t]$ è la misura di Borel finita aleatoria μ_t definita da

$$\mu_t(f) = \int_0^t f(X_s) ds, \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d).$$

Per $d > 1$, se X è soluzione dell'equazione (1), essa è singolare rispetto alla misura di Lebesgue (mentre per $d = 1$ è assolutamente continua e la sua densità è il local time). Tuttavia, è sufficientemente “diffusa” da regolarizzare funzioni non-regolari:

$$\mu_t(f) = U(t, X_t) - U(0, x) - \int_0^t \nabla U(s, X_s) \sigma dW_s$$

dove U è soluzione di

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \Delta U + (b \cdot \nabla) U = -f.$$

La misura di occupazione di funzioni deterministiche regolari può concentrarsi invece nei punti singolari di f . Questa proprietà di “diffusione” della misura di occupazione è forse la ragione profonda dei teoremi discussi sopra.

2.4 – Generalizzazione a drift ancor meno regolari

L'equazione stocastica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x$$

sotto l'ipotesi

$$b \in L^q(0, T; L^p(\mathbb{R}^d)) \quad \text{per qualche } p, q \geq 2 \text{ tale che } \frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1$$

- ha soluzione forte unica [15]
- genera un flusso stocastico di omeomorfismi hölderiani [9], C^α per ogni $\alpha < 1$

Cosa possiamo dire dell'equazione del trasporto stocastica? In un lavoro in fase di redazione [10] si mostra ad esempio che, se $\text{div} b \in L^1_{loc}$ (che serve per dare senso debole alla SPDE), e se $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, allora $u(t, x) = u_0(\varphi_t^{-1}(x))$ è $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ per ogni $\alpha < 1$ ed è una soluzione della SPDE.

Quindi anche in questo caso non insorgono discontinuità nella soluzione, partendo da dati iniziali regolari. La regolarità $u(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ però è un problema aperto. Risolto almeno in un caso particolare di drift discontinui [2]:

THEOREM 4. – Se $b \in BV$ e $[b']^+ \in L^\infty$ oppure $[b']^- \in L^\infty$, allora $\varphi_t(x)$ (e quindi $u(t, \cdot)$) è $C^{1,\alpha}$ per ogni $\alpha < 1/2$.

3. – Prolungamento dopo la singolarità. Osservazioni concettuali

Nel caso di PDE nonlineari, i coefficienti dipendono dalla soluzione e quindi diventano anch'essi irregolari quando insorge una singolarità. Da quel momento si deve risolvere un'equazione a coefficienti irregolari, in una classe di soluzioni irregolari. Questo può provocare problemi di non-unicità.

Per le equazioni del trasporto lineari, in cui il drift è dato, non avviene questo degrado spontaneo della regolarità dei coefficienti, che quindi va imposto a priori se vogliamo studiare cosa può accadere dopo una singolarità.

Il problema è quindi: che succede all'equazione del trasporto se consideriamo coefficienti irregolari e studiamo soluzioni deboli? Ci sono esempi di non-unicità. Un esempio semplice si ha nel caso

$$d = 1, \quad b(x) = +2\text{sign}(x)\sqrt{|x|}.$$

Si vedano grafici e dettagli analitici delle soluzioni in [13].

Il nostro obiettivo è duplice:

- mostrare che il noise restituisce l'unicità
- capire che accade quando il noise tende a zero.

3.1 – Unicità prodotta dal noise

Il seguente risultato, basato sulle proprietà di flusso descritte in precedenza, è dimostrato nel lavoro [11]:

THEOREM 5. – *Se $b \in C([0, T]; C_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$ e $\text{div } b \in L^p([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ per qualche $p > 2 \wedge d$, allora esiste un'unica soluzione debole di classe L^∞ dell'equazione del trasporto stocastica.*

Parte dell'interesse di questo risultato risiede nel confronto con la teoria deterministica dell'unicità di soluzioni L^∞ : se $b \in L^1(0, T; W^{1,1}(\mathbb{R}^d))$, $\text{div } b \in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d))$, c'è unicità di soluzioni $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, [8]; ed il caso $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ è stato generalizzato a $BV(\mathbb{R}^d)$ da [1] con diversi ampliamenti della teoria.

Come abbiamo detto, la dimostrazione del teorema 5 è basata sull'esistenza del flusso regolare (ma non solo!), per cui è radicalmente diversa da quelle delle teorie deterministiche ora citate. Sono state poi trovate altre strade completamente diverse per dimostrare l'unicità della SPDE del trasporto con drift non regolare. Il seguente risultato [4] è basato sul concetto di soluzione di rinormalizzazione, quindi è più simile in spirito alla teoria deterministica sopra citata e necessita delle stesse ipotesi per poter effettuare la rinormalizzazione ($b \in BV(\mathbb{R}^d)$) ma, grazie alla presenza del noise, permette di rilassare la limitatezza spaziale $\text{div } b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ imposta nella teoria deterministica:

THEOREM 6. – *Se $b \in BV(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{div } b \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora c'è unicità in L^∞ per la SPDE.*

Una seconda dimostrazione completamente diversa e prettamente stocastica è stata trovata da [19] ed è basata sullo sviluppo in caos di Wiener delle soluzioni; il risultato è, per certi versi, il più generale trovato fino ad ora:

THEOREM 7. – *Se $b \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per qualche $p > 2 \vee d$ e $\text{div } b \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per qualche $p > 2 \vee \frac{d}{2}$, allora c'è unicità in L^∞ per la SPDE.*

3.2 – Limite per il noise che tende a zero

Mentre i risultati delle sezioni precedenti valgono in dimensione qualsiasi e sono relativi a classi di equazioni, l'unico risultato noto sul problema fondamentale del limite per il noise che tende a zero, per PDE (in condizioni di non unicità per la PDE limite) è relativo ad un esempio specifico uni-dimensionale, [3], basato sul lavoro [5] relativo alle equazioni ordinarie uni-dimensionali. Citiamo però anche il lavoro [18] che analizza il limite per il noise che tende a zero per leggi di conservazione scalari; lì c'è non unicità delle soluzioni non entropiche che complica lo studio ma l'unicità della soluzione entropica diventa l'arma fondamentale con cui identificare il limite. Il lavoro [18] caratterizza con molta precisione il difficile ed anomalo comportamento di grandi deviazioni in presenza di non unicità del problema limite.

Si consideri l'esempio di non-unicità già enunciato sopra, $b(x) = +2 \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$, con la condizione iniziale

$$u_0 = 1_{\{x>0\}}.$$

Si consideri anche la regolarizzazione viscosa della PDE di trasporto:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b \cdot \nabla u_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = u_0$$

Si può dimostrare [3] che, per $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$u_\varepsilon \rightarrow u^* = \begin{cases} 1 & \text{per } x > t^2 \\ 1/2 & \text{per } -t^2 \leq x \leq t^2 \\ 0 & \text{per } x < -t^2 \end{cases}$$

Il valore 1/2 non è molto naturale, se si pensa all'idea di trasporto delle condizioni iniziali. Più naturale è aspettarsi che il trasporto di u_0 possa avvenire in due modi diversi a seconda di ciò che accade in $x = 0$ per tempi molto piccoli.

THEOREM 8. – *Se u^ε è la soluzione forte unica di*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + b \cdot \nabla u^\varepsilon + \varepsilon \nabla u^\varepsilon \circ \frac{dW}{dt} = 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = u_0$$

allora la sua legge P^ε converge debolmente a:

$$P^\varepsilon \rightharpoonup P = \frac{1}{2} \delta_{u^{(+)}} + \frac{1}{2} \delta_{u^{(-)}}$$

dove

$$u^{(-)}(x, t) = 1_{\{x > -t^2\}}, \quad u^{(+)}(x, t) = 1_{\{x \geq t^2\}}.$$

3.3 – Caso lineare, problemi aperti

Concludiamo sottolineando che, relativamente all'equazione del trasporto lineare, il problema maggiormente aperto è quello del limite per noise che tende a zero. Collegato a questo, il problema del prolungamento dopo una singolarità deve essere capito meglio, eventualmente con riferimento anche all'equazione di continuità che, pur essendo simile a quella del trasporto per molti versi, ha però delle singolarità di natura particolare.

In vista dei problemi non lineari sarebbe poi decisivo sviluppare metodi per studiare il problema lineare con drift b aleatorio (in quanto deve poi essere funzione della soluzione u che è aleatoria), ma questo al momento è completamente aperto. Tutte le tecniche illustrate sopra smettono di funzionare se b è aleatorio.

4. – Commenti su casi non lineari

Mentre il quadro, relativo a singolarità e unicità sotto perturbazioni stocastiche, inizia a comporsi nel caso delle equazioni lineari del trasporto, le conoscenze nel caso nonlineare sono estremamente frammentarie. L'approccio più immediato, che consisterebbe nel ricondurre alcune questioni al caso lineare o sue iterazioni, "congelando" il drift, non è praticabile perché non siamo in grado di studiare il caso lineare con b aleatorio, che è il caso in cui ci si trova quando b dipende dalla soluzione. Serve uno studio diretto del problema nonlineare.

Alcuni primi risultati stanno emergendo per leggi di conservazione scalare come le equazioni di Burgers, per semplici equazioni di tipo Hamilton-Jacobi, per particolari soluzioni delle equazioni di Eulero in due dimensioni e di Vlasov-Poisson in una dimensione. Alcuni sono risultati positivi ma altri negativi.

Una prima osservazione di carattere generale è che per molte delle equazioni ora citate un noise della forma $\sigma \nabla u \circ \frac{dW}{dt}$ come quello usato sopra *non può* produrre alcun cambiamento nelle proprietà qualitative delle soluzioni, in termini di emergenza di singolarità o non unicità. Infatti, se indichiamo con u una soluzione del problema deterministico, la funzione $v(t, x) = u(t, x - \sigma W_t)$ è soluzione del problema stocastico e viceversa. Questo si può verificare immediatamente, ad esempio, per le equazioni di Burgers; infatti, permettendoci per semplicità di svolgere un calcolo un po' formale, dall'equazione $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ricaviamo (il calcolo di Stratonovich gode delle stesse regole formali del calcolo tradizionale)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt}$$

da cui $\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt} = 0$. Quindi se u sviluppa una singolarità, lo stesso accade a v , e così via.

Di conseguenza, per i modelli fisici che hanno questo tipo di invarianza per traslazioni spaziali (Burgers, Eulero, Vlasov, forme particolari di Hamilton-Jacobi), è necessario mettere in gioco perturbazioni stocastiche più complesse, con una maggior struttura spaziale, non semplici traslazioni aleatorie rigide di tutto lo spazio simultaneamente; il rumore deve essere in grado di perturbare localmente la dinamica in maniera disordinata spazialmente, come se agisse in modo quasi indipendente in punti diversi dello spazio. Le perturbazioni giuste – anche alla luce dei primi risultati positivi illustrati sotto – potrebbero essere del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla u \circ \frac{dW^k}{dt}$$

con opportuna struttura della funzione di covarianza

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \sigma_k(y).$$

4.1 – Le equazioni di Burgers

Purtroppo, anche dopo aver capito che il rumore giusto potrebbe essere questo, resta il fatto che le equazioni di Burgers non modificano il loro comportamento, dal caso deterministico a quello stocastico: anche con queste perturbazioni è possibile fare esempi di non unicità – nella classe delle soluzioni deboli e non necessariamente entropiche – e di singolarità, shock; si vedano [13] e più precisamente [14].

4.2 – Equazioni di Hamilton-Jacobi

Al momento, per queste equazioni, sono stati trovati solo esempi negativi, cioè esempi in cui, come per Burgers, non si vede alcun miglioramento con l'aggiunta di un rumore. Ma in effetti questi esempi sono troppo simili a Burgers e per di più utilizzano di nuovo una forma di invarianza spaziale, per cui l'argomento necessita di maggior studio. Esaminiamo un esempio particolare, l'equazione:

$$du(t, x) + H(Du(t, x))dt + \sigma Du(t, x) \circ dW_t = 0$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

Come nel caso lineare o per Burgers, si possono introdurre delle caratteristiche stocastiche

$$\begin{aligned} dx_t &= D_p H(p_t) dt + \sigma dW_t \\ dp_t &= 0 \end{aligned}$$

che, in questo caso particolare, si risolvono esplicitamente:

$$p_t = p_0 = Du_0(x_0)$$

$$x_t = x_0 + t \cdot D_p H(Du_0(x_0)) + \sigma W_t.$$

Di conseguenza, se partiamo da due diverse condizioni iniziali $x'_0 \neq x''_0$, per le corrispondenti soluzioni vale

$$x'_t - x''_t = x'_0 - x''_0 + t \cdot [D_p H(Du_0(x'_0)) - D_p H(Du_0(x''_0))]$$

e questa differenza può essere uguale a zero, ad esempio per $d = 1$, $H(p) = p^2$, $x'_0 > x''_0$, $Du_0(x'_0) < Du_0(x''_0)$. Il rumore ($\sigma \neq 0$) non ha impedito questo shock, già presente nel caso deterministico ($\sigma = 0$). Non c'è differenza tra i due casi.

Per altre classi di equazioni di Hamilton-Jacobi e per rumori più complessi il problema è aperto. Il modello stocastico che si può provare a considerare è della forma

$$\begin{aligned} du(t, x) + H(Du(t, x))dt + \sum_k \sigma_k(x) \cdot Du(t, x) \circ dW_t^k &= 0 \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned}$$

considerato ad esempio nel lavoro [17]. Le sue caratteristiche hanno la forma

$$\begin{aligned} dx_t &= D_p H(p_t)dt + \sum_k \sigma_k(x_t) \circ dB_t^k \\ dp_t &= - \sum_k p_t \cdot D\sigma_k(x_t) \circ dB_t^k. \end{aligned}$$

La domanda, per capire l'eventuale insorgenza o meno di shock e l'effetto del rumore, è: l'applicazione

$$x_0 \longmapsto x_t$$

può essere un diffeomorfismo (aleatorio) di $\mathbb{R}^d$, grazie al noise, in casi in cui non lo è per $\sigma_k \equiv 0$?

4.3 – Equazioni di Eulero 2D e di Vlasov-Poisson 1D

Queste equazioni hanno alcuni caratteri simili, come è illustrato nel libro [20]. Per entrambe è stato possibile mostrare un miglioramento della teoria nel caso in

cui agisca un rumore del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla u \circ \frac{dW^k}{dt}$ con opportune ipotesi di non-degenerazione locale: detta $Q(x, y)$ la funzione di covarianza introdotta sopra, si richiede

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q(x_i, x_j) v_i v_j > 0$$

se gli x_i sono diversi ed i v_i sono non nulli. Illustriamo brevemente i risultati, che si possono consultare in dettaglio nei lavori [12], [7].

Per le equazioni di Eulero 2D scritte per il campo di vorticità $\xi(t, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \cdot \nabla \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla \xi \circ \frac{dW^k}{dt}$$

(u è la velocità) si può studiare l'evoluzione di un campo di vorticità distribuzionale concentrato in un numero finito di punti, tramite un'opportuna dinamica hamiltoniana di dimensione finita – il moto dei punti di vorticità. Questa dinamica non è ben posta per tutte le condizioni iniziali: ci sono esempi espliciti di configurazioni iniziali di punti di vorticità che, evolvendo secondo questa dinamica, in tempo finito collassano in uno stesso punto, facendo perdere di significato alle equazioni di evoluzione. Si tratta quindi di un fenomeno di singolarità, anche se di tipo molto particolare rispetto a quelli esaminati sopra nel caso lineare. L'aggiunta di una perturbazione stocastica del tipo più complesso, descritta sopra, fa sì che per ogni configurazione iniziale dei vortici la dinamica sia definita globalmente nel tempo, in modo univoco, senza collasso dei vortici.

Per le equazioni di Vlasov-Poisson 1D, la soluzione $f(t, x, v)$ ha il significato fisico di densità di carica elettrica e le equazioni hanno la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \frac{\partial f}{\partial v} \circ \frac{dW^k}{dt}$$

dove il campo $E(t, x)$ è legato linearmente ad f . Anche per questa equazione si può studiare il caso in cui la carica sia concentrata in un numero finito di punti. Di nuovo, questa soluzione distribuzionale della PDE si può studiare tramite un sistema di equazioni differenziali ordinarie, il moto delle cariche elettriche concentrate. Si possono poi fare vari esempi di configurazioni iniziali di carica che collassa in tempo finito, incluso il caso di una carica distribuita con continuità nello spazio (ma concentrata in velocità), caso che però non è ancora coperto da risultati stocastici. Limitatamente al caso di un numero finito di cariche concentrate, analogamente alle equazioni di Eulero, si riesce a dimostrare che con l'aggiunta di una perturbazione stocastica del tipo detto sopra le cariche non possono più collassare. Tecnicamente il problema è anche più difficile del caso

delle equazioni di Eulero, in quanto il rumore qui viene messo solamente nel termine di velocità e quindi è necessario mostrare che il suo effetto si propaga anche al termine spaziale.

REFERENCES

- [1] L. AMBROSIO, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** (2004), 227-260.
- [2] S. ATTANASIO, *Stochastic flows of diffeomorphisms for one-dimensional SDE with discontinuous drift*, Electron. Commun. Probab. **15** (2010), 213-226.
- [3] S. ATTANASIO - F. FLANDOLI, *Zero-noise solutions of linear transport equations without uniqueness: an example*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **347**, no. 13-14 (2009), 753-756.
- [4] S. ATTANASIO - F. FLANDOLI, *Renormalized solutions for stochastic transport equations and the regularization by bilinear multiplicative noise*, Comm. P.D.E. **36**, n. 8 (2011), 1455-1474.
- [5] R. BAFICO - P. BALDI, *Small random perturbations of Peano phenomena*, Stochastics, **6**, no. 3-4 (1981/82), 279-292.
- [6] G. DA PRATO - J. ZABCYK, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
- [7] F. DELARUE - F. FLANDOLI - D. VINCENZI, *Noise prevents collapse of Vlasov Poisson point charges*, to appear on Comm. Pure Appl. Math.
- [8] R. J. DI PERNA - P. L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.
- [9] E. FEDRIZZI - F. FLANDOLI, *Hölder flow and differentiability for SDEs with nonregular drift*, to appear on Stoch. Anal. Appl.
- [10] E. FEDRIZZI - F. FLANDOLI, *Noise Prevents Singularities in Linear Transport Equations*, to appear on J. Funct. Anal.
- [11] F. FLANDOLI - M. GUBINELLI - E. PRIOLA, *Well posedness of the transport equation by stochastic perturbation*, Invent. Math. **180** (2010), 1-53.
- [12] F. FLANDOLI - M. GUBINELLI - E. PRIOLA, *Full well-posedness of point vortex dynamics corresponding to stochastic 2D Euler equations*, Stoch. Proc. Appl. **121**, no. 7 (2011), 1445-1463.
- [13] F. FLANDOLI, *Random Perturbation of PDEs and Fluid Dynamic Models*, LNM 2015, Springer 2011.
- [14] F. FLANDOLI, *The interaction between noise and transport mechanisms in PDEs*, Milan J. Math. **79**, no. 2 (2011), 543-560.
- [15] N. V. KRYLOV - M. RÖCKNER, *Strong solutions of stochastic equations with singular time dependent drift*, Probab. Theory Related Fields, **131** (2005), 154-196.
- [16] H. KUNITA, *Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour, XL-2010, Lecture Notes in Math. 2015, Springer, Berlin, 2011.
- [17] P.-L. LIONS - P. E. SOUGANIDIS, *Uniqueness of weak solutions of fully nonlinear stochastic partial differential equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**, no. 10 (2000), 783-790.
- [18] M. MARIANI, *Large deviations principles for stochastic scalar conservation laws*, Probab. Theory Related Fields, **147**, no. 3-4 (2010), 607-648.
- [19] M. MAURELLI, *Wiener chaos and uniqueness for stochastic transport equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **349**, no. 11-12 (2011), 669-672.

- [20] A. J. MAJDA - A. L. BERTOZZI, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] J. W. MORGAN - F. T.-H. FONG, *Ricci flow and geometrization of 3-manifolds*, University Lecture Series, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [22] C. PRÉVÔT - M. RÖCKNER, *A concise course on stochastic partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1905, Springer, Berlin, 2007.
- [23] D. REVUZ - M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa
Via F. Buonarroti 1/c, 56127 Pisa
E-mail: flandoli@dma.unipi.it

Received December 10, 2011 and accepted January 30, 2012

