
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SUSANNA TERRACINI

Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. 5 (2012), n.3,
p. 689–710.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2012_9_5_3_689_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali (*)

SUSANNA TERRACINI

Abstract. – *Quanto segue è il testo della conferenza plenaria che ho tenuto al XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, in cui ho esposto il contenuto di due lavori in collaborazione con V. Barutello e G. Verzini ([2, 3]). In tali lavori si è sviluppato l'approccio variazionale alle traiettorie paraboliche della Meccanica Celeste, che connettono due configurazioni centrali minimali.*

1. – Introduzione

1.1 – Il problema degli N -corpi

Date N particelle puntiformi di masse m_i e posizioni $x_i \in \mathbb{R}^d$ e dati dei potenziali di interazione $U_{i,j}(x)$ (tali che si soddisfi il principio di azione e reazione, cioè $U_{i,j}(x) = U_{j,i}(-x)$), ci interessiamo al sistema di equazioni differenziali:

$$m_i \ddot{x}_i(t) = \sum_{j \neq i}^N \nabla U_{i,j}(x_i(t) - x_j(t)) .$$

Detta $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}$ la configurazione e $U(x) = \sum_{j < i}^N U_{i,j}(x_i - x_j)$ il potenziale totale. Detta $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$ abbiamo un sistema Newtoniano della forma:

$$M \ddot{x}(t) = \nabla U(x) .$$

Per noi i potenziali sono omogenei di grado $-\alpha$:

$$U_{i,j}(x) = \frac{m_i m_j}{|x|^\alpha}$$

e, come noto, il caso Kepleriano si ha per $\alpha = 1$. Osserviamo la presenza di

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 17 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

molte relazioni di interazione binaria (tutte le particelle interagiscono con tutte le altre). Il sistema degli N -corpi è integrabile per quadrature nel caso di due corpi, ma non lo è più non appena $N \geq 3$. Per questa ragione, è considerato il prototipo di sistema complesso, essendo soggetto a diversi regimi, anche in dipendenza di valori delle masse. Innanzitutto, sono di interesse le regioni dello spazio delle fasi in cui si hanno *dinamiche regolari* (esempio: il problema della stabilità del sistema solare), lo studio delle quali coinvolge principalmente la teoria KAM e quella delle perturbazioni. È in un certo senso paradossale che, nonostante la teoria KAM sia stata in origine motivata proprio dallo studio della stabilità del sistema planetario, tale applicazione sia stata resa possibile soltanto dagli avanzamenti più recenti della teoria (si veda per esempio il recente lavoro di Chierchia e Pinzari [12]). Altrettanto iminteressante è lo studio delle *regioni di instabilità* del problema degli N -corpi. Le metodologie coinvolte nel riconoscimento di orbite periodiche vieppiù complicate, ed in generale, di traiettorie non banali fanno capo sia alle teorie perturbative che a quelle proprie dell'Analisi non lineare (metodi variazionali e topologici). Un ruolo di fondamentale importanza è rivestito dalle orbite periodiche, la cui rilevanza è ben sottolineata nella celebre citazione di Poincaré:

Il semble d'abord que ce fait [l'existence de solutions périodiques] ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de M. Gylfdén.

Il y a même plus: voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le numéro 13¹ et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. [H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (1892-1899), p. 82].

⁽¹⁾ Poincaré considerava, in questo paragrafo, le equazioni hamiltoniane in forma canonica.

1.2 – *Minimi G-equivarianti del problema degli N-corpi*

Un capitolo notevole nello studio recente delle orbite periodiche riguarda quelle che hanno simmetrie spazio-temporali non banali. Nell'ultimo decennio ne sono state descritte diverse ed è stata elaborata una teoria sulla minimizzazione G -equivariante (si vedano per esempio le referenze [11, 23, 7, 8, 9, 20, 21, 46, 47, 22, 24]). Tale studio ha portato, per esempio, alla determinazione di orbite con le simmetrie dei gruppi di Klein delle rotazioni dei solidi platonici, nel caso di N -corpi di masse uguali (si vedano i lavori [20, 21, 24]). È da notare che, in tali casi, il potenziale ridotto ha la forma:

$$U(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{m_r}{d(x, r)^\alpha}$$

qui \mathcal{R} è l'insieme degli assi delle rotazioni e m_r dipende dall'ordine della rotazione. Il potenziale ridotto, come quello originario degli N -corpi peraltro, è dunque anisotropo, omogeneo di grado $-\alpha$. Dato un potenziale U come sopra, dati $a < b$, e una funzione x appartenente allo spazio di Sobolev $H^1((a, b); \mathbb{R}^d)$, consideriamo la sua *azione lagrangiana* (corrispondente alla lagrangiana \mathcal{L}):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}([a, b]; x) := \int_a^b \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t)) \, dt, \\ \mathcal{L}(\dot{x}, x) &:= \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x). \end{aligned}$$

Quando l'esponente di omogeneità è minore di due, se l'arco x interagisce con le singolarità del potenziale, allora l'azione può essere infinita oppure finita. Se invece $\alpha \geq 2$ l'azione di un arco di collisione è sempre infinita (*la strong force condition di W. Gordon*, [25]). Nell'approccio variazionale alle orbite periodiche, uno dei problemi principali è quello delle *collisioni*: in principio, infatti, le traiettorie minimali potrebbero presentare collisioni. È questo un problema strettamente collegato con il più classico problema della *regolarizzazione*., ovvero come proseguire il moto dopo una collisione. Questo secondo aspetto ha radici più antiche nella letteratura, ed è doveroso citare le regolarizzazioni proposte da Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Moser, Knauf ([33, 51, 41, 32]). Le tecniche di regolarizzazione prevedono un rivestimento doppio dello spazio delle configurazioni, insieme ad una riparametrizzazione. Nell'approccio variazionale, invece, si sono utilizzate appropriate variazioni per dimostrare che le orbite paraboliche non hanno collisioni. Un aspetto che è stato recentemente messo in luce (a partire da [48]) riguarda il *legame fra l'esistenza di collisioni in archi minimali e l'apparire delle orbite paraboliche*. In questa conferenza mi concentrerò proprio sull'analisi di questo legame.

2. – Orbite paraboliche

Traiettorie ad energia nulla

Consideriamo il sistema conservativo

$$(1) \quad \ddot{x}(t) = \nabla V(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Sigma,$$

dove $d \geq 2$, il potenziale V è regolare al di fuori di un insieme di collisioni Σ , vicino al quale ha limite $+\infty$:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \Sigma} V(x) = +\infty,$$

e infine soddisfa la condizione di normalizzazione

$$(3) \quad 0 = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < V(x) \quad \forall x.$$

Nel seguito supporremo inoltre che

$$(4) \quad V \text{ sia omogeneo di grado } -\alpha, \text{ per qualche } \alpha \in (0, 2).$$

DEFINIZIONE 2.1. – *Una traiettoria parabolica del sistema (1) è una soluzione globale e priva di collisioni che ha energia nulla:*

$$(5) \quad \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 = V(x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Come noto, nel problema di Keplero (cioè quando $V(x) = 1/|x|$), tutte le soluzioni intere con energia nulla disegnano delle parabole. In questo caso le orbite paraboliche possono essere definite equivalentemente come quelle soluzioni che hanno energia cinetica nulla all'infinito: $|\dot{x}(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm \infty$.

Moti asintotici e moti omotetici

Le orbite paraboliche hanno delle proprietà asintotiche notevoli, sia per quanto riguarda il modulo $|x|$ che la configurazione normalizzata $x/|x|$. Come prima cosa, $|x(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \pm \infty$ con un'asintotica precisa. Per descrivere il comportamento della configurazione normalizzata, ricordiamo che

DEFINIZIONE 2.2. – *Una configurazione centrale per V è un punto critico della restrizione di V alla sfera unitaria S^{d-1} .*

Va osservato che ad una configurazione centrale corrisponde un moto omotetico, a energia nulla e di collisione. Si tratta delle traiettorie autosimilari della forma:

$$x(t) = Kt^{\frac{2}{2+\alpha}} \xi$$

Inoltre, si dimostra che la configurazione normalizzata $x(t)/|x(t)|$ “tende” all’insieme delle configurazioni centrali di V , quando $t \rightarrow \pm \infty$. In particolare, se tale insieme è discreto, avremo che

$$\frac{x(t)}{|x(t)|} \rightarrow \zeta^\pm, \quad \text{as } t \rightarrow \pm \infty,$$

dove ζ^\pm sono due configurazioni centrali. *Se le configurazioni centrali sono isolate, le traiettorie paraboliche sono asintotiche alla giustapposizione di due moti omotetici (traiettorie di collisione-eiezione) associati a due configurazioni centrali.* L’andamento asintotico delle soluzioni paraboliche è stato studiato a partire da Chazy (~ 1920), fino ai lavori di Hulkover-Saari e Pollard (~ 1970) ([6, 5, 30, 42]). Il seguente enunciato si trova dimostrato in [3]: si considerano le *coordinate polari*:

$$r := |x| > 0 \quad s := x/|x| \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

TEOREMA 2.3. – *Se V è un potenziale $-\alpha$ -omogeneo, $\ddot{x} = \nabla V(x)$ su $(t_0, +\infty)$, $|\dot{x}|^2 = 2V(x)$ e $r(t) \rightarrow +\infty$, allora per $t \rightarrow +\infty$ valgono le seguenti relazioni, per qualche $\gamma > 0$:*

- $r(t) \sim (Kt)^{\frac{2}{2+\alpha}}$, as $t \rightarrow +\infty$, dove $K := \frac{\alpha+2}{2} \sqrt{2\gamma}$;
- $\dot{r}(t) \sim \sqrt{2\gamma}(Kt)^{-\frac{2}{2+\alpha}}$, as $t \rightarrow +\infty$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(s(t)) = \gamma$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla_T V(s(t)) = 0$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(C^\gamma, s(t)) = 0$, $C^\gamma = \{s : V(s) = \gamma, \nabla_T V(s) = 0\}$, dove $\nabla_T V(s)$ è la proiezione di $\nabla V(s)$ su $T_s \mathbb{S}^{d-1}$.

3. – Traiettorie Morse-minimali

Data una coppia ζ^- e ζ^+ di direzioni, ci proponiamo di capire se esista un’orbita parabolica avente proprio quelle due come le sue direzioni asintotiche a $\pm \infty$. In base al Teorema 2.3, una condizione necessaria è che ζ^\pm siano due configurazioni centrali per il potenziale: sceglieremo *due minimi del potenziale ristretto alla sfera*. Per comprendere se esse siano o meno connesse da un’orbita parabolica introduciamo la seguente classe di traiettorie minimali.

DEFINIZIONE 3.1. – *Diciamo che $x \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una traiettoria Morse-minimale a tempo libero di A di tipo parabolico con configurazioni asintotiche ζ^\pm , se*

- $\min_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| > 0$;

- $|x(t)| \rightarrow +\infty$, $x(t)/|x(t)| \rightarrow \xi^\pm$ per $t \rightarrow \pm\infty$;
- per ogni $a < b$, $a' < b'$, e $z \in H^1(a', b')$, si ha

$$z(a') = x(a), z(b') = x(b) \implies \mathcal{A}([a, b]; x) \leq \mathcal{A}([a', b']; z).$$

In qualche caso saremo interessati in minimi locali invece che globali, eventualmente soddisfacenti qualche condizione di carattere topologico.

La metrica di Jacobi

Le traiettorie Morse-minimali minimizzano il problema ad estremi fissi associati al funzionale di Maupertuis' (cfr. [4])

$$\mathcal{M}(x) = \int_0^1 |\dot{x}|^2 \cdot \int_0^1 V(x)$$

e sono *geodetiche minimali per la metrica di Jacobi*:

$$g_{i,j}(x) = V(x)\delta_{i,j} = \frac{V(x/|x|)}{|x|^2} \delta_{i,j}.$$

Si tratta quindi di *geodetiche di una metrica con una singolarità conica*.

4. – Instabilità strutturale delle orbite paraboliche fra minimi del potenziale

Come vedremo, non c'è necessità alcuna che un potenziale V ammetta traiettorie Morse-minimali che connettono *due configurazioni centrali minimali* assegnate, anzi, si tratta di un caso molto improbabile, soprattutto se le due configurazioni sono dei minimi del potenziale ristretto alla sfera *cioè delle configurazioni centrali minimali*.

Per far fronte a questa intrinseca instabilità strutturale abbiamo bisogno di introdurre un parametro ausiliario e cercare le orbite paraboliche come coppie traiettoria-parametro. Per chiarire il ruolo del parametro aggiuntivo, è opportuno lasciare che il potenziale vari in un insieme e descrivere la struttura dell'insieme dei potenziali omogenei che posseggono una traiettoria Morse-minimale.

Per fissare le idee, occupiamoci per un momento del caso bidimensionale. Il caso del potenziale kepleriano anisotropo è stato studiato da Gutzwiller e Devaney ([27, 28, 15]). Ora guardiamo il problema con gli occhi di Devaney, che propone una variante notevole delle coordinate di McGehee ([38]), nelle quali il flusso del problema di Keplero anisotropo si può regolarizzare attaccando allo spazio delle fasi la *varietà delle collisioni*.

Sia

$$z = \sqrt{2U(\mathcal{J})}$$

e, posti $x = re^{i\theta}$, $\dot{x} = r^{-\alpha/2}ze^{i\varphi}$, si introduca un nuovo parametro temporale τ attraverso la relazione

$$\frac{dt}{d\tau} = zr^{1+\alpha/2}.$$

Ora, riscriviamo il sistema come (qui “ ’ ” denota la derivata rispetto a τ)

$$(6) \quad \begin{cases} r' = rz^2 \cos(\varphi - \mathcal{J}) = 2rU(\mathcal{J}) \cos(\varphi - \mathcal{J}) \\ z' = zU'(\mathcal{J}) \sin(\varphi - \mathcal{J}) \\ \mathcal{J}' = z^2 \sin(\varphi - \mathcal{J}) = 2U(\mathcal{J}) \sin(\varphi - \mathcal{J}) \\ \varphi' = U'(\mathcal{J}) \cos(\varphi - \mathcal{J}) + \alpha U(\mathcal{J}) \sin(\varphi - \mathcal{J}). \end{cases}$$

Il sistema (6) contiene un sottosistema indipendente 2×2 :

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{J}' = 2U(\mathcal{J}) \sin(\varphi - \mathcal{J}) \\ \varphi' = U'(\mathcal{J}) \cos(\varphi - \mathcal{J}) + \alpha U(\mathcal{J}) \sin(\varphi - \mathcal{J}). \end{cases}$$

I punti stazionari del sottosistema hanno la forma $(\mathcal{J}^*, \varphi^*)$, dove $U'(\mathcal{J}^*) = 0$ e $\sin(\varphi^* - \mathcal{J}^*) = 0$. Dunque una traiettoria asintotica a due configurazioni centrali minimali corrisponde ad una connessione eteroclina fra due punti di sella. I punti stazionari invece corrispondono a moti omotetici (entranti o uscenti), cioè che lasciano fissa la configurazione normalizzata. Sono sempre dei moti di collisione.

Genericamente, la varietà instabile di una sella finisce direttamente in un pozzo, mentre la varietà stabile esce da una sorgente.

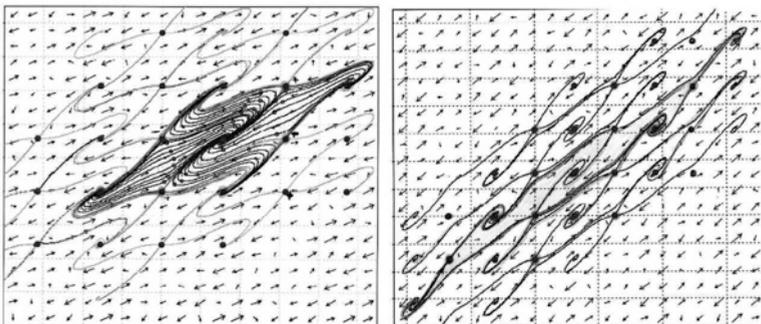


Fig. 1. - Qui $U(\mathcal{J}) = 2 - \cos(2\mathcal{J})$, e $\alpha = 0.5$ (a sinistra) oppure $\alpha = 1$ (a destra). Concentriamo la nostra attenzione sulle selle $(0, \pi)$ e (π, π) : si vede dalla figura che i due sistemi dinamici non sono topologicamente equivalenti. Ne deduciamo l'esistenza, per alcuni $\bar{\alpha} \in (0.5, 1)$, di una connessione eteroclina fra le selle $(0, \pi)$ e (π, π) .

5. – In e out

Una classe di funzionali omogenei

Ora fissiamo una configurazione centrale di entrata ed una di uscita $\xi^+ \neq \xi^-$ in S^{d-1} e $U_{\min} > 0$, e definiamo gli spazi metrici

$$\mathcal{U} = \left\{ U \in C^2(S^{d-1}) : \begin{array}{l} \exists \delta > 0, \mu > 0 \text{ tale che } |s - \xi^\pm| < \delta \\ \implies U(s) - U(\xi^\pm) \geq \mu |s - \xi^\pm|^2 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{V} = \left\{ (U, \alpha) \in C^2(S^{d-1}) \times (0, 2) : U \in \mathcal{U} \right\},$$

quest'ultimo dotato della distanza prodotto. Con un po' di abuso, identificheremo sistematicamente un elemento $(U, \alpha) \in \mathcal{V}$ con l'estensione omogenea della prima componente:

$$\mathcal{V} \ni V = (U, \alpha) \quad \leftrightarrow \quad V \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathbb{R}), \quad V(x) := \frac{U(x/|x|)}{|x|^\alpha}.$$

OSSERVAZIONE 5.1. – (1) *Per tutti i potenziali della classe, ξ^\pm sono configurazioni centrali minimali e non degeneri.*

(2) *È da notare che sono esclusi dalla nostra classe quei potenziali che presentano singolarità sulla sfera, come quello proprio del problema degli N-corpi, o quello ridotti per simmetrie. Ugualmente abbiamo escluso potenziali con punti critici degeneri. Non riteniamo che si tratti di una limitazione troppo grave, giacché la gran parte dei risultati si possono recuperare anche in casi degeneri e/o singolari con opportune passaggi al limite in seguito a procedimenti di approssimazione.*

La proprietà di un potenziale di ammettere traiettorie paraboliche Morse-minimali è legata al suo comportamento relativamente ai problemi di minimo ad estremi fissi.

Per ogni potenziale $V \in \mathcal{V}$, definiamo il valore

$$c(U, \alpha) := \inf \{ \mathcal{A}([a, b]; x) : a < b, x \in H^1(a, b), x(a) = \xi^-, x(b) = \xi^+ \};$$

non è difficile provare che il minimo è assunto, eventualmente su una traiettoria di collisione. Più precisamente, ricordando che un moto omotetico ha configurazione normale costante, vale il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 5.2 ([3]). – *Sia $U \in \mathcal{V}$; si pone l'alternativa:*

(1) $c(U, \alpha) = 4\sqrt{2U_{\min}}/(2 - \alpha)$ è realizzato dalla giustapposizione di due archi di moto omotetico, il primo che connette ξ^- all'origine e il secondo l'origine a ξ^+ ;

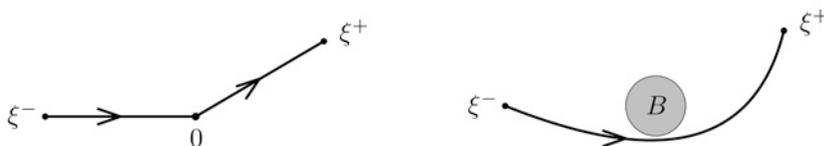


Fig. 2. – A sinistra, $c(U, \alpha)$ è realizzato dall’arco di collisione-eiezione (caso (1) della Proposizione 5.2); a destra $c(U, \alpha)$ è assunto da una traiettoria di non collisione (caso (2) della Proposizione) 5.2. Nel secondo caso, esiste un disco B , centrato nell’origine, tale che ogni minimo di $c(U, \alpha)$ non interseca B .

(2) $c(U, \alpha) < 4\sqrt{2U_{\min}}/(2 - \alpha)$, ed è realizzato da un insieme di traiettorie la cui distanza minima dall’origine è positiva.

Distinguiamo i potenziali con archi minimali di collisione da quelli i cui archi minimali non passano per l’origine:

$$\text{In} := \left\{ V = (U, \alpha) \in \mathcal{V} : c(U, \alpha) = 4\sqrt{2U_{\min}}/(2 - \alpha) \right\},$$

$$\text{Out} := \left\{ V = (U, \alpha) \in \mathcal{V} : c(U, \alpha) < 4\sqrt{2U_{\min}}/(2 - \alpha) \right\}.$$

Si vede facilmente che i due insiemi sono disgiunti e che la loro unione è l’intero \mathcal{V} ; in più, In è chiuso mentre Out è aperto. Ci interessa la frontiera comune della partizione:

$$\Pi := \partial \text{In} \cap \partial \text{Out}.$$

Intuitivamente si tratta di un oggetto di codimensione uno. La proprietà di separazione della frontiera comune è messa in luce dal lemma seguente.

LEMMA 5.3 ([3]). – Esistono un aperto non vuoto $\Sigma \subset \mathcal{U}$ e una funzione continua $\bar{\alpha} : \Sigma \rightarrow (0, 2)$ tali che

$$\Pi = \{(U, \bar{\alpha}(U)) : U \in \Sigma\}.$$

Siamo in grado di esibire criteri espliciti che permettono di stabilire se un potenziale $U \in \mathcal{U}$ appartiene o meno al dominio della funzione $\bar{\alpha}$.

Struttura dell’insieme dei potenziali che ammettono traiettorie paraboliche Morse-minimali

Il nostro risultato principale afferma che il grafico della funzione $\bar{\alpha}$ coincide con l’insieme dei potenziali che ammettono una traiettoria parabolica Morse-minimale.

TEOREMA DI STRUTTURA 5.4 ([3]). – Un potenziale $V \in \mathcal{V}$ ammette una traiettoria parabolica Morse-minimale se e soltanto se $V \in \Pi$.

Ricordiamo che le configurazioni minimali di entrata e di uscita sono state fissate quando abbiamo definito la classe \mathcal{V} .

A causa dell'invarianza per riscaldamenti del problema, le traiettorie paraboliche Morse-minimali compaiono sempre in famiglie ad un parametro e danno luogo ad una sottovarietà isotropica 2-dimensionale il cui bordo corrisponde alle due traiettorie omotetiche.

Esponente critico e proprietà focali

Ricordiamo che l'interfaccia è il grafico di una funzione continua: come detto, esistono un aperto non vuoto $\Sigma \subset \mathcal{U}$ e una funzione continua $\bar{\alpha} : \Sigma \rightarrow (0, 2)$ tali che

$$\Pi = \{(U, \bar{\alpha}(U; \xi^\pm)) : U \in \Sigma\}.$$

L'esponente $\bar{\alpha}$ di apparizione dell'orbita parabolica rappresenta una soglia critica relativa alle proprietà focali della singolarità:

TEOREMA 5.5. – *Sia $U \in \Sigma$ e sia $\bar{\alpha}(U; \xi^\pm)$ come nel Lemma. Allora*

- *Se $\alpha < \bar{\alpha}(U; \xi^\pm)$ allora (U, α) ammette un intorno di (ξ^-, ξ^+) di coppie di estremi che sono connessi da geodetiche minimali passanti per l'origine.*
- *Se invece $\alpha > \bar{\alpha}(U; \xi^\pm)$ allora (U, α) ammette un intorno di (ξ^-, ξ^+) di coppie di estremi connessi da geodetiche minimali che evitano l'origine.*

6. – Ritorno al caso planare: i problemi di Bolza

Vincoli topologici

Sul piano possiamo cercare traiettorie paraboliche che connettono due configurazioni centrali minimali con un dato *indice di rotazione*. Più precisamente, dati

$$0 \leq \mathcal{J}_1 \leq \mathcal{J}_2 < 2\pi,$$

definiamo la classe di potenziali

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2} := \left\{ U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} \text{for every } \mathcal{J} \in \mathbb{R} \text{ and } i = 1, 2 \\ U(\mathcal{J} + 2\pi) = U(\mathcal{J}) \\ U(\mathcal{J}) \geq U(\mathcal{J}_1) = U(\mathcal{J}_2) > 0 \\ U''(\mathcal{J}_i) > 0 \end{array} \right\},$$

e, con il solito abuso notazionale,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{V = (U, \alpha) : U \in \mathcal{U} \text{ and } \alpha \in (0, 2)\} \\ &= \left\{ V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) : V(x) = \frac{U(\mathcal{J})}{r^\alpha}, U \in \mathcal{U} \text{ and } \alpha \in (0, 2) \right\}. \end{aligned}$$

Per imporre il vincolo di girare, per esempio, h volte in senso antiorario attorno all'origine, ci poniamo sul rivestimento universale di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il che corrisponde a connettere \mathcal{S}_1 with $\mathcal{S}_2 + 2h\pi$. Introduciamo gli insiemi

$$\Theta = \Theta_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2} := \{\mathcal{S} \in \mathbb{R} : \mathcal{S} = \mathcal{S}_i + 2n\pi \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z} \text{ e } i \in \{1, 2\}\}$$

e, date $\mathcal{S}^- \neq \mathcal{S}^+$ in $\Theta_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ (o, piú in generale, $\mathcal{S}^- \neq \mathcal{S}^+$ due configurazioni centrali minimali), modifichiamo le nostre definizioni fondamentali come segue:

DEFINIZIONE 6.1. – Diciamo che $x = (r, \mathcal{S}) \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una traiettoria parabolica di non collisione associata a \mathcal{S}^- , \mathcal{S}^+ e V , se risolve (1), (5) e

- $\min_{t \in \mathbb{R}} r(t) > 0$;
- $r(t) \rightarrow +\infty$, $\mathcal{S}(t) \rightarrow \mathcal{S}^\pm$ as $t \rightarrow \pm \infty$;

DEFINIZIONE 6.2. – Diciamo che x è un'orbita parabolica Morse-minimale (tempo libero) se in piú verifica

- per ogni $t_1 < t_2$, $t'_1 < t'_2$, e $z = (\rho, \zeta) \in H^1(t'_1, t'_2)$,

$$\rho(t'_i) = r(t_i), \zeta(t'_i) = \mathcal{S}(t_i) \implies \mathcal{A}([t_1, t_2]; x) \leq \mathcal{A}([t'_1, t'_2]; z).$$

(quest'ultima condizione implica (1), (5)). Un'orbita minimale a tempo libero verifica la condizione di estremalitá solo per $t'_i = t_i$.

Si può dimostrare che una traiettoria parabolica Morse-minimale rimane dentro il settore $(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$ e che la sua funzione angolare è monotona rispetto al tempo (nonostante il momento angolare non si conservi).

Unicitá e caratterizzazione variazionale dell'orbita parabolica con indice di rotazione assegnato

TEOREMA 6.3 ([2]). – Siano $U \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+ \in \Theta$, $\mathcal{S}^- \neq \mathcal{S}^+$ due configurazioni centrali minimali fissate; si ha:

- esiste al piú un $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+, U) \in (0, 2)$ per cui $V = (U, \bar{\alpha})$ ammette una traiettoria parabolica con configurazioni asintotiche $(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+, U)$;
- ogni traiettoria parabolica associata a $\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+$ è U Morse-minimale a tempo libero;
- se $|\mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^-| > \pi$ allora esiste esattamente un valore $\bar{\alpha}$ per cui $V = (U, \alpha)$ ammette una traiettoria parabolica Morse-minimale corrispondente se e solo se $\alpha = \bar{\alpha}$.

Assenza di collisioni per i minimi dei problemi di Bolza

DEFINIZIONE 6.4. – Dato un potenziale V , diciamo che $x = (r, \mathcal{S}) \in H^1(t_1, t_2)$ è minimo per il problema di Bolza in tempo fisso con estremi $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$,

$x_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, se

- $r(t_i) = r_i$ and $\mathcal{A}(t_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2$;
- per ogni $z = (\rho, \zeta) \in H^1(t_1, t_2)$, risulta

$$\rho(t_i) = r_i, \zeta(t_i) = \varphi_i \implies \mathcal{A}([t_1, t_2]; x) \leq \mathcal{A}([t_1, t_2]; z).$$

Se in più $\min_{t \in [t_1, t_2]} r(t) > 0$ diciamo che il minimo è privo di collisioni.

TEOREMA 6.5 ([2]). – Sia $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ una funzione di Morse (tutti i suoi punti critici sono non degeneri); si consideri il potenziale perturbato $V = \frac{U(\mathcal{S})}{r^\alpha} + W$, con $V \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, $\alpha > \alpha'$ e

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{\alpha'} (W(x) + r|\nabla W(x)|) = 0.$$

Data comunque una coppia di punti x_1 e x_2 nel settore $(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$, se $\alpha > \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$ allora i minimi di tutti i problemi di Bolza a tempo fisso con estremi x_1, x_2 a valori entro il settore $(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$ sono privi di collisioni.

La restrizione che il cammino minimale assuma valori dentro al settore $(\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$ si può sollevare se, per esempio, $W \equiv 0$.

OSSERVAZIONE 6.6. – • Se invece $\alpha \leq \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$, vi sono sempre dei problemi di Bolza che hanno minimi di collisione. È sufficiente prendere $x_1 = \mathcal{S}^-$ and $x_2 = \mathcal{S}^+$ e come tempo T il tempo naturale del minimo a tempo libero.

- Se $\alpha = \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+)$, abbiamo la seguente alternativa:
 1. la traiettoria minimale è asintotica nella collisione a quella omotetica di collisione-eiezione,
 2. oppure è di non collisione.
- Questo enunciato generalizza la caratterizzazione variazionale di Marchal degli archi kepleriani diretti e inversi (Teorema di Lambert. cfr [36]).

Altre osservazioni

Come sottolineano Luz and Maderna in [14], la proprietà che tutti i problemi di Bolza siano privi di collisione implica la non esistenza di traiettorie Morse-minimali nell'usuale problema degli N -corpi con $\alpha = 1$ in assenza di vincoli topologici.

Invece, archi parabolici minimali (cioè definiti solo sulla semiretta) esistono per ogni configurazione iniziale, come dimostrato recentemente da Maderna e Venturelli in [34].

Assenza di collisioni per le traiettorie minimali

Il problema dell'esclusione delle collisioni per i minimi dell'azione ha ormai una lunga storia, che parte dalle elaborazioni degli ultimi anni '80, (Ambrosetti, Coti Zelati, Marino, Degiovanni, Giannoni, Serra, Bessi, Terracini, Tanaka), per arrivare alle ricerche degli ultimi dieci anni, motivate dalla ricerca di nuove soluzioni periodiche simmetriche per il problema degli n -corpi (Chenciner, Montgomery, Chen, Venturelli, Ferrario, Barutello, Terracini, Shibayama).

Ci sono due aspetti importanti:

- la formula di monotonia che conduce all'isolatezza degli istanti di collisione ed alle stime asintotiche alle collisioni;
- le variazioni in media, introdotte da C. Marchal ([36])

Questi aspetti sono stati ripresi e sviluppati in [23, 1], dove è stato sviluppato ed esteso il metodo della variazione in media di Marchal.

TEOREMA 6.7 ([1]). – *L'insieme degli istanti di collisione delle traiettorie localmente minimali e dei loro limiti uniformi è localmente finito e valgono le classiche stime asintotiche. Inoltre, se vale la Rotating Circle Property le traiettorie localmente minimali sono prive di collisioni.*

7. – Orbite periodiche

Orbite chiuse con numero di rotazione assegnato

Come abbiamo detto, diversi casi notevoli hanno uno spazio delle configurazioni non semplicemente connesso. In questo caso, è interessante minimizzare in una classe di lacci con un particolare tipo omotopico (Gordon, Montgomery, Venturelli, Terracini-Venturelli, Chen, Fusco-Gronchi-Negrini).

TEOREMA 7.1 (W. Gordon 1977 [26]). – *Le ellissi kepleriane minimizzano l'azione fra tutti i cammini T -periodici che hanno indice di rotazione non banale rispetto all'origine.*

Quando si minimizza con un vincolo topologico, la tecnica della variazione media non funziona e si devono inventare altri argomenti per evitare le collisioni.

Generalizzazione del Teorema di W. Gordon

La soglia $\bar{\alpha}$ che segna la comparsa dell'orbita parabolica con indice di rotazione prefissato permette di determinare la soglia di esistenza delle traiettorie periodiche minimali di non collisione con indice assegnato.

Il risultato seguente può essere considerato una generalizzazione della proprietà di minimizzazione delle ellissi kepleriane di W. Gordon:

TEOREMA 7.2 ([2]). – Sia $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}$ una funzione di Morse che ha solo minimi globali, e siano $V = \frac{U(\mathcal{S})}{r^\alpha}$ i potenziali α -omogenei associati. Dato un intero $k \neq 0$ e un periodo $T > 0$, se

$$\alpha > \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^*, \mathcal{S}^* + 2k\pi), \quad \text{per ogni configurazione minimale } \mathcal{S}^* \text{ of } U,$$

allora esiste un'orbita T -periodica minimale fra quelle con indice di rotazione k , priva di collisioni. Inoltre, se

$$\alpha = \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^*, \mathcal{S}^* + 2k\pi), \quad \text{per ogni minimo } \mathcal{S}^* \text{ of } U,$$

allora o esiste un'orbita T -periodica minimale fra quelle con indice di rotazione k , priva di collisioni, oppure esiste una successione di esponenti $\alpha_n \searrow \alpha$ e una successione di orbite T -periodiche minimali, senza collisioni x_n per $V_n = (U, \alpha_n)$, che converge alla traiettoria parabolica sui compatti di \mathbb{R} .

La dimostrazione utilizza una tecnica di minimizzazione vincolata già utilizzata in un lavoro [48] con A. Venturelli, dove si è stabilita per la prima volta la relazione fra la non esistenza di orbite paraboliche e l'assenza di collisioni per le traiettorie che minimizzano l'azione.

Soluzioni regolari dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Come osservato, nel caso planare possiamo sempre scegliere configurazioni di ingresso e di uscita uguali a meno di 2π . Si supponga $\alpha = \bar{\alpha}(U, \mathcal{S}^*, \mathcal{S}^* + 2\pi)$. Abbiamo già osservato che ad un'orbita parabolica è associata una varietà lagrangiana che è laminata dalla famiglia delle orbite paraboliche. Tale struttura determina una soluzione regolare dell'equazione stazionaria di Hamilton-Jacobi associata (1), di classe \mathcal{C}^1 sul rivestimento doppio di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

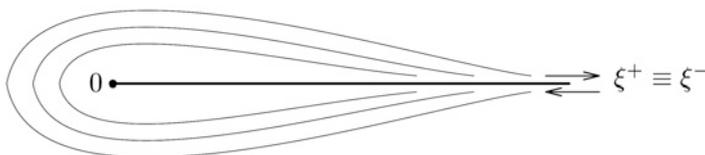


Fig. 3. – La famiglia a un parametro delle traiettorie paraboliche Morse-minimali aventi la stessa configurazione asintotica a $+\infty$ e $-\infty$ e indice di rotazione uno.

8. – Prova del Teorema di struttura

Da Bolza a Morse-minimale

Seguiremo la strategia introdotta in [3]. Per costruire traiettorie Morse-minimali, cominciamo col considerare il problema su intervalli limitati (i cosiddetti problemi di Bolza), per poi passare al limite. In questo procedimento, incontriamo due difficoltà principali: le successioni così ottenute possono convergere verso una collisione, oppure tendere all'infinito. In entrambi i casi il passaggio al limite fallisce. Questa osservazione conduce naturalmente ad introdurre di vincoli e, conseguentemente, allo studio dei seguenti problemi di minimizzazione vincolata:

$$m = m(\varepsilon, x_1, x_2) := \inf_{x \in \Gamma} \mathcal{A}(x) \quad \text{dove } \Gamma := \bigcup_{T>0} \Gamma_T, \quad \text{e}$$

$$\Gamma_T := \left\{ x \in H^1(-T, T) : x(-T) = x_1, x(T) = x_2, \min_{t \in [-T, T]} |x(t)| = \varepsilon \right\},$$

dove $\varepsilon > 0$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \setminus B_{2\varepsilon}(0)$ sono fissati.

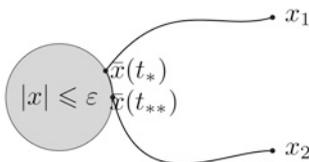
Proprietà di base dei minimi vincolati

- Se $\bar{x} = \bar{r}\bar{s} \in \Gamma_{\bar{r}\varepsilon} x_1 x_2$ è un minimo vincolato e $\bar{r}(t) > \varepsilon$ for $t \in (a, b)$, allora

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \nabla V(\bar{x}(t)) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} |\dot{\bar{x}}(t)| = V(\bar{x}(t)), \quad \text{per ogni } t \in (a, b).$$

- Se \bar{x} realizza il minimo m , allora esistono $t_* \leq t_{**}$ tali che

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) = \varepsilon &\Leftrightarrow t \in [t_*, t_{**}]; \\ t \in (-T, t_*) &\Rightarrow \dot{\bar{r}}(t) < 0; \\ t \in (t_{**}, T) &\Rightarrow \dot{\bar{r}}(t) > 0; \end{aligned}$$



$$\text{se } t_* < t_{**} \text{ e } t \in (t_*, t_{**}) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{x}}(t) = \nabla_T V(\bar{x}(t)) - \frac{1}{\varepsilon^2} |\dot{\bar{x}}(t)|^2 \bar{x}(t), \\ \frac{1}{2} |\dot{\bar{x}}(t)| = V(\bar{x}(t)). \end{cases}$$

Interazione con il vincolo

Abbiamo un primo risultato di regolarità dei minimi vincolati:

PROPOSIZIONE 8.1. – *Se \bar{x} è un arco minimale allora può perdere di regolarità solamente in t_* e t_{**} .*

Ora esaminiamo invece l'interazione con il vincolo. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 8.2. – *Se \bar{x} realizza m , allora si verifica una delle seguenti alternative:*

- (a) $t_* < t_{**}$ e $\bar{x} \in C^1(-\bar{T}, \bar{T})$;
- (b) $t_* = t_{**}$ e $\bar{x} \in C^1(-\bar{T}, \bar{T})$;
- (c) $t_* = t_{**}$ e $\dot{\bar{x}}(t_*^-) \neq \dot{\bar{x}}(t_*^+)$; in tal caso \bar{x} ha una riflessione radiale, cioè

$$\dot{r}(t_*^-) = -\dot{r}(t_*^+) \neq 0 \quad e \quad \dot{s}(t_*^-) = \dot{s}(t_*^+).$$

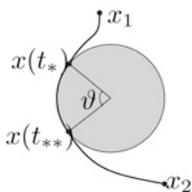
Possiamo utilizzare questa osservazione per classificare gli archi Bolza-minimali rispetto alle possibili variazioni delle quantità x e \dot{x} sul vincolo:

DEFINIZIONE 8.3. – *Dato un arco Bolza-minimale vincolato, $x = rs$ definiamo:*

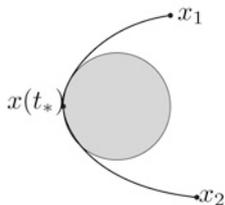
$$\Delta_{\text{pos}}(x) := |s(t_{**}) - s(t_*)| = \frac{|x(t_{**}) - x(t_*)|}{\varepsilon},$$

$$\Delta_{\text{vel}}(x) := \varepsilon^{\alpha/2} [\dot{r}(t_{**}^+) - \dot{r}(t_*^-)] = \frac{\dot{x}(t_{**}^+) \cdot x(t_{**}) - \dot{x}(t_*^-) \cdot x(t_*)}{\varepsilon^{-\alpha/2} \cdot \varepsilon},$$

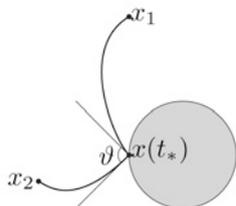
rispettivamente come il salto di posizione (normalizzato) e il salto di angolo di x .



- (a) $t_* < t_{**}$, $\bar{x} \in C^1$, $\Delta_{\text{pos}} > 0$,
 $\Delta_{\text{vel}} = 0$,
 x ha un salto di posizione



- (b) $t_* = t_{**}$, $\bar{x} \in C^1$, $\Delta_{\text{pos}} = 0$,
 $\Delta_{\text{vel}} = 0$,
 x è parabolica



- (c) $t_* = t_{**}$, $\dot{\bar{x}}(t_*^-) \neq \dot{\bar{x}}(t_*^+)$,
 $\Delta_{\text{pos}} = 0$, $\Delta_{\text{vel}} > 0$,
 x ha un salto di velocità

Invarianza di scala

Poiché $|x(t^*)| = |x(t^{**})| = \varepsilon$, e, per la conservazione dell'energia, $|\dot{x}(t)| = \varepsilon^{-\alpha/2} \sqrt{2V(s(t))}$, per ogni $t \in [t^*, t^{**}]$, possiamo riscrivere i salti di posizione e di velocità come

$$\Delta_{\text{pos}}(x) = \left| \left[\frac{x}{|x|} \right]_{t_*}^{t_{**}} \right| \quad \text{e} \quad \Delta_{\text{vel}}(x) \sqrt{2V(s(t_*))} = \left| \left[\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \right]_{t_*}^{t_*^+} \right|.$$

In questo modo Δ_{pos} e Δ_{vel} sono degli invarianti per trasformazioni omotetiche. In effetti, si dimostra facilmente che, se x realizza $m = m(x_1, x_2, \varepsilon)$, allora, per ogni $R > 0$,

$$z(t) := Rx(R^{-(2+\alpha)/2}t) \quad \text{realizza} \quad m(Rx_1, Rx_2, R\varepsilon),$$

e

$$\Delta_{\text{pos}}(z) = \Delta_{\text{pos}}(x) \quad \text{e} \quad \Delta_{\text{vel}}(z) = \Delta_{\text{vel}}(x).$$

Esistenza di traiettorie Morse-minimali vincolate

DEFINIZIONE 8.4. – Diciamo che $x \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una traiettoria Morse-minimale ε -vincolata se

- $\min_t |x(t)| = \varepsilon$;
- $|x(t)| \rightarrow +\infty$ e $\frac{x(t)}{|x(t)|} \rightarrow \zeta^\pm$, per $t \rightarrow \pm\infty$;
- per ogni $a < b$ e $T > 0$, e per ogni $z \in H^1(-T, T)$, con $\min_{t \in [-T, T]} |z(t)| = \min_{t \in [a, b]} |x(t)|$, si ha

$$z(-T) = x(a), \quad z(T) = x(b) \quad \implies \quad \mathcal{A}([a, b]; x) \leq \mathcal{A}([-T, T]; z).$$

PROPOSIZIONE 8.5. – $\mathcal{M} = \{\text{traiettorie Morse-minimali } \varepsilon\text{-vincolate}\} \neq \emptyset$.

Ragioniamo per approssimazione, risolvendo i problemi di Bolza con $x_1 = R\xi^-$ e $x_2 = R\xi^+$, per poi fare tendere $R \rightarrow +\infty$;

Classificazione dei salti delle traiettorie Morse-minimali ε -vincolate

Ovviamente anche le traiettorie Morse-minimali ε -vincolate si possono classificare secondo il loro comportamento rispetto al vincolo.

PROPOSIZIONE 8.6. – Sia $x = rs \in \mathcal{M}$; allora esistono $t_* \leq t_{**}$ tali che:

- $r(t) = \varepsilon$ se e soltanto se $t \in [t_*, t_{**}]$, $\dot{r}(t) < 0$ (risp. > 0) se e solo se $t < t_*$ (risp. $t > t_{**}$);
- $\ddot{x}(t) = \nabla V(x(t))$, per ogni $t \notin [t_*, t_{**}]$;

- i salti $\Delta_{\text{pos}}(x)$ e $\Delta_{\text{vel}}(x)$ sono non negativi e almeno uno è nullo;
- $\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = V(x(t))$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In generale, per un dato ε ed un potenziale V , non ci aspettiamo unicità della traiettoria Morse-minimale. Tuttavia, si può dimostrare che, rispetto alla classificazione dei loro salti, esse hanno tutte lo stesso tipo.

Le traiettorie Morse-minimali vincolate hanno tutte lo stesso tipo

TEOREMA 8.7. – Siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{V}_{\varepsilon^-, \varepsilon^+}$ fissati. Si verifica una ed una sola delle seguenti alternative:

- (i) per ogni $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{pos}}(x) > 0$ (and $\Delta_{\text{vel}}(x) = 0$);
- (ii) per ogni $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{pos}}(x) = \Delta_{\text{vel}}(x) = 0$ (**le traiettorie sono paraboliche**);
- (iii) per ogni $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{vel}}(x) > 0$ (and $\Delta_{\text{pos}}(x) = 0$).

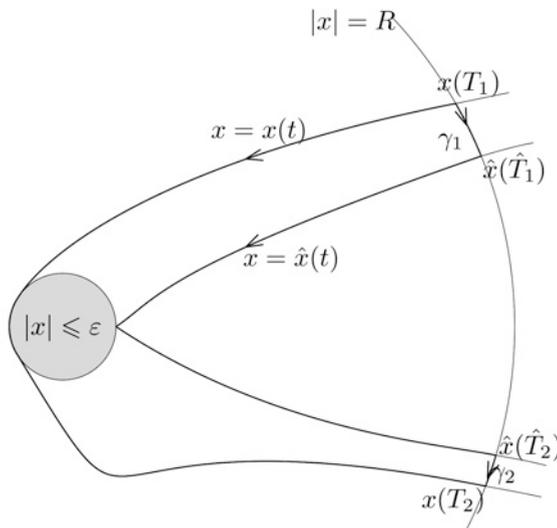
IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo, per assurdo, che queste due traiettorie Morse-minimali vincolate $x, \hat{x} \in \mathcal{M}$ e $x \neq \hat{x}$ non verifichino la stessa alternativa e, per esempio, che

$$\Delta_{\text{pos}}(\hat{x}) = \Delta_{\text{vel}}(x) = 0.$$

Fissato $R \gg \varepsilon$, definiamo $T_1, T_2, \hat{T}_1, \hat{T}_2$ tali che:

$$[T_1, T_2] = \{t : |x(t)| \leq R\}, \quad [\hat{T}_1, \hat{T}_2] = \{t : |\hat{x}(t)| \leq R\}.$$

Per confrontare le due azioni $\mathcal{A}([T_1, T_2]; x)$ e $\mathcal{A}([\hat{T}_1, \hat{T}_2]; \hat{x})$, giustapponiamo l'arco $\hat{x}(t)$ con i due archi di cerchio come in figura:



Di modo che

$$\underbrace{\mathcal{A}([T_1, T_2]; x)}_{\mathcal{A}_{\text{vel}}(x)=0} \leq \underbrace{\mathcal{A}([\hat{T}_1, \hat{T}_2]; \hat{x})}_{\mathcal{A}_{\text{pos}}(\hat{x})} + \underbrace{\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2}_{\text{contributo degli archetti circolari}}.$$

Sia $\alpha_* := \frac{2-\alpha}{2} > 0$; si verificano le seguenti disequaglianze:

- $\mathcal{A}_{\text{vel}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}([T_1, T_2]; x) \geq \frac{2}{\alpha_*} \sqrt{2V_{\min}} \left[R^{\alpha_*} + \frac{\alpha_*}{2} \varepsilon^{\alpha_*} \mathcal{A}_{\text{pos}}(x) - \varepsilon^{2\alpha_*} R^{-\alpha_*} \right],$
- $\mathcal{A}_{\text{pos}}(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}([\hat{T}_1, \hat{T}_2]; \hat{x}) \leq \frac{1}{\alpha_*} \left[R^{\alpha_*} \left(\sqrt{2V(s(\hat{T}_2))} + \sqrt{2V(s(\hat{T}_1))} \right) - \mathcal{A}_{\text{vel}}(\hat{x}) \varepsilon^{\alpha_*} \right],$
- $\mathcal{B}_1 \leq CR^{\alpha_*} |s(T_1) - \hat{s}(\hat{T}_1)| \leq CR^{\alpha_*} \left[|s(T_1) - \zeta^-| + |\hat{s}(\hat{T}_1) - \zeta^-| \right],$ e una stima analoga vale per \mathcal{B}_2 .

Infine otteniamo

$$C[\mathcal{A}_{\text{pos}}(x) + \mathcal{A}_{\text{vel}}(\hat{x})] \varepsilon^{\alpha_*} \leq R^{\alpha_*} \left[\sqrt{V(\hat{s}(\hat{T}_2))} - \sqrt{V_{\min}} + \sqrt{V(\hat{s}(\hat{T}_1))} - \sqrt{V_{\min}} \right] - \varepsilon^{2\alpha_*} R^{-\alpha_*} + R^{\alpha_*} \left[|s(T_1) - \zeta^-| + |\hat{s}(\hat{T}_1) - \zeta^-| + |s(T_2) - \zeta^+| + |\hat{s}(\hat{T}_2) - \zeta^+| \right].$$

Affermiamo che, scegliendo R sufficientemente grande, il secondo membro può essere reso arbitrariamente piccolo. Infatti

$$\sqrt{V(\hat{s}(t))} - \sqrt{V_{\min}} \leq C|\hat{s}(t) - \zeta^\pm|^2.$$

e, per ogni $x = rs \in \mathcal{M}$, abbiamo la stima asintotica

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [r(t)]^{\alpha_*} |s(t) - \zeta^-| = \lim_{t \rightarrow +\infty} [r(t)]^{\alpha_*} |s(t) - \zeta^+| = 0.$$

Poiché il primo membro è non negativo ed indipendente da R , otteniamo che deve necessariamente annullarsi. In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\mathcal{A}_{\text{pos}}(\hat{x}) = \mathcal{A}_{\text{vel}}(x) = 0 \implies \mathcal{A}_{\text{pos}}(x) = \mathcal{A}_{\text{vel}}(\hat{x}) = 0,$$

e quindi entrambe le traiettorie x e \hat{x} devono soddisfare l'alternativa (ii), in contraddizione con la nostra ipotesi dell'assurdo. \square

OSSERVAZIONE 8.8. – *Fissato un potenziale $V \in \mathcal{V}_{\zeta^-, \zeta^+}$, la sua omogeneità induce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle traiettorie Morse-minimali con vincolo ε_1 e quelle con vincolo ε_2 , per ogni $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Dunque il tipo di salto delle traiettorie Morse-minimali vincolate dipende solamente da V . È quindi*

lecito scrivere

- “ $\mathcal{A}_{\text{pos}}(V) > 0$ ” se è verificata l’alternativa (i) e
- “ $\mathcal{A}_{\text{vel}}(V) > 0$ ” se è verificata la (iii).

Se invece si verifica (ii), abbiamo che il potenziale V possiede una traiettoria parabolica Morse-minimale.

REFERENCES

- [1] V. BARUTELLO - D. L. FERRARIO - S. TERRACINI, *On the singularities of generalized solutions to n -body-type problems*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008).
- [2] V. BARUTELLO - S. TERRACINI - G. VERZINI, *Entire Minimal Parabolic Trajectories: the planar anisotropic Kepler problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., to appear (2011).
- [3] V. BARUTELLO - S. TERRACINI - G. VERZINI, *Entire Parabolic Trajectories as Minimal Phase Transitions*, preprint (2011).
- [4] V. BENCI, *Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **1** (1984), 401-412.
- [5] J. CHAZY, *Sur certaines trajectoires du problème des n corps*, Bulletin Astronomique, **35** (1918), 321-389.
- [6] J. CHAZY, *Sur l’allure du mouvement dans le problème de trois corps quand le temps croît indéfiniment*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **39** (1922), 29-130.
- [7] K.-C. CHEN, *Action-minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal., **158** (2001), 293-318.
- [8] K.-C. CHEN, *Existence and minimizing properties of retrograde orbits to the three-body problem with various choices of masses*, Ann. of Math. (2), **167** (2008), 325-348.
- [9] K.-C. CHEN, *Variational constructions for some satellite orbits in periodic gravitational force fields*, Amer. J. Math., **132** (2010), 681-709.
- [10] A. CHENCINER, *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des n corps*, Regul. Chaotic Dyn., **3** (1998), 93-106.
- [11] A. CHENCINER - R. MONTGOMERY, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2), **152** (2000).
- [12] L. CHIERCHIA - G. PINZARI, *The planetary N -body problem: Symplectic foliation, reductions and invariant tori* Invent. Math. (2011).
- [13] F. H. CLARKE - R. B. VINTER, *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 73-98.
- [14] A. DA LUZ - E. MADERNA, *On the free time minimizers of the newtonian n -body problem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear (2011).
- [15] R. L. DEVANEY, *Collision orbits in the anisotropic Kepler problem*, Invent. Math., **45** (1978), 221-251.
- [16] R. L. DEVANEY, *Singularities in classical mechanical systems*, in Ergodic theory and dynamical systems, I (College Park, Md., 1979-80), vol. 10 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Mass., 1981, 211-333.
- [17] A. FATHI, *Weak Kam Theorem in Lagrangian Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2007.
- [18] A. FATHI - E. MADERNA, *Weak KAM theorem on non compact manifolds*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **14** (2007), 1-27.

- [19] A. FATHI - A. SICONOLFI, *Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Invent. Math., **155** (2004), 363-388.
- [20] D. L. FERRARIO, *Symmetry groups and non-planar collisionless action-minimizing solutions of the three-body problem in three-dimensional space*, Arch. Ration. Mech. Anal., **179** (2006), 389-412.
- [21] D. L. FERRARIO, *Transitive decomposition of symmetry groups for the n -body problem*, Adv. Math., **213** (2007), 763-784.
- [22] D. L. FERRARIO - A. PORTALURI, *On the dihedral n -body problem*, Nonlinearity, **21** (2008), 1307-1321.
- [23] D. L. FERRARIO - S. TERRACINI, *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem*, Invent. Math., **155** (2004), 305-362.
- [24] G. FUSCO - G. F. GRONCHI - P. NEGRINI, *Platonic polyhedra, topological constraints and periodic solutions of the classical N -body problem*, Invent. Math., **185** (2011), 283-332.
- [25] W. B. GORDON, *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc., **204** (1975), 113-135.
- [26] W. B. GORDON, *A minimizing property of Keplerian orbits*, Amer. J. Math., **99** (1977), 961-971.
- [27] M. C. GUTZWILLER, *The anisotropic Kepler problem in two dimensions*, J. Mathematical Phys., **14** (1973), 139-152.
- [28] M. C. GUTZWILLER, *Bernoulli sequences and trajectories in the anisotropic Kepler problem*, J. Mathematical Phys., **18** (1977), 806-823.
- [29] J. K. HALE - H. KOÇAK, *Dynamics and bifurcations*, vol. 3 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [30] N. D. HULKOWER - D. G. SAARI, *On the manifolds of total collapse orbits and of completely parabolic orbits for the n -body problem*, J. Differential Equations, **41** (1981), 27-43.
- [31] M. KLEIN - A. KNAUF, *Classical planar scattering by coulombic potentials*, Lecture Notes in Physics Monographs, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [32] A. KNAUF, *The n -centre problem of celestial mechanics for large energies*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **4** (2002), 1-114.
- [33] T. LEVI-CIVITA, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Math., **42** (1920), 99-144.
- [34] E. MADERNA - A. VENTURELLI, *Globally minimizing parabolic motions in the Newtonian N -body problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., **194** (2009), 283-313.
- [35] E. MADERNA, *On weak kam theory for N -body problems*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., to appear (2011).
- [36] C. MARCHAL, *How the method of minimization of action avoids singularities*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **83** (2002), 325-353.
- [37] C. MARCHAL - D. G. SAARI, *On the final evolution of the n -body problem*, J. Differential Equations, **20** (1976), 150-186.
- [38] R. MCGEHEE, *Triple collision in the collinear three-body problem*, Invent. Math., **27** (1974), 191-227.
- [39] R. MOECKEL, *Chaotic dynamics near triple collision*, Arch. Rational Mech. Anal., **107** (1989), 37-69.
- [40] C. MOORE, *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett., **70**, no. 24 (1993), 3675-3679.
- [41] J. MOSER, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm. Pure. Appl. Math., **23** (1970), 609-636.
- [42] H. POLLARD, *The behavior of gravitational systems*, J. Math. Mech., **17** (1967/1968), 601-611.

- [43] H. POLLARD, *Celestial mechanics*, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.
- [44] D. G. SAARI, *Expanding gravitational systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **156** (1971), 219-240.
- [45] D. G. SAARI, *The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n -body problem*, J. Differential Equations, **55** (1984), 300-329.
- [46] M. SHIBAYAMA, *Multiple symmetric periodic solutions to the $2n$ -body problem with equal masses*, Nonlinearity, **19** (2006), 2441-2453.
- [47] M. SHIBAYAMA, *Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n -body problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., **199** (2011), 821-841.
- [48] S. TERRACINI - A. VENTURELLI, *Symmetric trajectories for the $2N$ -body problem with equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal., **184** (2007), 465-493.
- [49] A. VENTURELLI, *Une caractérisation variationnelle des solutions de Lagrange du problème plan des trois corps*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, **332**, Série I (2001), 641-644.
- [50] E. T. WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies: With an introduction to the problem of three bodies*, 4th ed, Cambridge University Press (New York, 1959), xiv+456.
- [51] J. WALDVOGEL, *Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **102** (2008), 149-162.

Università di Milano Bicocca, Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Piazza Ateneo Nuovo 1, 20126 Milano, Italy
E-mail: susanna.terracini@unimib.it