Bollettino
Unione Matematica Italiana

L. D'Onofrio, C. Sbordone, R. Schiattarella

# Proprietà di misurabilità di un omeomorfismo in ipotesi minimali di integrabilità per il gradiente

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9*, Vol. **5** (2012), n.3, p. 727–730.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2012_9_5_3_727_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

Bollettino U. M. I.
(9) **V** (2012), 727-730

# Proprietà di misurabilità di un omeomorfismo in ipotesi minimali di integrabilità per il gradiente (*)

L. D'ONOFRIO - C. SBORDONE - R. SCHIATTARELLA

*dedicato alla memoria del Professore Enrico Magenes*

**Sunto.** – *Viene messo in evidenza il ruolo essenziale degli spazi di Sobolev generalizzati* $\mathcal{W}^{1,n)}$ *nello studio della proprietà* (*N*) *di Lusin per omeomorfismi tra aperti di* $\mathbb{R}^n$.

Sia $f : \Omega \xrightarrow{\text{su}} \Omega'$ una mappa sull'aperto limitato connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ continua con l'inversa $f^{-1}$ (cioè $f \in \mathrm{Hom}(\Omega; \Omega')$). Cerchiamo condizioni minimali sull'integrabilità del gradiente $Df$ affinché $f$ goda della proprietà (N)

(1) $$|E| = 0 \Longrightarrow |f(E)| = 0$$

ove $|X|$ indica la misura di Lebesgue di $X \subset \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1 [Reshetnyak, 1966]. – *Sia* $f \in \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega')$ *e* $f \in \mathcal{W}^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *cioè*

(2) $$\int_\Omega |Df|^n \, dx < \infty$$

*allora vale* (1).

ESEMPIO 1 ([14]). – Esiste $f \in \mathrm{Hom}\big((0,1)^n; (0,1)^n\big)$, $f \in \mathcal{W}^{1,1}\big((0,1)^n; \mathbb{R}^n\big)$ tale che

(3) $$J_f(x) = |\det Df(x)| > 0 \text{ q.o.}$$

(4) $$\sup_{0<\varepsilon\leq n-1} \varepsilon \int_\Omega |Df|^{n-\varepsilon} \, dx < \infty$$

per cui (1) non è soddisfatta.

(*) Lavoro eseguito durante il periodo in cui il secondo autore era distaccato presso il Centro Linceo Interdisciplinare "B. Segre" dell'Accademia dei Lincei.

Come in [13], lo spazio $L^{n)}(\Omega)$, costituito dalle funzioni misurabili $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$\|u\|_{n)} = \sup_{0<\varepsilon\leq n-1} \left( \varepsilon \fint_{\Omega} |u(x)|^{n-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}} < \infty$$

è uno spazio di Banach che contiene $L^n(\Omega)$. Inoltre

$$L^n_b(\Omega) = \left\{ u \in L^{n)}(\Omega) \mid \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{n-\varepsilon}\, dx = 0 \right\}$$

è un suo sottospazio chiuso, costituito dalla chiusura di $L^n(\Omega)$ in $L^{n)}(\Omega)$.

Si verifica che le funzioni misurabili $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^n}{\lg(e+|u|)}\, dx < \infty$$

appartengono a $L^n_b(\Omega)$.

In sintesi ([8]):

$$L^n \subset \frac{L^n}{\lg L} \subset L^{n)}_b \subset L^{n)}.$$

TEOREMA 2 ([14]). – *Sia* $f \in \mathrm{Hom}(\Omega;\Omega')$ *tale che* $|Df| \in L^{n)}_b(\Omega)$, *cioè*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_{\Omega} |Df|^{n-\varepsilon}\, dx = 0 \tag{5}$$

*e* $J_f(x) \geq 0$ *q.o. Allora vale* (1).

OSSERVAZIONE 1 ([8], [14]). – *Il teorema* 2 *sussiste nell'ipotesi, più debole di* (5), *che* $|Df| \in L^{n)}(\Omega)$ *ed esista* $i \in \{1,\dots,n\}$ *tale che*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla f^{(i)}|^{n-\varepsilon}\, dx = 0$$

*ove* $f = (f^{(1)},\dots,f^{(n)})$

In un lavoro in corso di stampa [5] viene data una diversa dimostrazione per $n = 2$ che si basa sul seguente notevole teorema di approssimazione (si veda [6]):

TEOREMA 3. – *Sia* $n = 2$ *e* $f \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Hom}(\Omega;\Omega')$ *con* $|Df| \in L^{2)}_b(\Omega)$, *allora esiste una successione* $f_j \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Hom}(\Omega;\Omega')$ *tale che*

$$f_j \to f \quad \text{in } C^0(\Omega) \text{ e } L^{2)}(\Omega)$$

$$Df_j \to Df \quad \text{in } L^{2)}(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \varphi J_{f_j} \to \int_{\Omega} \varphi J_f \qquad \forall \varphi \in C^1_0(\Omega)$$

ESEMPIO 2 ([3], [11]). – Esiste $g \in \mathcal{W}^{1,1}((0,1)^n, (0,1)^n) \cap \mathrm{Hom}((0,1)^n; (0,1)^n)$, tale che

$$J_g(x) = |\det Dg(x)| = 0 \text{ q.o.} \tag{6}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leq n-1} \varepsilon \int_\Omega |Dg|^{n-\varepsilon}\, dx < \infty, \qquad \Omega = (0,1)^n \tag{7}$$

$$\exists\, |N_0| = 0 \ : \ |g(N_0)| = |(0,1)^n| = 1 \tag{8}$$

OSSERVAZIONE 2. – *Mentre nell'Esempio* 1, $f^{-1}$ *è in* $\mathcal{W}^{1,1}$, *nell'Esempio* 2, $g^{-1} \notin \mathcal{W}^{1,1}$ *ma* $g^{-1}$ *è in BV, spazio delle funzioni a variazione limitata.*

Dunque un esempio patologico come l'Esempio 2 può essere evitato per $n = 2$, pur di richiedere che la mappa sia bi-Sobolev, cioè $f \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $f^{-1} \in \mathcal{W}^{1,1}(f(\Omega), \mathbb{R}^2)$. Ciò non è casuale, grazie alle seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1 ([5]). – *Se* $f$ *è bi-Sobolev allora*

$$J_f(x) = 0 \ \ q.o. \Longleftrightarrow J_{f^{-1}}(y) = 0 \ \ q.o.$$

PROPOSIZIONE 2 ([5]) [$n = 2$]. – *Sia* $f$ *un omeomorfismo di Sobolev. Allora*

$$J_f(x) = 0 \ \ q.o. \Longrightarrow f^{-1} \in BV \setminus \mathcal{W}^{1,1}$$

Ulteriori proprietá di regolaritá sono studiate in [1], [2], [4], [7],[9], [10], [12], [15], [16], [17].

*Ringraziamenti.* Gli Autori ringraziano il prof. Lucio Boccardo per un utile suggerimento.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI


[1] G. ALBERTI, *Generalized N–property and Sard Theorem for Sobolev maps*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 23 (2012), no. 4, in corso di stampa.

[2] L. AMBROSIO - G. DE PHILIPPIS e B. KIRCHHEIM, *Regularity of optimal transport maps and partial differential inclusions*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 22 (2011), no. 3, 311–336.

[3] R. ČERNÝ, *Homeomorphism with zero Jacobian: sharp integrability of the derivative*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), no. 1, 161–174.

[4] A. CLOP e P. KOSKELA, *Orlicz-Sobolev regularity of mappings with subexponentially integrable distortion*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 20 (2009), no. 4, 301–326.

[5] L. D'ONOFRIO, C. SBORDONE e R. SCHIATTARELLA, *The Grand Sobolev homeomorphisms and their measurability properties*, Adv. Nonlinear Stud., in corso di stampa.

[6] L. D'Onofrio e R. Schiattarella, *Approximation of Grand Sobolev homeomorphisms and their properties*, in preparazione.

[7] N. Fusco, G. Moscariello e C. Sbordone, *The limit of $\mathcal{W}^{1,1}$ homeomorphism with finite distortion*, Calc. Var. Partial Differential Equations 33 (2008), no. 3, 377–390.

[8] L. Greco, *A remark on the equality det $Df$ = Det $Df$*, Differential Integral Equations 6 (1993), 1089–1100.

[9] L. Greco e G. Zecca, *A version of Gehring lemma in Orlicz spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl. 23, (2012), 29–50.

[10] L. Greco, C. Sbordone e R. Schiattarella, *Composition of bi–Sobolev homeomorphism*, Proc. of the Royal Society of Edinburgh Sec. A, Mathematics, Vol. 142, (2012) 61–80.

[11] S. Hencl, *Sobolev homeomorphism with zero Jacobian almost everywhere*, J. Math. Pures Appl. (9) 95 (2011), no. 4, 444–458.

[12] S. Hencl, G. Moscariello, A. Passarelli di Napoli e C. Sbordone, *Bisobolev mappings and elliptic equation in the plane*, J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 22–32.

[13] T. Iwaniec e C. Sbordone, *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses* Arch. Mech. Anal. 119, n.2, 1992, 129–143.

[14] J. Kauhanen, P. Koskela e J. Malý, *Mappings of finite distortion: condition N* Michigan Math. J. Volume 49, Issue 1 (2001), 169–181.

[15] P. Koskela, J. Malý e T. Zürcher, *Luzin's Condition* ($N$) *and Sobolev mappings*, to appear on Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 23 (2012) no. 4, in corso di stampa.

[16] G. Moscariello e A. Passarelli di Napoli, *The regularity of the inverses of Sobolev homeomorphisms with finite distortion*, J. Geom. Anal., in corso di stampa.

[17] G. Moscariello, A. Passarelli di Napoli e C. Sbordone, *Planar ACL-homeomorphisms: critical points of their components*, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), no. 5, 1391–1397.



L. D'Onofrio: Dipartimento di Statistica e Matematica per la Ricerca Economica
Università Parthenope, Via Medina 40, 80131 Napoli, Italy
E-mail: donofrio@uniparthenope.it

C. Sbordone - R. Schiattarella:
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Cintia, 80126 Napoli, Italy
E-mail: sbordone@unina.it E-mail: roberta.schiattarella@unina.it


*Received August 26, 2012*