Bollettino
Unione Matematica Italiana

Stefano Meda

# Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9*, Vol. **5** (2012), n.3, p. 631–654.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2012_9_5_3_631_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma*
*bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*
*SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

Bollettino U. M. I.
(9) **IV** (2012), 631-654

# Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume(*)

STEFANO MEDA

*Dedicato alla memoria di Guido*

Questo articolo contiene una versione leggermente estesa della conferenza da me tenuta a Bologna in occasione del XIX Convegno UMI. Desidero ringraziare il Comitato scientifico per l'invito, che mi offre l'opportunità di illustrare una linea di ricerca che ho perseguito in anni recenti con Andrea Carbonaro (Birmingham), Giancarlo Mauceri (Genova), Peter Sjögren (Göteborg) e Maria Vallarino (Politecnico di Torino).

Tale linea di ricerca si propone di elaborare una teoria di integrali singolari nel contesto di alcuni spazi metrici di misura privi della proprietà di raddoppio delle sfere. Esempi significativi sono le varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume (ad esempio il piano iperbolico) e lo spazio euclideo dotato della misura gaussiana.

I risultati ottenuti sono in parte già pubblicati [CMM1, CMM2, MMV1, MMV2, MMV3, MMV4, MV], in parte in fase di rifinitura. La conferenza di oggi non toccherà gli aspetti della teoria concernenti l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck (vd. [MM, MMS1, MMS2, GMMST1, GMMST2]), alla cui elaborazione ha dato un significativo contributo anche P. Sjögren, e si concentrerà sugli sviluppi inerenti le varietà, elaborati in collaborazione con Carbonaro, Mauceri e Vallarino. L'esposizione è articolata come segue:

Introduzione

I Operatore di Laplace–Beltrami
II Diffusione del calore
III Integrali singolari e spazi di Hardy
    IIIa su $\mathbb{R}$
    IIIb su varietà.

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 16 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

## 1. – Introduzione

### 1.1 – *Le trasformate di Riesz*

Vi sono numerosi problemi la cui formulazione e/o soluzione coinvolge operatori appartenenti a una classe nota come classe degli *operatori integrali singolari*. In questa introduzione mi limiterò all'importante esempio classico delle trasformate di Riesz in $\mathbb{R}^n$, prototipi di integrali singolari che intervengono in numerosi problemi, tra i quali quello della regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche. Supponiamo, ad esempio, che $u$ sia una soluzione distribuzionale dell'equazione di Poisson

$$-\Delta u = f, \tag{1.1}$$

dove $f$ è un dato in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto. Evidentemente $\Delta u$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^n)$; è naturale chiedersi se tutte le derivate seconde (nel senso delle distribuzioni) di $u$ appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Formalmente

$$u = (-\Delta)^{-1} f,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \partial^2_{ij} u &= \partial^2_{ij}(-\Delta)^{-1} f \\ &= \partial_i(-\Delta)^{-1/2}\partial_j(-\Delta)^{-1/2} f. \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che le derivate parziali commutano con le potenze di $(-\Delta)$, perché la trasformata di Fourier diagonalizza simultaneamente tutti gli operatori che commutano con le traslazioni. Posto

$$\mathscr{R}_i := \partial_i(-\Delta)^{-1/2} \qquad i = 1, \dots, n,$$

possiamo scrivere

$$\partial^2_{ij} u = \mathscr{R}_i \mathscr{R}_j f.$$

Conviene anche introdurre la trasformata di Riesz vettoriale

$$\mathscr{R} = (\mathscr{R}_1, \dots, \mathscr{R}_n).$$

TEOREMA 1.1. – *Valgono le affermazioni seguenti:*

(i) *per ogni $p$ in $(1, \infty)$ la trasformata di Riesz $\mathscr{R}_j$ è limitata su $L^p(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$;*

(ii) *la trasformata di Riesz $\mathscr{R}_j$ è illimitata da $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) *$\mathscr{R}_j$ è di tipo debole $(1,1)$, cioè esiste una costante $C$ tale che*

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathscr{R}_j f(x)| > \alpha\}\big| \leq C\, \frac{\|f\|_1}{\alpha} \qquad \forall \alpha > 0\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Questo risultato classico (vd., ad es., [St2]) implica che se $1<p<\infty$ e $u$ risolve (1.1), allora tutte le derivate seconde di $u$ appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Il risultato è *falso* se $p=1$.

Come noto la condizione (iii) del teorema precedente è una stima sostitutiva della stima $L^1$-$L^1$, utile per l'interpolazione.

La definizione di trasformata di Riesz sopra illustrata non giustifica la terminologia "integrale singolare" che nella letteratura si associa comunemente a $\mathscr{R}$. Tuttavia, utilizzando la trasformata di Fourier è possibile dimostrare che $\mathscr{R}$ è l'operatore di convoluzione con nucleo la distribuzione valor principale associata alla funzione $y/|y|^{n+1}$. In altre parole, per ogni $f$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\mathscr{R}f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

dove $c_n$ è una costante che dipende unicamente dalla dimensione $n$. Evidentemente $y\mapsto y/|y|^{n+1}$ è non integrabile sia in un intorno di 0, sia all'infinito, fatto che giustifica la terminologia adottata. Nel caso $n=1$ la trasformata di Riesz assume la forma particolarmente semplice

$$\mathscr{R}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y;$$

$\mathscr{R}$ viene allora comunemente denominata *trasformata di Hilbert* e denotata con il simbolo $\mathscr{H}$. Essa è l'archetipo degli integrali singolari e interviene, tra gli altri, nel problema della convergenza in norma delle serie di Fourier in dimensione uno (vd. [So, Cap. I]). Un celebre risultato asserisce infatti che la convergenza in norma $L^p(\mathbb{T})$ delle serie di Fourier di funzioni in $L^p(\mathbb{T})$ equivale alla limitatezza in $L^p(\mathbb{R}^n)$ della trasformata di Hilbert.

Un calcolo esplicito mostra che

$$\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}.$$

Osserviamo che

$$\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \asymp \frac{1}{x}$$

per $|x|\to\infty$ e quindi $\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ non è integrabile all'infinito. La funzione presenta anche singolarità logaritmiche nei punti $\pm 1$, che ovviamente non pregiudicano l'integrabilità locale della funzione.

## 1.2 – *L'approccio classico alla limitatezza di integrali singolari*

La dimostrazione della limitatezza di $\mathscr{R}_j$ su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p$ in $(1,2)$ (vd. Teorema 1.1 (i)) segue lo schema seguente:

• si dimostra che $\mathscr{R}_j$ è limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$, utilizzando il Teorema di Plancherel e il fatto che la trasformata di Fourier del nucleo di $\mathscr{R}_j$ è limitata;

• si dimostra che $\mathscr{R}$ soddisfa la stima debole $(1,1)$ che appare nella parte (iii) del Teorema 1.1;

• si interpola tra le due stime precedenti utilizzando il Teorema di Marcinkiewicz [BL, Theorem 1.3.1].

La dimostrazione della stima debole $(1,1)$ è piuttosto tecnica (vd., ad es., [St2]) e fa uso di due ingredienti fondamentali:

1. la *proprietà di raddoppio* delle sfere

$$\sup_B \frac{\mu(2B)}{\mu(B)} < \infty, \tag{1.2}$$

dove l'estremo superiore è fatto rispetto a tutte le sfere di $\mathbb{R}^n$ e $2B$ denota la sfera concentrica a $B$ di raggio doppio;

2. la *decomposizione di Calderón–Zygmund* di funzioni integrabili.

Notiamo che in $\mathbb{R}^n$ il quoziente $\mu(2B)/\mu(B)$ è una costante dimensionale che non dipende da $B$. Avremo modo di considerare la proprietà di raddoppio in ambiti non euclidei privi di dilatazioni, in cui il quoziente precedente dipende dal centro e dal raggio di $B$.

Desideriamo porre l'accento sul fatto che le varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume, ambito al quale siamo particolarmente interessati, non posseggono la proprietà di raddoppio, per esse non esiste analogo della decomposizione di Calderón-Zygmund e la stima debole $(1,1)$ per gli operatori di nostro interesse è falsa, oppure impossibile da ottenere con le tecniche attualmente a disposizione. È perciò auspicabile sviluppare un approccio alternativo a quello descritto per ottenere la limitatezza $L^p$ degli integrali singolari.

## 1.3 – *Collocazione storica*

Desidero concludere l'introduzione con una breve descrizione dello sviluppo degli integrali singolari, con lo scopo di collocare in prospettiva storica le nostre ricerche. In estrema sintesi, si possono osservare le *quattro fasi* seguenti:

1. *fase pioneristica*; 1920', trasformata di Hilbert;

2. *fase classica*; 1950'-1980', sviluppo e consolidamento della teoria degli integrali singolari in $\mathbb{R}^n$;

3. *spazi di tipo omogeneo*; 1970'-1990', sviluppo della teoria degli integrali singolari in spazi (quasi-)metrici di misura in cui vale la proprietà di raddoppio delle sfere;

4. *spazi non di tipo omogeneo*; 1980'–, sviluppo della teoria degli integrali singolari in alcuni spazi metrici di misura in cui non vale la proprietà di raddoppio delle sfere.

Senza alcuna pretesa di completezza, elencherò alcuni tra i molti contributi che ritengo significativi.

Nella fase (1) ricordo quelli di Kolmogorov e di M. Riesz [Ko, R], che dimostrano, rispettivamente, il tipo debole $(1,1)$ di $\mathscr{H}$ e la limitatezza in $L^p(\mathbb{T})$ dell'analogo periodico di $\mathscr{H}$.

La fase (2) è segnata dai fondamentali lavori di Calderón e Zygmund [CZ1, CZ2] e di Hörmander [Ho1], nonché dai numerosi contributi di E.M. Stein e della sua scuola (si vedano [F, FeS, St2] e i lavori ivi citati), dal risultato di G. David e J.-L. Journé [DJ] e dalla limitatezza $L^2$ dell'integrale di Cauchy [CMM].

Nella fase (3) si sviluppa lo studio di integrali singolari in una pluralità di contesti – varietà riemanniane compatte, gruppi nilpotenti, curve in $\mathbb{R}^n$ e in gruppi nilpotenti, grafi di funzioni lipschitziane, aperti con bordo lipschitziano – e ha luogo la sistematizzazione della teoria nell'ambito degli spazi omogenei nel senso di Coifman-Weiss [CW1, CW2, Chr]. Tra i contributi più significativi di questa fase ricordiamo [KnS, FS]. È in questo periodo che nasce lo studio di integrali singolari associati a operatori, in particolare funzioni di laplaciani in vari contesti. Particolarmente significativi i contributi di Stein [St1] e M. Cowling [Co] sul calcolo funzionale di generatori infinitesimi di semigruppi simmetrici di diffusione e di L. De Michele e Mauceri [DeMM] sul calcolo di tipo Hörmander per il sublaplaciano sul gruppo di Heisenberg. Quest'ultimo risultato ha generato una schiera di estensioni e generalizzazioni, che non si è ancora esaurita.

Infine, durante la fase (4) si è sviluppato lo studio di integrali singolari in contesti in cui la proprietà di raddoppio fallisce. Questo complesso capitolo della ricerca sugli integrali singolari si suddivide, a sua volta, in due sottocapitoli; il primo, in cui la proprietà di raddoppio fallisce per sfere di raggio "piccolo", e il secondo, nel quale per ogni $R > 0$ le sfere di raggio al più $R$ possiedono la proprietà di raddoppio, ma le costanti di raddoppio non sono limitate al crescere di $R$.

Il primo dei sottocapitoli cui abbiamo fatto cenno qui sopra si sviluppa in relazione al classico *problema di Painlevé*, che richiede, assegnato un aperto $\Omega$ di $\mathbb{C}$, di caratterizzare i sottoinsiemi $E$ di $\Omega$ che godono della proprietà seguente: ogni funzione olomorfa e limitata in $\Omega \setminus E$ si estende a una funzione olomorfa e limitata su tutto $\Omega$. Tale proprietà risulta legata alla limitatezza di integrali singolari in $\mathbb{C}$ noti come trasformata di Cauchy. Tra i contributi più significativi di questa fase vi sono [NTV, To].

Il secondo dei sottocapitoli contiene gli sviluppi riguardanti gli integrali singolari su spazi omogenei e gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume (vd., ad es., [HeS] per il caso di una interessante classe di gruppi solubili, [CS, A1, A2, AJ, I1, I2, I3, CGM1, MV] per l'analisi su spazi simmetrici di tipo non compatto).

La linea di ricerca che illustrerò si inserisce in questo secondo sottocapitolo ed è parte di un più ampio progetto di ricerca che si propone di studiare proprietà dell'operatore di Laplace–Beltrami e di operatori ad esso collegati su varietà a crescita esponenziale di volume. Di questa classe fanno parte gli spazi simmetrici di tipo non compatto, ad esempio il piano iperbolico, gli spazi di Damek-Ricci, che sono esempi di varietà armoniche non simmetriche definite in tempi recenti da E. Damek e F. Ricci, e i gruppi semisemplici non compatti di centro finito muniti di una metrica riemanniana invariante. Esiste una vasta letteratura che studia le proprietà dei loro operatori di Laplace-Beltrami, utilizzando metodi molto potenti, disponibili grazie alla ricca struttura algebrica e geometrica di questi spazi. Si veda, ad esempio, il ruolo cruciale della struttura degli spazi simmetrici di tipo non compatto nelle dimostrazioni della stima debole $(1,1)$ delle trasformate di Riesz [Str, A1]. È naturale chiedersi fino a che punto queste proprietà dipendono dalla poderosa struttura di questi spazi.

Uno degli obiettivi che ci poniamo è di individuare quali tra queste proprietà continuano a valere per varietà di crescita esponenziale di volume. Si tratta di un progetto stimolante, fonte di numerose sorprese (vd., ad esempio, il Teorema 4.13 e il commento che ad esso fa seguito). In questa conferenza illustreremo alcuni recenti risultati inerenti l'analisi dell'operatore di Laplace-Beltrami su varietà riemanniane connesse, non compatte, complete, con volume infinito, eventualmente soddisfacenti ulteriori ipotesi che specificheremo di volta in volta.

## 2. – L'operatore di Laplace–Beltrami

Nel 1867, Eugenio Beltrami [Bel] introdusse l'operatore di Laplace per una metrica riemanniana, oggi noto come operatore di Laplace-Beltrami.

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia $M$ una varietà riemanniana. L'operatore di* Laplace-Beltrami $\mathscr{L}_0$ *su $M$ è definito sullo spazio $\mathscr{D}(M)$ delle funzioni lisce a supporto compatto da*

$$\mathscr{L}_0 f := -\operatorname{div}\nabla f \qquad \forall f \in \mathscr{D}(M),$$

*dove $\nabla$ indica il gradiente riemanniano su $M$ e* div *l'operatore divergenza.*

Una delle ragioni per cui $\mathscr{L}_0$ è importante è che un diffeomorfismo di $M$ è un'isometria se e solo se preserva l'operatore di Laplace-Beltrami [H1, Proposition 2.4, p. 246]. L'operatore di Laplace–Beltrami è naturalmente associato alla forma quadratica $Q$ su $\mathscr{D}(M)$, definita da

$$Q(f) = \int_M |\operatorname{grad} f|^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

ed è ellittico: la sua espressione nella carta locale $(\xi, U)$ è

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0 f(\xi^{-1}x) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\overline{g}(\xi^{-1}x)}} \sum_j \partial_j \Big( \sum_i (g^{i,j} \circ \xi^{-1}) \sqrt{(\overline{g} \circ \xi^{-1})}\; \partial_i (f \circ \xi^{-1}) \Big)(x) \\
&= -\sum_{i,j} g^{i,j}\big(\xi^{-1}x\big)\; \partial^2_{ji}(f \circ \xi^{-1})(x) + \text{termini del primo ordine}
\end{aligned}
$$

per ogni $x$ in $\xi(U)$. Qui $g^{i,j}$ denotano i coefficienti della matrice inversa di $[g_{i,j}]$, che descrive la metrica riemanniana nella carta $(\xi, U)$, e $\overline{g}$ denota $\det [g_{i,j}]$.

Poiché la metrica riemanniana $g$ è liscia per ipotesi, l'operatore $\mathscr{L}_0$ in coordinate locali ha coefficienti lisci. In aggiunta, il noto Teorema di Gaffney [Gr1] assicura che $\mathscr{L}_0$, definito su $\mathscr{D}(M)$, è essenzialmente autoaggiunto in $L^2(M)$, cioè esso ammette un'unica estensione autoaggiunta $\mathscr{L}$. Osserviamo che $\mathscr{L}$ possiede ottime proprietà locali, che ne rendono l'analisi su un aperto limitato di $M$ con bordo liscio ben compresa. Tuttavia va osservato che il nostro interesse è verso proprietà globali di $\mathscr{L}$ e che la geometria all'infinito di $M$ ha un'influenza decisiva su di esse, come vedremo in seguito e come ampiamente dimostrato in letteratura.

Invitandovi a non prendere troppo alla lettera il parallelo che cerco di stabilire, dirò che l'analisi che intendiamo intraprendere ha qualche aspetto in comune con l'analisi di un operatore ellittico su un dominio limitato dotato di bordo, che risulta uniformemente ellittico in ogni sottodominio liscio e compatto del dominio originale, ma che non è globalmente uniformemente ellittico. In questo caso la forma del bordo e la sua "accessibilità" dal dominio influenzano significativamente le proprietà dell'operatore. In modo simile, la relativa grandezza dell'infinito della varietà, misurato, ad esempio, mediante la crescita delle sfere geodetiche al tendere all'infinito del raggio, o mediante l'esistenza di "fini" (ends) relativamente sottili, influenzano le proprietà di $\mathscr{L}$ in modo decisivo. Questo tipo di analisi è ancora in fase di rapida evoluzione e i problemi aperti sono numerosissimi.

## 3. – Diffusione del calore su $M$

L'operatore di Laplace–Beltrami è stato ed è oggetto di numerosissimi studi e molte sono le questioni di interesse che lo riguardano. Ho scelto di discutere brevemente una di queste, la diffusione del calore su varietà riemanniane, perché è funzionale a ciò che segue. Essa consiste nel determinare una funzione $u : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ che risolva il problema di Cauchy seguente

$$
\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mathscr{L} u(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in M \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in M. \end{cases} \tag{3.1}
$$

Qui $f$ è il dato e il significato del simbolo di uguaglianza che compare nella condizione iniziale dipende dallo spazio funzionale in cui si intende impostare il problema. Poiché, come già detto, $\mathscr{L}$ è autoaggiunto, è naturale trattare (3.1) come un problema evolutivo in $L^2(M)$. È noto che per ogni $f$ in $L^2(M)$, l'unica soluzione di (3.1) è data da

$$u(x,t) = \int_M h_t(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \forall x \in M \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

La soluzione è così espressa mediante un *operatore integrale* con nucleo $h_t(x,y)$ agente sul dato $f$: la famiglia di funzioni $\{h_t\}_{t>0}$ viene comunemente detta *nucleo del calore* associato a $\mathscr{L}$. È noto che la funzione $(x,y,t) \mapsto h_t(x,y)$ è, nelle nostre ipotesi, liscia nelle tre variabili in $M \times M \times \mathbb{R}^+$. Negli ultimi decenni lo studio del nucleo del calore associato a operatori di Laplace-Beltrami (e non solo) ha prodotto una quantità enorme di contributi (vd. [Gri] e i lavori ivi citati) che, lungi dall'aver esaurito la loro spinta propulsiva, continuano a stimolare ulteriori ricerche. Per ragioni di brevità mi limiterò qui a descrivere un risultato relativamente recente, che sarà importante nel seguito.

Nel caso in cui $M = \mathbb{R}^n$ vi è un'espressione esplicita per $h_t$, data dalla seguente formula di Gauss-Weierstrass

$$h_t(x,y) = (4\pi t)^{-n/2}\, \mathrm{e}^{-|x-y|^2/(4t)} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n \ \forall t > 0.$$

L'espressione diviene più suggestiva se si introduce la misura (di Lebesgue) della sfera con centro $x$ e raggio $\sqrt{t}$. Denoteremo con $B(x,\sqrt{t})$ tale sfera e con $|B(x,\sqrt{t})|$ la sua misura. Allora

$$h_t(x,y) = \frac{c_n}{|B(x,\sqrt{t})|}\, \mathrm{e}^{-|x-y|^2/(4t)},$$

dove $c_n$ è una costante, che dipende solo dalla dimensione $n$. Su una varietà generica $M$ non vi è alcuna speranza di trovare formule esplicite per il nucleo del calore; è allora naturale ricercare stime puntuali di $h_t$.

Diremo che $M$ possiede la **proprietà di Li-Yau** se esistono costanti positive $c$, $C$ tali che

$$\frac{c}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)}\, \mathrm{e}^{-Cd(x,y)^2/t} \le h_t(x,y) \le \frac{C}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)}\, \mathrm{e}^{-cd(x,y)^2/t} \tag{3.2}$$

per ogni $x$, $y$ in $M$ e per ogni $t$ in $\mathbb{R}^+$. In altre parole $M$ possiede la proprietà di Li-Yau se il suo nucleo del calore ha, *mutatis mutandis*, la stessa forma del nucleo di Gauss-Weierstrass. Qui e nel seguito $\mu$ denota la misura riemanniana di $M$. Li e Yau hanno dimostrato che le varietà con curvatura di Ricci non negativa possiedono la proprietà di Li-Yau [LY].

Il **problema** di caratterizzare le varietà riemanniane $M$ che possiedono la proprietà di Li-Yau ha appassionato numerosi matematici ed è stato risolto indipendentemente da A. Grigor'yan e L. Saloff-Coste (vd. [SC] e la bibliografia ivi contenuta). L'enunciato del loro risultato richiede le due definizioni seguenti.

DEFINIZIONE 3.1. – *Diciamo che $M$ ha la* **proprietà di raddoppio** *se esiste una costante $D$ tale che*

$$\mu(2B) \leq D\,\mu(B) \tag{3.3}$$

*per ogni sfera geodetica $B$. Qui $2B$ denota la sfera con lo stesso centro di $B$ e raggio doppio.*

DEFINIZIONE 3.2. – *Diciamo che $M$ ha la* **proprietà di Poincaré scalata** *se esiste una costante $P$ tale che*

$$\int_B |f - f_B|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq P\, r_B^2 \int_B |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mu \tag{3.4}$$

*per ogni sfera geodetica $B$. Qui $f_B$ denota la media di $f$ su $B$ e $r_B$ è il raggio di $B$.*

TEOREMA 3.3 (Grigor'yan-Saloff-Coste). – *Sia $M$ una varietà riemanniana connessa, non compatta e completa. Sono equivalenti:*

(i) *$M$ possiede le proprietà di raddoppio e di Poincaré scalata;*
(ii) *$M$ possiede la proprietà di Li-Yau.*

Il risultato di Grigor'yan e Saloff-Coste ricorda quelli di Aronson [Ar] degli anni 60' nei quali l'Autore stabiliva stime gaussiane per il nucleo del calore associato a operatori uniformemente ellittici su $\mathbb{R}^n$. Di fatto, è più che un analogia: alcuni casi particolari delle stime di Aronson si ottengono dal risultato di Grigor'yan e Saloff-Coste dotando $\mathbb{R}^n$ di una metrica riemanniana naturalmente associata ai coefficienti della parte del secondo ordine dell'operatore ellittico che si sta esaminando.

Un esempio di varietà riemanniana che non gode della proprietà di Li-Yau è il prodotto connesso $M$ di due copie di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, che denoteremo anche con $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$, realizzato connettendo in maniera liscia con un "cilindroide" due copie di $\mathbb{R}^n$, ciascuna privata della sfera di centro 0 e raggio 1. La metrica su $M$ coincide con quella di $\mathbb{R}^n$ su ciascuna delle copie di $\mathbb{R}^n$ privata della sfera $B(0,1)$ e viene definita sul "cilindroide" in modo che la metrica risultante su $M$ sia globalmente liscia. Mostriamo che su $M$ la proprietà di Poincaré scalata non vale (conseguentemente $M$ non gode della proprietà di Li-Yau per il Teorema di Grigor'yan-Saloff-Coste). Siano $x$ un punto del cilindroide, $R > 0$ e $f$ una funzione definita su $M$, con supporto contenuto in $\overline{B}(x,R)$, che assume valore $-1$ nei punti di $B(x,R)$

che giacciono nella copia “inferiore” e $+1$ in quelli che giacciono nella copia “superiore” di $\mathbb{R}^n$. Evidentemente $\nabla f$ è supportato sul cilindroide e $\|\nabla f\|_2$ non dipende da $R$ se $R$ è sufficientemente grande. Ne deriva che il secondo membro di (3.4) cresce come $R^2$ al tendere di $R$ a $+\infty$. Scegliendo in modo opportuno i valori di $f$ sul cilindroide, possiamo supporre che $f_B = 0$. Il primo membro di (3.4) cresce allora come $R^n$ al crescere di $R$, il che è assurdo, poiché stiamo assumendo $n \geq 3$.

Quello che abbiamo ora descritto è un esempio di come il *comportamento all'infinito della varietà possa influenzare alcune proprietà dell'operatore di Laplace–Beltrami.*

## 4. – Integrali singolari in $\mathbb{R}$

In questa sezione descriveremo un approccio alla limitatezza della trasformata di Hilbert, e più generalmente degli integrali singolari in $\mathbb{R}^n$, alternativo a quello descritto in precedenza che era basato sulla stima debole $(1,1)$. Ricordiamo la definizione di trasformata di Hilbert:

$$\mathscr{H} f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

per ogni funzione $f$ liscia e a supporto compatto. Denotata con $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier, un classico argomento mostra che

$$\mathscr{F}\big(\mathscr{H} f\big)(\xi) = -i \,\mathrm{sgn}(\xi) \mathscr{F} f(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Il Teorema di Plancherel permette allora di concludere che

$$\|\mathscr{H} f\|_2 = \|f\|_2.$$

### 4.1 – *Un approccio “moderno” alla limitatezza di $\mathscr{H}$*

Ci proponiamo di trovare uno spazio di Banach $X$, contenuto in $L^1(\mathbb{R})$, con le proprietà seguenti:

(i) ogni operatore lineare $\mathscr{T}$ limitato da $X$ a $L^1(\mathbb{R})$ e da $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ è anche limitato da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p$ in $(1,2)$;

(ii) la trasformata di Hilbert è limitata da $X$ a $L^1(\mathbb{R})$.

Ci riferiremo alla proprietà (i) dicendo, in modo leggermente impreciso, che “$X$ interpola con $L^2(\mathbb{R})$”. È importante notare che le proprietà (i) e (ii) sono in conflitto: la prima è tanto più facilmente vera quanto più grande è $X$, la seconda, al contrario, è facilmente falsa se $X$ è grande.

### 4.2 – *Idea per X*

L'idea per costruire uno spazio $X$ con le proprietà sopra indicate proviene dalla Fisica II. Consideriamo una carica positiva puntiforme $q$ nello spazio (ad esempio collocata nel punto $O$). In un punto $P$ a distanza $r$ da $O$, il potenziale $V(P)$, supposto nullo all'infinito, è dato da

$$V(P) = c\,\frac{q}{r}, \tag{4.1}$$

dove $r$ indica la distanza $|P - O|$ e $c$ una costante di proporzionalità. Se invece di una singola carica si considera un dipolo elettrico, formato da due cariche $q$ e $-q$ poste a distanza $a$ tra loro, il potenziale $V$ da esse generato (supposto nullo all'infinito) soddisfa

$$V(P) \leq c\,\frac{qa}{r^2}. \tag{4.2}$$

Se $r$ è grande rispetto ad $a$, allora $V(P) \leq C/r^2$. Dunque il fatto che il corpo abbia carica complessiva nulla determina una significativa riduzione del potenziale generato a grande distanza dal corpo stesso.

Con intento puramente analogico determiniamo l'azione della trasformata di Hilbert sulla funzione indicatrice $\mathbf{1}_{[0,1]}$ dell'intervallo $[0,1]$ e sulla funzione $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$. Un semplice calcolo mostra che

$$\mathscr{H}(q\mathbf{1}_{[0,1]})(r) \sim \frac{q}{r} \qquad \text{e} \qquad \mathscr{H}\big[q(\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]})\big](r) \sim \frac{q}{r^2} \tag{4.3}$$

per $r$ sufficientemente grande. Si può assimilare $\mathbf{1}_{[0,1]}$ a una carica puntiforme e $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ a un dipolo elettrico. La trasformata di Hilbert agisce su queste funzioni in modo simile al potenziale elettrico. In particolare, il fatto che l'integrale di $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ sia nullo comporta un maggiore decadimento della sua trasformata di Hilbert all'infinito. La condizione di avere integrale nullo viene detta di **cancellazione**. Vedremo in seguito che l'individuazione di altre condizioni di cancellazione sarà il punto focale della ricerca che abbiamo condotto.

### 4.3 – *Atomi di Coifman–Weiss su M*

In questa sottosezione descriveremo la formalizzazione secondo Coifman–Weiss [CW2] dell'idea esposta nella sottosezione precedente. Poiché la costruzione si applica senza variazioni a un ambito molto più generale di quello euclideo, abbiamo ritenuto conveniente trattare direttamente il caso di una varietà riemanniana $M$ (o, più generalmente, di uno spazio metrico di misura).

DEFINIZIONE 4.1. – *La classe di Coifman-Weiss* $\mathscr{A}_0$ *su* $M$ *è definita da*

$$\mathscr{A}_0 = \bigcup_B \mathscr{A}_0(B),$$

*dove* $\mathscr{A}_0(B)$ *indica lo spazio delle funzioni* $a$ *in* $L^2(B)$ *tali che*

(i) *il supporto di* $a$ *è contenuto nella sfera* $B$;
(ii) *vale la proprietà di* **cancellazione**: $\int_M a \, d\mu = 0$;
(iii) *vale la proprietà di* **taglia**: $\|a\|_2 \leq \mu(B)^{-1/2}$.

*La classe* $\mathscr{A}_0(B)$ *può essere pittoricamente raffigurata nel modo seguente: detto* $V_0$ *il sottospazio unidimensionale di* $L^2(B)$ *costituito dalle funzioni costanti su* $B$, *il suo ortogonale* $V_0^\perp$ *in* $L^2(B)$ *è costituito dalle funzioni di* $L^2(B)$ *a media nulla, cioè da quelle che soddisfano la condizione di cancellazione della definizione precedente, e* $\mathscr{A}_0(B)$ *è la sfera di raggio* $\mu(B)^{-1/2}$ *in* $V_0^\perp$.

Le funzioni in $\mathscr{A}_0$ si dicono *atomi di Coifman–Weiss*.

DEFINIZIONE 4.2. – *Lo spazio di Coifman-Weiss* $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ *su* $M$ *è lo spazio vettoriale delle funzioni* $f$ *di* $L^1(M)$ *che ammettono una rappresentazione della forma*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, a_j, \tag{4.4}$$

*dove* $a_j$ *è un atomo di Coifman-Weiss e* $\{c_j\}$ *una successione di costanti in* $\ell^1$, *cioè tali che* $\sum_j |c_j| < \infty$. *Lo spazio* $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ *è di Banach rispetto alla norma*

$$\|f\|_{H^1_{\mathscr{A}_0}(M)} := \inf\left\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, a_j \right\},$$

*l'estremo inferiore essendo calcolato su tutte le rappresentazioni di* $f$ *della forma* (4.4).

La definizione di spazio di Coifman-Weiss stabilisce quali distribuzioni "integrabili" di cariche siano ammissibili. Si tratta di una definizione sorprendentemente fine: ad esempio, è possibile mostrare che una funzione $f$ a supporto compatto in $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ possiede un'extra-integrabilità logaritmica, una proprietà che riguarda la massa di $f$ e che è difficile immaginare dalla definizione. Questa proprietà, tra l'altro, implica che $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *non contiene* tutti i corpi in $L^1(\mathbb{R})$ con carica nulla.

È un fatto classico che lo spazio di Coifman–Weiss gode delle proprietà auspicate per $X$.

TEOREMA 4.3. – *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *lo spazio di Coifman–Weiss* $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *interpola con* $L^2(\mathbb{R})$*;*
(ii) *la trasformata di Hilbert è limitata da* $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *a* $L^1(\mathbb{R})$*.*

### 4.4 – *Integrali singolari su* $M$ *e* $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$

In questa sottosezione ci proponiamo di stabilire se lo spazio di Coifman-Weiss possa rivestire il ruolo di spazio $X$ anche in relazione a stime di operatori integrali singolari su varietà. Alquanto sorprendentemente, la risposta a questo quesito è negativa anche nel caso di alcune varietà che godono della proprietà di raddoppio.

Per ragioni di spazio non definirò la classe di operatori studiate nei nostri lavori (vd. [MMV2, MMV4]) e limiterò l'esposizione a due esempi paradigmatici: la trasformata di Riesz e le potenze immaginarie di $\mathscr{L}$. Poiché $\mathscr{L}$ è autoaggiunto, esiste un'unica risoluzione spettrale dell'identità $\{\mathscr{P}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tale che

$$\mathscr{L}f = \int_b^\infty \lambda \,\mathrm{d}\mathscr{P}_\lambda f \tag{4.5}$$

per ogni $f$ nel dominio di $\mathscr{L}$. Assegnata una funzione limitata $m$ sullo spettro $\mathrm{spec}(\mathscr{L})$ di $\mathscr{L}$ (che è un sottoinsieme di $[0,\infty)$, poiché $\mathscr{L}$ è non negativo), possiamo definire l'operatore

$$m(\mathscr{L})f := \int_{\mathrm{spec}(\mathscr{L})} m(\lambda)\,\mathrm{d}\mathscr{P}_\lambda f \qquad \forall f \in L^2(M).$$

L'operatore $m(\mathscr{L})$ viene comunemente detto **operatore moltiplicatore** associato al **moltiplicatore spettrale** $m$. Per il teorema spettrale

$$|||m(\mathscr{L})|||_2 \le \|m\|_\infty,$$

dove $|||m(\mathscr{L})|||_2$ indica la norma operatoriale di $m(\mathscr{L})$ su $L^2(M)$. In particolare, se il minimo $b$ di $\mathrm{spec}(\mathscr{L})$ è positivo, allora l'operatore $\mathscr{L}^{-z}$ è limitato su $L^2(M)$ per tutti i numeri complessi $z$ tali che $\mathrm{Re} z \ge 0$. Possiamo definire $m(\mathscr{L})$ anche per funzioni $m$ non necessariamente limitate, ma $m(\mathscr{L})$ è in generale definito solo su un sottospazio di $L^2(M)$.

L'operatore formalmente definito da $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ si chiama **trasformata di Riesz** (del primo ordine) su $M$ e gli operatori della forma $\mathscr{L}^{iu}$, con $u$ reale e non nullo, prendono il nome di **potenze immaginarie** di $\mathscr{L}$.

Denotiamo con $L^p(M;\mathfrak{X}(M))$ lo spazio delle sezioni $L^p$ del fibrato tangente $\mathfrak{X}(M)$ di $M$, cioè lo spazio dei campi vettoriali $\mathscr{X}$ tali che la funzione scalare $g(\mathscr{X},\mathscr{X})$ appartiene a $L^p(M)$. È un fatto ben noto e semplice da dimostrare che la trasformata di Riesz $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ è limitata da $L^2(M)$ allo spazio $L^2(M;\mathfrak{X}(M))$. Lo studio della trasformata di Riesz su varietà è stato propugnato da R. S. Strichartz [Str]. Per alcuni interessanti risultati recenti si vedano [ACDH, AMR, CD] e i riferimenti bibliografici ivi contenuti.

Una delle ragioni per scegliere $\mathscr{L}^{iu}$ quale prototipo di operatore integrale singolare risiede nel fatto che esso riveste un ruolo di primaria importanza nel calcolo funzionale di $\mathscr{L}$, dato che molte funzioni di $\mathscr{L}$ possono venire ricostruite a partire da $\mathscr{L}^{iu}$ mediante una formula di subordinazione basata sulla trasformata di Mellin [Co, St1].

Gli operatori $\mathscr{L}^{iu}$ e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ sono detti singolari poiché i loro nuclei di Schwartz presentano una singolarità critica in ogni punto della diagonale di $M\times M$. Nei casi che esamineremo tali nuclei, che indicheremo genericamente con $k(x,y)$, sono anche singolari all'infinito, cioè per ogni $x$ fissato la "distribuzione" $y\mapsto k(x,y)$ risulta non integrabile all'infinito.

Il seguente risultato mostra che lo spazio di Coifman–Weiss $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ non è adatto a rivestire il ruolo di spazio $X$ nemmeno nel caso di (alcune) varietà che soddisfano la proprietà di raddoppio. Come la dimostrazione metterà in luce, la geometria all'infinito di $\mathbb{R}^n\,\#\,\mathbb{R}^n$ rende i punti della copia "inferiore" di $\mathbb{R}^n$ poco visibili da punti "all'infinito" situati sulla copia "superiore". Ciò comporta che l'azione della trasformata di Riesz su certi atomi di Coifman-Weiss non produce un effetto di cancellazione paragonabile a quello prodotto dalla trasformata di Hilbert in $\mathbb{R}$, e la loro immagine risulta non integrabile all'infinito.

TEOREMA 4.4. – *L'operatore $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ è illimitato da $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n\,\#\,\mathbb{R}^n)$.*

PROOF. – Denotiamo con $M$ il prodotto connesso $\mathbb{R}^n\,\#\,\mathbb{R}^n$. La proprietà isoperimentrica di $M$ [Cha, Thm V.2.1., p. 131] implica l'esistenza di una constante positiva $C$ tale che

$$\|\nabla\mathscr{L}^{-1/2}f\|_1 \geq C\,\|\mathscr{L}^{-1/2}f\|_{n/(n-1)}.$$

Se $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ fosse limitato da $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ a $L^1(M)$, dovrebbe essere vera la stima

$$\|f\|_{H^1_{\mathscr{A}_0}(M)} \geq C\,\|\mathscr{L}^{-1/2}f\|_{n/(n-1)} \qquad \forall f\in H^1_{\mathscr{A}_0}(M).$$

In particolare, tenuto conto del fatto che $\|a\|_1\leq 1$ in virtù della condizione di taglia soddisfatta dagli atomi, dovremmo avere che

$$\sup_{a\in\mathscr{A}_0}\|\mathscr{L}^{-1/2}a\|_{n/(n-1)}<\infty.$$

Scegliamo $a$ con supporto in $B(p,R)$, dove $p$ è un punto del "cilindroide" di $M$, $R$ è un numero positivo sufficientemente grande. Supponiamo che $a$ valga $-1$ su una copia di $\mathbb{R}^n$ e $+1$ sull'altra e che i valori di $a$ sul "cilindroide" siano scelti in modo tale che l'integrale di $a$ su $M$ sia nullo. Allora $a$ è un multiplo di un atomo di Coifman-Weiss. Indicato con $k$ il nucleo di Schwartz di $\mathscr{L}^{-1/2}$, abbiamo

$$\mathscr{L}^{-1/2}a(x) = \int_M k(x,y)\, a(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \tag{4.6}$$

per ogni $x$ distante da $B(p,R)$. Siano $x$ un punto sulla copia di $\mathbb{R}^n$ dove $a$ vale $+1$, molto distante dal cilindroide. Siano poi $y$ e $\widetilde{y}$ due punti della sfera $B(p,R)$, rispettivamente sulla stessa copia di $\mathbb{R}^n$ dove si trova $x$ e sull'altra. È possibile mostrare che

$$k(x,y) \gg k(x,\widetilde{y});$$

alcune stime delicate mostrano che esiste una costante positiva $c$ tale che per $R$ abbastanza grande

$$\int_B k(x,y)\, a(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \geq c \int_{B_+} k(x,y)\, \mathrm{d}\mu(y),$$

dove abbiamo indicato con $B_+$ la parte della sfera $B$ che giace nella copia di $\mathbb{R}^n$ dove giace $x$. Altre stime delicate mostrano che la funzione $x \mapsto \int_{B_+} k(x,\widetilde{y})\, \mathrm{d}\mu(y)$ non appartiene a $L^{n/(n-1)}(M)$. Quindi $\mathscr{L}^{-1/2}a$ non appartiene a $L^{n/(n-1)}(M)$.

### 4.5 – *Nuovi atomi $\mathscr{A}_h \subset \mathscr{A}_0$*

Che fare, dunque? La prima delle nostre idee è di definire (vd. [MMV4]) una classe di atomi $\mathscr{A}_h$, che chiameremo *atomi speciali*, contenuta in $\mathscr{A}_0$. Gli atomi speciali differiscono da quelli di Coifman–Weiss nella condizione di cancellazione, che è molto più forte.

Una funzione $H$ su una varietà riemanniana $M$ si dice $\mathscr{L}$**-armonica** in una sfera $B$ se $\mathscr{L}H = 0$ in $B$.

DEFINIZIONE 4.5. – *La classe $\mathscr{A}_h$ su M è definita come*

$$\mathscr{A}_h = \bigcup_B \mathscr{A}_h(B),$$

*dove $\mathscr{A}_h(B)$ indica lo spazio vettoriale delle funzioni a in $L^2(B)$ tali che*

(i) *il supporto di a è contenuto in B;*

(ii) *vale la proprietà di* **cancellazione:** $\int_M a\, H\, \mathrm{d}\mu = 0$ *per ogni funzione H in $L^2(B)$ armonica in B;*

(iii) *vale proprietà di* **taglia:** $\|a\|_2 \leq \mu(B)^{-1/2}$.

La classe $\mathscr{A}_h(B)$ può essere pittoricamente raffigurata nel modo seguente: in $L^2(B)$ si consideri il sottospazio *infinito dimensionale* $V_h$ costituito dalle funzioni armoniche. Il suo ortogonale $V_h^\perp$ in $L^2(B)$ è costituito dalle funzioni di $L^2(B)$ ortogonali alle funzioni armoniche, cioè da quelle che soddisfano la condizione di cancellazione della definizione precedente e $\mathscr{A}_h(B)$ è la sfera di raggio $\mu(B)^{-1/2}$ in $V_0^\perp$.

Lo spazio $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ è definito a partire da $\mathscr{A}_h$ esattamente come $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ a partire da $\mathscr{A}_0$.

Evidentemente $H^1_{\mathscr{A}_h}(M) \subseteq H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$. Sorprendentemente, come dimostrato in un recente lavoro in fase di rifinitura, ci sono casi, ad esempio $M = \mathbb{R}^n$, in cui $H^1_{\mathscr{A}_h}(M) = H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$.

## 4.6 – *Se vale raddoppio*

TEOREMA 4.6. – *Supponiamo che $M$ soddisfi la proprietà di raddoppio* (3.3). *Valgono le affermazioni seguenti:*

(i) *se il nucleo del calore soddisfa la seguente stima diagonale*

$$h_t(x,x) \le \frac{C}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)} \qquad \forall x \in M \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.7}$$

*allora*

($a$) $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ interpola con $L^2(M)$;

($b$) gli operatori $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ e $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R}$, sono limitati rispettivamente da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ e da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M)$;

(ii) *se $M$ possiede la proprietà di Poincaré scalata* (3.4), *allora* $H^1_{\mathscr{A}_0}(M) = H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$.

La dimostrazione del teorema precedente è piuttosto tecnica e apparirà in un futuro lavoro; essa fa uso del Teorema di De Giorgi sull'hölderianità delle soluzioni di equazioni ellittiche. Osserviamo (vd. [Gr1]) che se $M$ possiede la disuguaglianza di Poincaré scalata, allora il nucleo del calore di $M$ soddisfa la stima diagonale (4.7), e quindi, *a fortiori*, $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ interpola con $L^2(M)$ e gli operatori $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ e $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R}$, sono limitati rispettivamente da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ e da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M)$.

Un caso interessante in cui vale (i) ma non (ii) è quello della varietà $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ considerata in precedenza.

## 4.7 – *Se non vale raddoppio*

Nel caso in cui la varietà riemanniana $M$ non possegga la proprietà di raddoppio non ci sono, senza ulteriori ipotesi su $M$, risultati in letteratura sulla limitatezza di $\mathscr{L}^{iu}$ e/o $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ da spazi di tipo Hardy a $L^1(M)$.

Nel seguito assumeremo che $M$ sia una varietà riemanniana completa, connessa e non compatta che soddisfa le ipotesi seguenti:

(i) la **curvatura di Ricci** di $M$ è limitata dal basso;
(ii) $M$ ha **raggio di iniettività** positivo.

Se $M$ soddisfa le condizioni (i)-(ii), diciamo che $M$ ha **geometria limitata**. Ricordiamo che in letteratura esistono varie nozioni di varietà riemanniane a geometria limitata. Molti autori utilizzano questa terminologia per indicare che vale (ii) qui sopra e che alcune (tutte) le derivate covarianti del tensore di Riemann sono uniformemente limitate in senso opportuno. Nel caso in cui vale (ii) e c'è controllo uniforme su $N$ derivate covarianti del tensore di Riemann, diciamo che $M$ ha $N$-geometria limitata quando $N$ è finito, e $C^\infty$-geometria limitata quando $N = \infty$.

La nostra nozione di geometria limitata ha importanti conseguenze geometriche. Infatti, (i)-(ii) implicano che:

• $M$ ha **crescita al più esponenziale**, cioè esistono costanti non negative $C$, $\alpha$, $\gamma$ tali che

$$\boldsymbol{\mu}(B) \leq C\, r_B^\alpha\, e^{\gamma r_B} \qquad \forall B : r_B \geq 1; \tag{4.8}$$

• non ci sono eccessive concentrazioni o rarefazioni di massa, cioè

$$\inf_{r_B=1} \mu(B) > 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{r_B=1} \mu(B) < \infty,$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le sfere geodetiche di raggio 1 di $M$;

• valgono le proprietà di raddoppio e di Poincaré scalata per sfere di raggio, diciamo, al più 1, con constanti uniformemente controllate.

Discutiamo brevemente la nozione di geometria limitata sopra introdotta, fornendo per cominciare le definizioni precise di raggio di iniettività e di curvatura di Ricci.

Ricordiamo che, dato $p$ in $M$, la mappa esponenziale $\mathrm{Exp}_p$ in $p$ è un diffeomorfismo tra una sfera di centro 0 e raggio $r$ in $M_p$ (lo spazio tangente a $M$ in $p$) e un intorno di $p$ in $M$. Ci sono esempi in cui $\mathrm{Exp}_p$ è un diffemorfismo globale tra $M_p$ e $M$: tra gli altri $\mathbb{R}^n$ dotato della metrica euclidea e il piano iperbolico.

DEFINIZIONE 4.7. – *Il massimo $r$ per cui* $\mathrm{Exp}_p$ *è un diffeomorfismo tra la sfera di centro O e raggio $r$ in $M_p$ e un intorno di $p$ in $M$ viene denotato $i_p(M)$ e chiamato raggio di iniettività in $p$. Il* **raggio di iniettività** *di $M$ è definito come segue*

$$i(M) := \inf\{i_p(M) : p \in M\}.$$

*Osserviamo che $i(M) = \infty$ nei casi in cui $M = \mathbb{R}^n$ oppure $M$ è il piano iperbolico, e che $i(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) = \pi$ (un cilindro in $\mathbb{R}^3$). Una superficie $M$ isometricamente immersa in $\mathbb{R}^3$ con una "fine" molto sottile avrà $i(M) = 0$.*

DEFINIZIONE 4.8. – *Siano $u$ un vettore nello spazio tangente $M_p$ a $M$ in $p$, normalizzato dalla condizione $g(u, u) = 1$, e $u, e_1, \ldots, e_{n-1}$ una base ortonormale di $M_p$. Poniamo*

$$\rho_p(u) := \sum_{j=1}^{n} K(u, \mathrm{e}_j),$$

*dove $K(u, e_j)$ indica la curvatura sezionale del piano in $M_p$ generato dai vettori $u$ ed $e_j$. È possibile dimostrare che $\rho_p(u)$ non dipende dai vettori $e_1, \ldots, e_{n-1}$ scelti per completare la base ortonormale di $M_p$; $\rho_p(u)$ si chiama* **curvatura sezionale** *di $M$ in $p$ nella direzione $u$.*

La condizione che $M$ abbia curvatura di Ricci limitata dal basso si traduce nell'esistenza di una costante $\kappa \geq 0$ tale che

$$\rho_p(u) \geq -\kappa^2 \qquad \forall u \in M_p \ \forall p \in M.$$

Osserviamo che la classe di varietà a geometria limitata comprende sia lo spazio euclideo, sia il piano iperbolico. Non è verosimile che esista una teoria unificata degli integrali singolari che si adatti a entrambe queste varietà. Riteniamo utile a questo punto formulare un'ipotesi aggiuntiva.

DEFINIZIONE 4.9. – *La* **costante di Cheeger** *$h(M)$ di una varietà $M$ è definita [Che] nel modo seguente*

$$h(M) := \inf \frac{\sigma(\partial A)}{\mu(A)},$$

*dove l'estremo inferiore è calcolato rispetto a tutti gli aperti limitati $A$ con bordo $\partial A$ costituito da un'ipersuperficie liscia di $M$, e $\sigma$ denota la misura superficiale su $\partial A$ indotta dalla misura riemannianan $\mu$.*

È noto che la condizione $h(M) > 0$ equivale al fatto che $M$ possiede una proprietà isoperimetrica di tipo Cheeger, e cioè che esistono costanti positive $\kappa_0$ e $C$ tali che per ogni aperto limitato $A$ contenuto un $M$

$$\mu(A_\kappa) \geq C\,\kappa\,\mu(A) \qquad \forall \kappa \in (0, \kappa_0]. \tag{4.9}$$

dove $A_\kappa = \{x \in A : \rho(x, A^c) \leq \kappa\}$. In termini un poco imprecisi, $M$ possiede la proprietà isoperimetrica di Cheeger se una frazione fissa del volume di ogni aperto è concentrata vicino alla sua frontiera.

È possibile mostrare che se $h(M) > 0$, allora $M$ ha crescita esponenziale di volume, cioè esistono costanti positive $C$ e $\gamma'$ tali che

$$\mu(B) \geq C\, \mathrm{e}^{\gamma' r_B} \qquad \forall B : r_B \geq 1. \tag{4.10}$$

Il seguente risultato mette in relazione la costante di Cheeger di una varietà riemanniana con proprietà spettrali del suo operatore di Laplace-Beltrami.

TEOREMA 4.10 (Carbonaro-Mauceri-Meda [CMM1]). – *Sia $M$ una varietà con geometria limitata. Sono equivalenti:*

(i) $h(M) > 0$*;*
(ii) *il minimo $b$ dello spettro $L^2(M)$ di $\mathscr{L}$ è strettamente positivo.*

Il numero $b$ si chiama **lacuna spettrale** di $\mathscr{L}$. Riassumendo, nel seguito supporremo che $M$ soddisfi le ipotesi seguenti:

(i) la **curvatura di Ricci** di $M$ è **limitata dal basso**;
(ii) $M$ ha **raggio di iniettività positivo**;
(iii) $M$ ha lacuna spettrale.

Nonostante lo spazio $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sia piuttosto piccolo, non riusciamo a controllare $\mathscr{L}^{iu}a$ e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}a$ all'infinito quando $a$ è un atomo in $\mathscr{A}_h$ e il supporto di $a$ è contenuto in una sfera di raggio "grande". Ciò è ragionevole se pensiamo che le ipotesi formulate assicurano, a parte la crescita esponenziale di volume, solo un controllo locale della geometria della varietà. Per uscire dall'*empasse* è necessaria una nuova idea.

La nostra seconda idea è che si possa ulteriormente ridurre l'insieme delle "configurazioni ammissibili di cariche". Naturalmente, una tale riduzione comporta una maggiore difficoltà nell'interpolare lo spazio risultante con $L^2$.

### 4.8 – *Una versione locale di $\mathscr{A}_0$ e di $\mathscr{A}_h$*

Fissato un parametro di scala $R > 0$, denotiamo con $\mathscr{B}_R$ la collezione delle sfere in $M$ di raggio al più $R$.

DEFINIZIONE 4.11. – *Le classi $\mathscr{A}_0^R$ e $\mathscr{A}_h^R$ su $M$ sono definite come segue*

$$\mathscr{A}_0^R := \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \mathscr{A}_0^R(B) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{A}_h^R := \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \mathscr{A}_h^R(B).$$

*Gli spazi di Hardy corrispondenti $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ sono poi definiti a partire dalle classi di atomi $\mathscr{A}_0^R$ e $\mathscr{A}_h^R$ esattamente come gli spazi di Hardy $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sono definiti a partire da $\mathscr{A}_0$ e $\mathscr{A}_h$.*

È possibile mostrare che $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(\mathbb{R})$ **non interpolano** con $L^2(\mathbb{R})$ e che, quindi, sono troppo piccoli per poter svolgere in $\mathbb{R}$ il ruolo di spazio $X$ (vd. Sezione 4.2). Invece, gli spazi $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sono adatti all'analisi sulla classe di varietà a crescita esponenziale che abbiamo introdotto in precedenza.

TEOREMA 4.12 [Mauceri-Meda-Vallarino [MMV2, MMV3]). – *Sia $M$ una varietà riemanniana a geometria limitata con lacuna spettrale. Per ogni $R > 0$ valgono le affermazioni seguenti:*

(i) $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ *interpola con* $L^2(M)$;

(ii) $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *interpola con* $L^2(M)$;

(iii) $\mathscr{L}^{iu}$ *e* $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ *sono limitati, rispettivamente, da* $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *a* $L^1(M)$ *e da* $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *a* $L^1(M;\mathfrak{X})$.

Il risultato precedente è nuovo e migliora sotto vari aspetti i risultati contenuti in [MMV2, MMV3]. Il lavoro che lo conterrà è in fase di rifinitura. Le seguenti osservazioni forniscono informazioni complementari e consentono di collocare meglio il ruolo di $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$:

- gli operatori $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ non sono in generale limitati, rispettivamente, da $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ a $L^1(M)$ e da $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ (non lo sono, ad esempio, se $M$ è il piano iperbolico);
- la parte (i) del teorema dipende in modo cruciale dalla proprietà isoperimetrica e dalla proprietà di raddoppio locale;
- la parte (ii) dipende da stime del propagatore delle onde associato a $\mathscr{L}$.

Concluderò menzionando alcuni esempi che mi paiono significativi di varietà cui il teorema precedente si applica:

- $M$ gruppo di Lie semisemplice, non compatto, con centro finito (ad esempio $SL(2,\mathbb{R})$), dotato di una qualunque metrica riemanniana invariante. Le traslazioni sono isometrie e quindi $M$ ha geometria limitata. Essendo $M$ un gruppo non amenabile, esso ha lacuna spettrale.
- $M$ spazio simmetrico di tipo non compatto ($M = G/K$, dove $G$ è un gruppo semisemplice come al punto precedente e $K$ è un suo sottogruppo compatto massimale) dotato della metrica di Killing. Questa classe comprende gli spazi iperbolici.
- Supponiamo che $0<a<b<2a$ e dotiamo il semipiano superiore $S = \{x+iy : y > 0\}$ della metrica

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\,\frac{b^{-2}\,y + a^{-2}}{y+1}\,(dx^2 + dy^2).$$

Osserviamo che essa si comporta come

$$\frac{1}{(by)^2}\,(dx^2+dy^2)$$

quando $y$ è grande e come

$$\frac{1}{(ay)^2}\,(dx^2+dy^2).$$

quando $y$ è piccolo. La varietà $M$ può essere pensata come il risultato di un incollamento liscio tra due piani iperbolici con curvature $-b^2$ e $-a^2$. Un semplice calcolo mostra che la curvatura $K$ di $M$ soddisfa la stima

$$-b^2 \leq K \leq -a^2,$$

e quindi $M$ è una varietà di Cartan-Hadamard con curvatura *pinched*. È possibile mostrare che $M$ ha lacuna spettrale.

Di fatto, tutte le varietà di Cartan-Hadamard che hanno curvatura *pinched* soddisfano le ipotesi del teorema precedente. Il motivo per cui ho scelto di trattare proprio questa varietà risiede nel fatto che alcuni operatori classici dell'analisi armonica presentano su $M$ un comportamento inatteso. Consideramo, ad esempio, il naturale operatore massimale di Hardy–Littlewood $\mathscr{M}$, definito per ogni funzione $f$ localmente integrabile da

$$\mathscr{M}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f|\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall x\in M.$$

TEOREMA 4.13 (J. O. Strömberg [Str]). – *Sia $M$ la varietà descritta sopra. Allora $\mathscr{M}$ è limitato su $L^p(M)$ per ogni $p>b/a$ ed è illimitato se $p<b/a$.*

Questo risultato contrasta fortemente con il corrispondente risultato euclideo e con quello, identico ma ottenuto con metodi del tutto differenti, di Strömberg su spazi simmetrici non compatti, che asserisce che $\mathscr{M}$ è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p$ in $[1,\infty)$. In relazione a queste considerazioni si veda la parte finale dell'Introduzione.

## REFERENCES


[A1] J.-PH. ANKER, *Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces*, Duke Math. J., **65** (1992), 257-297.

[A2] J.-PH. ANKER, *$L_p$ Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, Ann. of Math., **132** (1990), 597-628.

[AJ] J.-PH. ANKER - L. JI, *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces I*, Geom. Funct. Anal., **9** (1999), 1035-1091.

[Ar] D. G. ARONSON, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Normale Sup., **22** (1968), 607-694.

[ACDH] P. AUSCHER - T. COULHON - X. T. DUONG - S. HOFMANN, *Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **37** (2004), 911-957.

[AMR] P. AUSCHER - A. MCINTOSH - E. RUSS, *Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds*, J. Geom. Anal., **18** (2008), 192-248.

[Bel] E. BELTRAMI, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, Ann. Mat. Pura Appl., **1** (1867), 329-366.

[BL] J. BERGH - J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces. An Introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. **223**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[CZ1] A. CALDERÓN - A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., 88 (1952), 85-139.

[CZ2] A. CALDERÓN - A. ZYGMUND, *On singular integrals*, Amer. J. Math., **78** (1956), 289-309.

[CMM1] A. CARBONARO - G. MAUCERI - S. MEDA, *$H^1$, BMO and singular integrals for certain metric measure spaces*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. **VIII** (2009), 543-582.

[CMM2] A. CARBONARO - G. MAUCERI - S. MEDA, *$H^1$ and BMO for certain locally doubling metric measure spaces of finite measure*, Colloq. Math., **118** (2010), 13-41.

[Cha] I. CHAVEL, *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives.*, vol. 145 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Che] J. CHEEGER, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. In: *Problems in Analysis* (Ed. R. C. Gunning). A Symposium in honor of Salomon Bochner (Princeton 1969), pp. 195-199. Princeton: Princeton University Press 1970.

[Chr] M. CHRIST, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Coll. Math., **61** (1990), 601-628.

[CS] J.-L. CLERC - E. M. STEIN, *$L^p$ multipliers for noncompact symmetric spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **71** (1974), 3911-3912.

[CMM] R. R. COIFMAN - A. MCINTOSH - Y. MEYER, *L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L2 pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math., **116** (1982), 361-387.

[CW1] R. R. COIFMAN - G. WEISS, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics, **242**, Springer 1971.

[CW2] R. R. COIFMAN - G. WEISS, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 569-645.

[CD] T. COULHON - X. T. DUONG, *Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$*, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 1151-1169.

[Co] M. G. COWLING, *Harmonic analysis on semigroups*, Ann. of Math., **117** (1983), 267-283.

[CGM1] M. COWLING - S. GIULINI - S. MEDA, *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces. I*, Duke Math. J., **72** (1983), 109-150.

[DJ] G. DAVID - J.-L. JOURNÉ, *A Boundedness Criterion for Generalized Calderon-Zygmund Operators*, Ann. of Math., **120**, (1984), 371-397.

[DeMM] L. De Michele - G. Mauceri, *$L^p$ multipliers on the Heisenberg group*, Mich. Math. J., **26** (1979), 361-371.

[F] C. Fefferman, *Characterizations of bounded mean oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 587-588.

[FeS] C. Fefferman - E. M. Stein, *$H^p$ spaces of several variables*, Acta Math., **179** (1972), 137-193.

[FS] G. B. Folland - E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press and Tokyo University Press, Princeton, 1982.

[GMMST1] J. García-Cuerva - G. Mauceri - S. Meda - P. Sjögren - J. L. Torrea, *Functional Calculus for the Ornstein-Uhlenbeck Operator*, J. Funct. Anal., **183**, no. 2 (2001), 413-450.

[GMMST2] J. García-Cuerva - G. Mauceri - S. Meda - P. Sjögren - J. L. Torrea, *Maximal operators for the Ornstein-Uhlenbeck semigroup*, J. London Math. Soc., **67** (2003), 219-234.

[Gri] A. Gry'goryan, *Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds, in Spectral Theory and Geometry*, ICMS Instructional Conference Edinburgh 1988, eds B. Davies and Y. Safarov, London Mathematical Society Lecture Note Series, **273**, Cambridge University Press, 1999.

[Gr1] A. Grigor'yan, *Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds, in Spectral Theory and Geometry*, ICMS Instructional Conference Edinburgh 1988, eds B. Davies and Y. Safarov, London Mathematical Society Lecture Note Series, **273**, Cambridge University Press, 1999.

[HeS] W. Hebisch - T. Steger, *Multipliers and singular integrals on exponential growth groups*, Math. Z., **245**, no. 1 (2003), 37-61.

[H1] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*. Academic Press, New York, 1984.

[Ho1] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in $L^p$ spaces*, Acta Math., **104** (1960), 93-140.

[I1] A .D. Ionescu, *Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one*, J. Funct. Anal., **174** (2000), 274-300.

[I2] A. D. Ionescu, *Singular integrals on symmetric spaces of real rank one*, Duke Math. J., **114** (2002), 101-122.

[I3] A. D. Ionescu, *Singular integrals on symmetric spaces, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), 3359-3378.

[Ko] A. N. Kolmogorov, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math., **7** (1925) 23-28.

[KnS] A. W. Knapp - E. M. Stein, *Intertwining operators on semisimple Lie groups*, Ann. of Math., **93** (1971), 489-578.

[LY] P. Li - S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math., **156** (1986), 153-201.

[MM] G. Mauceri - S. Meda, *A BMO space for the Ornstein–Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal., **252** (2007), 278-313.

[MMS1] G. Mauceri - S. Meda - P. Sjögren, *Endpoint estimates for first-order Riesz transforms associated to the Ornstein-Uhlenbeck operator*, Rev. Mat. Iberoam., **28**, no. 1 (2012), 77-91.

[MMS2] G. Mauceri - S. Meda - P. Sjögren, *A maximal function characterisation of the Hardy space for the Gauss measure*, apparirà su Proc. Amer. Math. Soc.

[MMV1] G. Mauceri - S. Meda - M. Vallarino, *Estimates for functions of the Laplacian on manifolds with bounded geometry*, Math. Res. Lett., **16** (2009), 861-879.

[MMV2] G. MAUCERI - S. MEDA - M. VALLARINO, *Hardy type spaces on certain noncompact manifolds and applications*, J. London Math. Soc., **84** (2011), 243-268.

[MMV3] G. MAUCERI - S. MEDA - M. VALLARINO, *Hardy spaces on noncompact symmetric spaces and applications*, preprint, 2010.

[MMV4] G. MAUCERI - S. MEDA - M. VALLARINO, *Atomic decomposition of Hardy type spaces on certain noncompact manifolds*, J. Geom. Anal.

[MSV] S. MEDA - P. SJÖGREN - M. VALLARINO, *On the $H^1$-$L^1$ boundedness of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 2921-2931.

[MV] S. MEDA - M. VALLARINO, *Weak type estimates for multiplier operators on noncompact symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (2010), 2993-3026.

[NTV] F. NAZAROV - S. TREIL - A. VOLBERG, *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math., **190**, no. 2 (2003), 151-239.

[R] M. RIESZ, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit., **27** (1927), 218-244.

[SC] L. SALOFF-COSTE, *Aspects of Sobolev-type inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series **289**, Cambridge University Press, 2002.

[So] P. M. SOARDI, *Serie di Fourier in più variabili*, Quaderno dell'Uniome Matematica Italiana, **26**, Pitagora Ed., Bologna 2004.

[St1] E. M. STEIN, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood–Paley Theory*, Annals of Math. Studies, No. **63**, Princeton N. J., 1970.

[St2] E. M. STEIN, *Harmonic Analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Math. Series No. **43**, Princeton N. J., 1993.

[Str] J.-O. STRÖMBERG, *Weak type $L^1$ estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces*, Ann. of Math., **114** (1981), 115-126.

[To] X. TOLSA, *BMO, $H^1$, and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures*, Math. Ann., **319** (2001), 89-149.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi Milano-Bicocca
Via Cozzi 53, 20125 Milano
E-mail: stefano.meda@unimib.it

*Received December 18, 2011 and in revised form January 19, 2012*