Egle Bettio, Enrico Jabara

Gruppi risolubili dotati di un automorfismo di ordine primo a centralizzante finito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **4** (2011), n.1, p. 123–136.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2011_9_4_1_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

Bollettino U. M. I.
(9) **IV** (2011), 123-136

Gruppi risolubili dotati di un automorfismo di ordine primo a centralizzante finito

EGLE BETTIO - ENRICO JABARA

Abstract. – *In this paper we prove that a solvable, finitely generated group G of finite torsion-free rank admitting a quasi regular automorphism of prime order is virtually nilpotent. We also prove that the hypothesis that G is finitely generated can be omitted if G is a minimax group.*

1. – Introduzione.

In questo lavoro studiamo la struttura di un gruppo risolubile G dotato di un automorfismo ϕ di ordine primo e tale che $C_G(\phi)$ sia finito (un automorfismo ϕ a centralizzante finito si dice *quasi-regolare*, se poi $C_G(\phi) = \{1\}$ allora ϕ si dice *regolare*). In [2] Endimioni ha dimostrato che se G è policiclico allora G risulta virtualmente nilpotente (cioé ammette un sottogruppo di indice finito che è nilpotente). Lo stesso autore in [1] ha costruito un automorfismo regolare di ordine 2 del gruppo metabeliano $G = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, mostrando che i risultati ottenuti in [1] e [2] non sono generalizzabili alla classe dei gruppi risolubili e finitamente generati.

Scopo di questa nota è estendere il risultato di Endimioni alla classe dei gruppi risolubili con rango senza torsione finito. Un gruppo G ha rango senza torsione finito se esiste una serie

$$(*) \qquad G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = \{1\}$$

in cui ogni fattore G_i/G_{i-1} risulta periodico o ciclico infinito. Il numero dei termini della serie $(*)$ che sono ciclici infiniti è un invariante che dipende solamente dal gruppo G e non dalla serie considerata, esso si dice il rango senza torsione di G e si indica con $\widehat{r}_0(G)$. Dimostreremo il

TEOREMA A. – *Sia G un gruppo risolubile, finitamente generato e con rango senza torsione finito. Se G ammette un automorfismo quasi regolare ϕ di ordine primo allora G contiene un sottogruppo normale e nilpotente di indice finito.*

Nelle ipotesi del Teorema A dimostreremo inoltre che se d è la lunghezza derivata di G, r il suo rango senza torsione, l'ordine di ϕ è p e $|C_G(\phi)| = k$ allora esistono una funzione γ_1 dipendente solamente da p e una funzione γ_2 dipendente da d, k, p e r tali che esiste $N \trianglelefteq G$ nilpotente di classe al più $\gamma_1(p)$ con $|G:N| \leq \gamma_2(d,p,r,k)$.

Se non si suppone che il gruppo G sia finitamente generato dimostreremo il

TEOREMA B. – *Sia G un gruppo risolubile minimax. Se G ammette un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p, allora G contiene un sottogruppo N normale e nilpotente di indice finito e tale che per ogni $h \in N$ risulta*

$$hh^{\phi} \dots h^{\phi^{p-1}} = 1.$$

Nelle ipotesi del Teorema B dimostreremo che la classe di nilpotenza di N è limitata in funzione solamente dell'ordine di ϕ. Mostreremo anche come si possa ottenere una limitazione più soddisfacente in funzione dell'ordine di ϕ e della lunghezza derivata di G. Dal Teorema B discende la seguente generalizzazione del Teorema 1.1 di [1].

TEOREMA C. – *Sia G un gruppo risolubile minimax. Se G ammette un automorfismo quasi-regolare di ordine* 2 *allora G è virtualmente abeliano.*

2. – Definizioni e risultati preliminari.

Se G è un gruppo risolubile con lunghezza derivata d con

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \dots \triangleright G^{(d-1)} \triangleright G^{(d)} = \{1\}$$

indichiamo la serie derivata di G. Con $\mathbb{P}$ denotiamo l'insieme dei numeri primi, poniamo anche $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cup \{0\}$.

OSSERVAZIONE 2.1. – Se G è un gruppo di rango senza torsione finito e H è un suo sottogruppo, allora $\widehat{r}_0(H) \leq \widehat{r}_0(G)$; se poi H è normale in G allora $\widehat{r}_0(G) = \widehat{r}_0(H) + \widehat{r}_0(G/H)$. In particolare se G è risolubile con lunghezza derivata d risulta

$$\widehat{r}_0(G) = \sum_{i=1}^{d} r_0(G^{(i-1)}/G^{(i)}).$$

DEFINIZIONE 2.2. – *Un gruppo G si dice a ranghi abeliani finiti o, più brevemente,* FAR*-gruppo se esiste una serie*

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = \{1\}$$

a quozienti abeliani tale che $r_p(G_i/G_{i-1}) < \infty$ *per ogni* $p \in \widehat{\mathbb{P}}$.

OSSERVAZIONE 2.3. – Dalla definizione precedente segue immediatamente che ogni FAR-gruppo è risolubile e che ogni sottogruppo e ogni quoziente di un FAR-gruppo è ancora un FAR-gruppo. In particolare nella Definizione 2.2 ad una generica serie a quozienti abeliani si può sostituire la serie derivata di G.

Se G è un FAR-gruppo G è anche un gruppo risolubile con rango senza torsione finito e si può definire $\widehat{r}_0(G)$ nel modo descritto sopra. Il numero $\widehat{r}_0(G)$ rappresenta una limitazione superiore al rango senza torsione di una qualsiasi sezione abeliana di G. In maniera analoga se G è un FAR-gruppo con lunghezza derivata d, per ogni $p \in \mathbb{P}$ poniamo

$$\widehat{r}_p(G) = \widehat{r}_0(G) + \sum_{i=1}^{d} r_p(G^{(i-1)}/G^{(i)}).$$

È facile verificare che $\widehat{r}_p(G)$ rappresenta una limitazione superiore al p-rango di qualsiasi sezione abeliana di G.

Sussistono le seguenti inclusioni proprie tra classi di gruppi risolubili (si veda [7], p. 86)

Finiti $\subset$ Policiclici $\subset$ Minimax $\subset$ FAR $\subset$ Rango senza torsione finito,

si può però dimostrare che un FAR-gruppo finitamente generato è un gruppo (risolubile) minimax (si vedano 5.2.8 e 10.5.3 di [7]).

Se G è un gruppo e $n \in \mathbb{N}$ con G^n denotiamo il sottogruppo caratteristico $G^n = \langle g^n \mid g \in G \rangle$; si tratta del minimo sottogruppo di G tale che G/G^n abbia esponente che divide n.

Nel seguito di questo lavoro con G denoteremo sempre un gruppo dotato di un automorfismo ϕ di ordine finito. Se H è un sottogruppo ϕ-invariante di G indicheremo con ϕ la restrizione di ϕ a H. Se H è normale in G indicheremo sempre con ϕ l'automorfismo indotto da ϕ su $\overline{G} = G/H$. Poniamo poi

$$[G, \phi] = \{g^{-1}g^{\phi} \mid g \in G\}$$

(in generale $[G, \phi]$ è un sottoinsieme e non un sottogruppo, se però G è abeliano allora $[G, \phi]$ è un sottogruppo di G; utilizzeremo spesso questo fatto senza richiamarlo esplicitamente). È facile dimostrare che $\langle [G, \phi] \rangle$ è il minimo sottogruppo normale ϕ-invariante di G tale che ϕ induce su $G/\langle [G, \phi] \rangle$ l'identità.

Siano $a, b, \dots, z$ dei parametri (nel nostro caso numeri naturali), allora una certa quantità verrà detta $\{a, b, \dots, z\}$-limitata se esiste una funzione nei soli valori $a, b, \dots, z$ che limita superiormente tale quantità. Tale notazione è particolarmente utile per evitare di introdurre funzioni eccessivamente complicate nelle dimostrazioni per induzione.

DEFINIZIONE 2.4. – *L'automorfismo ϕ di G si dice regolare se $C_G(\phi) = \{1\}$ e si dice quasi-regolare se $C_G(\phi)$ è finito.*

DEFINIZIONE 2.5. – *L'automorfismo ϕ di G si dice n-spezzante ($n \in \mathbb{N}$) se per ogni $g \in G$ risulta*

$$gg^{\phi} \dots g^{\phi^{n-1}} = 1.$$

LEMMA 2.6. – *Sia ϕ un automorfimo n-spezzante di G. Allora*

(i) *l'ordine di ϕ divide n;*

(ii) *se H è un sottogruppo ϕ-invariante di G allora ϕ induce su H un automorfismo n-spezzante;*

(iii) *se N è un sottogruppo ϕ-invariante normale di G allora ϕ induce su G/N un automorfismo n-spezzante;*

(iv) *$C_G(\phi)$ ha esponente che divide n.*

DIM. – Da

$$gg^{\phi} \dots g^{\phi^{n-1}} = 1 = g^{\phi}g^{\phi^2} \dots g^{\phi^n},$$

si ottiene $g^{\phi^n} = g$ per ogni $g \in G$ e questo dimostra (i). I punti (ii) e (iii) sono conseguenze della Definizione 2.5. Per dimostrare in punto (iv) consideriamo un elemento g appartenente a $C_G(\phi)$, si ha allora $1 = gg^{\phi} \dots g^{\phi^{n-1}} = g^n$, da cui la conclusione. □

Due elementi $x, y \in G$ si dicono ϕ-coniugati se esiste $g \in G$ tale che si abbia $x = g^{-1}yg^{\phi}$. La ϕ-coniugazione definisce una relazione di equivalenza in G; se $x \in G$ e con $[x]_{\phi}$ si denota la ϕ-classe di x allora l'insieme

$$\mathscr{R}_G(\phi) = \{[x] \mid x \in G\}$$

definisce una partizione di G.

DEFINIZIONE 2.7. – *La cardinalità dell'insieme $\mathscr{R}_G(\phi)$, che si denota con $R_G(\phi)$, si dice il numero di Reidemeister dell'automorfismo ϕ (nel gruppo G).*

LEMMA 2.8. – *Se G è abeliano $R_G(\phi) = |G : [G, \phi]|$.*

DIM. – Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un insieme di rappresentanti delle classi laterali di $[G, \phi]$ in G, allora per ogni $g \in G$ esistono $\lambda \in \Lambda$ e $y = h^{-1}h^{\phi} \in [G, \phi]$ tali che $g = x_\lambda y$. Ricordando che G è abeliano si ottiene $g = x_\lambda h^{-1}h^{\phi} = h^{-1}x_\lambda h^{\phi}$ e quindi $R_G(\phi) \le |\Lambda| = |G : [G, \phi]|$.

Viceversa se $\mathscr{R}_G(\phi) = \{[x_\gamma]_{\phi} \mid \gamma \in \Gamma\}$ allora per ogni $g \in G$ esistono $h \in G$ e $\gamma \in \Gamma$ tali che $g = h^{-1}x_\gamma h^{\phi} = x_\gamma h^{-1}h^{\phi}$. Dunque $|G : [G, \phi]| \le |\Gamma| = R_G(\phi)$. □

LEMMA 2.9. – *Sia N un sottogruppo normale e ϕ-invariante di G. Allora*

(i) $|C_G(\phi)| \leq |C_{G/N}(\phi)| \cdot |C_N(\phi)|$;
(ii) $R_{G/N}(\phi) \leq R_G(\phi)$;
(iii) $R_N(\phi) \leq R_G(\phi) \cdot |C_{G/N}(\phi)|$;
(iv) $R_G(\phi) \leq R_N(\phi) \cdot R_{G/N}(\phi)$;
(v) $|C_{G/N}(\phi)| \leq R_N(\phi) \cdot |C_G(\phi)|/|C_N(\phi)|$.

DIM. – Le dimostrazioni dei punti (i), (ii), (iv) sono ovvie; per il punto (iii) si veda il Lemma 1 di [5].

Per dimostrare il punto (v) poniamo $\widehat{G} = G/N$, $C = C_G(\phi)$, $\widehat{C} = CN/N$, $R_N(\phi) = \rho$, $|\widehat{C}| = k$. Dimostriamo che $|C_{\widehat{G}}(\phi)| \leq k\rho$ ragionando per assurdo: supponiamo che esistano $g_0, g_1, \ldots, g_{k\rho} \in G$ tali che $g_i^{-1}g_i^{\phi} \in N$ per ogni $i \in \{0, 1, \ldots k\rho\}$ e $g_iN \neq g_jN$ se $i \neq j$. Sotto tali ipotesi deve esistere una ϕ-classe $[t]_\phi \in \mathscr{R}_G(\phi)$ che contiene almeno $k+1$ elementi dell'insieme $\{g_0, g_1, \ldots, g_{k\rho}\}$; siano essi $h_0, h_1, \ldots h_k$. Esistono quindi opportuni $a_i \in N$ tali che $h_i^{-1}h_i^{\phi} = a_i t a_i^{-\phi}$, $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Dunque $(h_i a_i)^{\phi} = h_i a_i t$ da cui

$$(h_i a_i (h_j a_j)^{-1})^{\phi} = h_i a_i (h_j a_j)^{-1} \in C$$

e in $\widehat{G}$ si avrebbe $\widehat{h}_0 \widehat{h}_i^{-1} \in \widehat{C}$ con $\widehat{h}_0 \widehat{h}_i^{-1} \neq \widehat{h}_0 \widehat{h}_j^{-1}$ se $i \neq j$. Ma allora $|\widehat{C}| > k$ mentre per ipotesi $|\widehat{C}| = k$: contraddizione. □

LEMMA 2.10. – *Sia G un gruppo abeliano e radicabile, ϕ un suo automorfismo quasi regolare di ordine n con $|C_G(\phi)| = k$. Allora ϕ risulta n-spezzante e si ha $R_G(\phi) = \{1\}$. Inoltre se $(k, n) = 1$ allora $C_G(\phi) = \{1\}$.*

DIM. – Poniamo $\nabla(G) = \{g \in G \mid gg^{\phi} \ldots g^{\phi^{n-1}} = 1\}$; dal fatto che G è abeliano discende immediatamente che $\nabla(G)$ è un sottogruppo di G.

Dimostriamo che $|G : \nabla(G)| \leq k$. Ragioniamo per assurdo supponendo che esistano $g_0, g_1, \ldots, g_k \in G$ con $g_0 \in \nabla(G)$ e $g_i\nabla(G) \neq g_j\nabla(G)$ se $i \neq j$. Siccome $g_i g_i^{\phi} \ldots g_i^{\phi^{n-1}} \in C_G(\phi)$ per ogni $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, devono esistere due indici distinti i,j tali che $g_i g_i^{\phi} \ldots g_i^{\phi^{n-1}} = g_j g_j^{\phi} \ldots g_j^{\phi^{n-1}}$. Tenendo conto che G è abeliano dall'ultima uguaglianza si ricava $(g_i g_j^{-1})(g_i g_j^{-1})^{\phi} \ldots (g_i g_j^{-1})^{\phi^{n-1}} = 1$ e $g_i g_j^{-1} \in \nabla(G)$: contraddizione.

Poiché un gruppo radicabile non possiede sottogruppi di indice finito deve essere $G = \nabla(G)$ e quindi ϕ risulta n-spezzante su G.

Nel quoziente $G/[G, \phi]$ l'automorfismo ϕ è n-spezzante per il Lemma 2.6.iii e poichè ϕ centralizza $G/[G, \phi]$, tale gruppo, per il Lemma 2.6.iv, ha esponente che divide n, quindi $G^n \leq [G, \phi]$. Poiché G è radicabile si ha $G = G^n$ dunque $G = [G, \phi]$ e, per il Lemma 2.8 $R_G(\phi) = 1$. L'ultimo asserto è una conseguenza del Lemma 2.6.iv. □

LEMMA 2.11. – *Sia G un gruppo abeliano aperiodico e sia ϕ quasi-regolare di ordine n. Allora ϕ è n-spezzante e regolare. Inoltre se G ha rango finito r si ha $R_G(\phi) \leq n^r$.*

DIM. – Siccome G è aperiodico, per il Lemma 2.6.iv si deve avere $C_G(\phi) = \{1\}$ e dal fatto che G è abeliano discende facilmente che $gg^{\phi} \dots g^{\phi^{p-1}} \in C_G(\phi)$, dunque ϕ è n-spezzante.

Supponiamo quindi che $r = r_0(G) < \infty$; siccome ϕ centralizza $G/[G,\phi]$ ed è n-spezzante, dal Lemma 2.6.iv segue che $G/[G,\phi]$ ha esponente n. Quindi $[G,\phi] \leq G^n$ e, per il Lemma 2.8, si ha $R_G(\phi) = |G : [G,\phi]| \leq |G : G^n| \leq n^r$. □

LEMMA 2.12. – *Sia p un numero primo. Se G è un p-gruppo abeliano e ϕ è quasi-regolare di ordine p allora $r_p(G) \leq |C_G(\phi)|^p$.*

DIM. – È sufficiente considerare il caso in cui G è abeliano elementare. In tal caso il risultato discende dal Corollario 1.7.4 di [6]. □

Di seguito riuniamo, per comodità del lettore, alcuni risultati di cui ci serviremo nelle dimostrazioni.

TEOREMA 2.13 (Hartley e Meixner [3]). – *Sia G un gruppo finito e risolubile e sia ϕ un suo automorfismo di ordine primo p. Se $|C_G(\phi)| = k$ allora G ammette un sottogruppo N normale, nilpotente di classe $\{p\}$-limitata e di indice finito $\{k,p\}$-limitato.* □

TEOREMA 2.14 (Jabara [5]). – *Sia G un gruppo risolubile e finitamente generato dotato di un automorfismo ϕ di ordine primo p con $R_G(\phi) < \infty$. Allora G è virtualmente nilpotente.* □

Per il seguente risultato si può vedere il Corollario 6.4.2 di [6].

TEOREMA 2.15 (Khukhro). – *Sia G un gruppo risolubile di lunghezza derivata d. Se G ammette un automorfismo p-spezzante con p numero primo dispari, allora G è nilpotente di classe limitata da* $\dfrac{(p-1)^d - 1}{p-2}$. □

OSSERVAZIONE 2.16. – Nel Teorema 2.15 si considerano solamente automorfismi p-spezzanti con p numero primo dispari. Infatti se un gruppo G è dotato di un automorfismo 2-spezzante allora $gg^{\phi} = 1$ da cui $g^{\phi} = g^{-1}$ per ogni $g \in G$ e quindi G risulta abeliano.

3. – Enunciati e dimostrazioni dei teoremi.

Col seguente teorema dimostriamo che un automorfismo quasi-regolare di ordine p di un gruppo risolubile e con rango senza torsione finito ha numero di Reidemeister finito: questa è la proprietà fondamentale che ci permette di ottenere tutti i nostri risultati.

Ricordiamo che se G è un gruppo nilpotente allora l'insieme degli elementi di ordine finito di G forma un sottogruppo caratteristico $\tau(G)$ di G detto il sottogruppo di torsione di G; risulta

$$\tau(G) = \bigoplus_{q \in \mathbb{P}} G_q,$$

ove G_q indica la q componente di G (si veda il Teorema 5.2.7 di [8]).

TEOREMA 3.1. – *Sia G un gruppo risolubile con rango senza torsione finito e sia ϕ un suo automorfismo quasi-regolare di ordine primo p. Allora $R_G(\phi) < \infty$, inoltre se $|C_G(\phi)| = k$, $\widehat{r}_0(G) = r$ e la lunghezza derivata di G è d, risulta*

$$R_G(\phi) \le k^d \cdot p^{dr}.$$

DIM. – La dimostrazione procede per induzione su d, la lunghezza derivata di G.

Se $d = 1$ allora G è abeliano. Sia $\tau(G) = \bigoplus_{q \in \mathbb{P}} G_q$. Per il Lemma 2.12 $r_p(G_p) < \infty$ e, per il Teorema 4.3.13 di [8], si può scrivere $G_p = D \times B$ con D radicabile e B finito. Per i Lemmi 2.8 e 2.10 risulta

$$|G_p : [G_p, \phi]| = |B : [B : \phi]| = |C_B(\phi)| \le |C_{G_p}(\phi)|.$$

Se invece q è un numero primo diverso da p si ha $G_q = [G_q, \phi] \times C_{G_q}(\phi)$ e quindi $R_{G_q}(\phi) = |C_{G_q}(\phi)|$. Ne risulta che

$$R_{\tau(G)}(\phi) = \prod_{q \in \mathbb{P}} R_{G_q}(\phi) \le \prod_{q \in \mathbb{P}} |C_{G_q}(\phi)| = |C_G(\phi)|.$$

Il gruppo $\overline{G} = G/\tau(G)$ è aperiodico ed ha rango senza torsione $r = r_0(\overline{G}) = \widehat{r}_0(G)$ e dal Lemma 2.11 discende $R_{\overline{G}}(\phi) \le p^r$. Applicando il Lemma 2.9.iv si ricava che

$$R_G(\phi) \le R_{\tau(G)}(\phi) \cdot R_{G/\tau(G)}(\phi) \le k \cdot p^r,$$

e quindi la base dell'induzione è dimostrata.

Sia $d > 1$. Allora, posto $A = G^{(d-1)}$, per quanto dimostrato sopra risulta

$$R_A(\phi) \le |C_A(\phi)| \cdot p^{r_0(A)} \le k \cdot p^{r_0(A)}. \tag{1}$$

In $\overline{G} = G/A$, tenendo conto del Lemma 2.9.v e della base dell'induzione, si ha

$$|C_{\overline{G}}(\phi)| \le R_A(\phi) \cdot |C_G(\phi)|/|C_A(\phi)| \le |C_G(\phi)| \cdot p^{r_0(A)} = k \cdot p^{r_0(A)}. \tag{2}$$

Per l'ipotesi induttiva risulta

$$R_{\overline{G}}(\phi) \leq |C_{\overline{G}}(\phi)|^{d-1} \cdot p^{(d-1)\cdot \hat{r}_0(\overline{G})}$$

e utilizzando (2) si ottiene

$$R_{\overline{G}}(\phi) \leq k^{d-1} \cdot p^{(d-1)\cdot r_0(A)} \cdot p^{(d-1)\cdot \hat{r}_0(\overline{G})}. \tag{3}$$

Dalle disugaglianze (1) e (3), ricordando il Lemma 2.9.iv e che $r = \widehat{r}_0(G) = r_0(A) + \widehat{r}_0(\overline{G})$, si ottiene

$$R_G(\phi) \leq R_A(\phi) \cdot R_{\overline{G}}(\phi) \leq k^d \cdot p^{d\cdot r_0(A)} \cdot p^{(d-1)\cdot \hat{r}_0(\overline{G})} \leq k^d \cdot p^{dr}$$

e la conclusione. □

Dunque, nelle ipotesi del Teorema 3.1, il numero di Reidemeister di ϕ è $\{d, k, p, r\}$-limitato.

Dimostriamo il Teorema A del § 1 enunciandolo in una nuova forma.

TEOREMA 3.2. – *Sia G un gruppo con rango senza torsione finito r e dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p con $|C_G(\phi)| = k$. Se G è finitamente generato e risolubile con lunghezza derivata d, allora G ammette un sottogruppo normale, ϕ-invariante, nilpotente di classe $\{p\}$-limitata e di indice finito $\{d, k, p, r\}$-limitato.*

DIM. – Per il Teorema 3.1 $R_G(\phi)$ è finito e $\{d, k, p, r\}$-limitato. Per il Teorema 2.14 il gruppo G risulta virtualmente nilpotente e quindi, essendo finitamente generato, G è residualmente finito (si veda il Teorema 5.4.17 di [8]).

Poiché G è policiclico esso ha cardinalità numerabile e quindi esiste un insieme $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di sottogruppi normali ϕ-invarianti e di indice finito di G con $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i = \{1\}$ e tali che $N_i \leq N_j$ se $i \geq j$.

In ogni gruppo $\overline{G_i} = G/N_i$ per il Lemma 2.9.ii si ha $R_{\overline{G_i}}(\phi) \leq R_G(\phi)$. Per il Lemma 4 di [5] $C_{\overline{G_i}}(\phi)$ è finito di ordine $\{d, k, p, r\}$-limitato e quindi per il Teorema 2.13 esiste un sottogruppo $\overline{H_i}$ normale e ϕ-invariante di $\overline{G}$ di classe $\{p\}$-limitata e indice $\{d, k, p, r\}$-limitato.

Sia $\{H_i\}$ l'insieme delle controimmagini dei sottogruppi $\overline{H_i}$ in G, si tratta evidentemente di sottogruppi di indice finito di G ed anzi esiste un $t \in \mathbb{N}$ che è $\{d, k, p, r\}$-limitato tale che $|G : H_i| \leq t$. Siccome G è finitamente generato esso ammette solamente un numero finito di sottogruppi di indice minore o uguale a t e quindi esiste un sottoinsieme infinito I di $\mathbb{N}$ tale che $H_i = H_j$ per ogni $i, j \in I$. Posto $H = H_i$ $(i \in I)$ osserviamo che si ha $\bigcap_{i\in I} N_i = \{1\}$. Siccome HN_i/N_i è normale, ϕ-invariante, nilpotente di classe $\{p\}$-limitata e di indice $\{d, k, p, r\}$-limitato in G/N_i per ogni $i \in I$, si ricava facilmente che anche H deve avere le stesse proprietà come sottogruppo di G. □

OSSERVAZIONE 3.3. – Il Teorema 1.1 di [2] asserisce che se G è un gruppo policiclico dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p allora G ammette un sottogruppo normale, ϕ-invariante di indice finito N che è nilpotente di classe $\{p\}$-limitata. La tecnica utilizzata nella dimostrazione di tale teorema consiste nel determinare N in modo che l'automorfismo indotto da ϕ su N risulti p-spezzante; in questa maniera (come dimostreremo con l'Esempio 4.4) non è possibile limitare l'indice di N in funzione solamente di d, k, p e r (ove d è la lunghezza derivata di G, k l'ordine di $C_G(\phi)$ e r è il rango senza torsione di G).

LEMMA 3.4. – *Sia G un gruppo risolubile con rango senza torsione finito e dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p. Se $G^{(d)} = \{1\}$, $|C_G(\phi)| = k$ e $\widehat{r}_0(G) = r$ allora esiste un numero naturale $\{d, k, p, r\}$-limitato n tale che il sottogruppo G^n è nilpotente di classe $\{p\}$-limitata.*

DIM. – Per il Teorema 3.2 esistono un $n \in \mathbb{N}$ (limitato in funzione solamente di d, k, p e r) e un $c \in \mathbb{N}$ $\{p\}$-limitato tali che ogni sottogruppo finitamente generato H di G ammette un sottogruppo normale K nilpotente di classe al più c e con $|H : K| \leq n$. Da ciò discende che H^n risulta nilpotente di classe al più c e un facile argomento mostra che anche G^n deve essere nilpotente di classe al più c. □

TEOREMA 3.5. – *Sia G un* FAR-*gruppo dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p. Allora G ammette un sottogruppo normale, di indice finito, ϕ-invariante e nilpotente di classe $\{p\}$-limitata.*

DIM. – Infatti per il Lemma 3.4 esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che G^n è nilpotente di classe $\{p\}$-limitata. Dal fatto che G è un FAR-gruppo discende facilmente che $|G : G^n|$ è finito. □

Ricordiamo che la classe dei FAR-gruppi contiene propriamente quella dei gruppi risolubili minimax. Quindi il seguente risultato costituisce una generalizzazione del Teorema B enunciato nel § 1.

TEOREMA 3.6. – *Sia G un* FAR-*gruppo dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine primo p. Allora G ammette un sottogruppo N di indice finito, normale ϕ-invariante su cui ϕ è p-spezzante.*

DIM. – Per dimostrare l'asserto è sufficiente costruire un sottogruppo L di G che sia ϕ-invariante, di indice finito e su cui ϕ sia p-spezzante. Infatti nel prodotto semidiretto $G\langle\phi\rangle$ il gruppo $L_{G\langle\phi\rangle}$ è un sottogruppo normale e ϕ-invariante di G contenuto in L; per il teorema di Poincaré (1.3.12 di [8]), $L_{G\langle\phi\rangle}$ ha indice finito in $G\langle\phi\rangle$ e quindi, a maggior ragione, in G.

Per il Teorema 3.5 non è restrittivo supporre che G sia nilpotente. Sia

$\tau(G) = \bigoplus_{q\in\mathbb{P}} G_q$ il sottogruppo di torsione di G; poiché G_q ha rango finito in esso esiste un sottogruppo radicabile D_q con $D_q \le Z(G_q)$ e G_q/D_q finito. Sia π l'insieme dei divisori primi di $|C_G(\phi)|$ e sia $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; per ogni $q \in \mathbb{P}$ poniamo:

$$T_q = \begin{cases} D_q & \text{se } q \in \pi \\ G_q & \text{se } q \in \pi'. \end{cases}$$

Il gruppo $T = \bigoplus\limits_{q\in\mathbb{P}} T_q$ è un sottogruppo di indice finito di $\tau(G)$. Inoltre per ogni $q \in \pi$ il gruppo T_q è abeliano e radicabile e quindi, per il Lemma 2.10, se $q \neq p$ allora $C_{T_q}(\phi) = \{1\}$ e quindi $C_T(\phi)$ è un p-gruppo.

Dimostriamo che ϕ risulta p-spezzante su T; per far questo è sufficiente dimostrare che ϕ è p-spezzante su ogni T_q $(q \in \mathbb{P})$. Se $q \in \pi$ allora T_q è radicabile e l'asserto discende dal Lemma 2.10; se $q \in \pi'$ allora $C_{T_q}(\phi) = \{1\}$ e siccome T_q è localmente finito è facile verificare che ogni $g \in T_q$ si può esprimere nella forma $g = x^{-1}x^{\phi}$ con $x \in T_q$ opportuno da cui

$$gg^{\phi}\dots g^{\phi^{p-1}} = (x^{-1}x^{\phi})(x^{-1}x^{\phi})^{\phi}\dots(x^{-1}x^{\phi})^{\phi^{p-1}} = 1,$$

e quindi ϕ è p-spezzante su T_q.

Posto $\overline{G} = G/\tau(G)$, per costruzione $\overline{G}$ è un gruppo nilpotente e aperiodico e siccome, per ipotesi $\widehat{r}_0(\overline{G}) < \infty$, $\overline{G}$ è finitamente generato. Sia $\overline{G} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k \rangle$ e siano $x_1, x_2, \dots, x_k$ delle controimmagini di $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ in G. Posto $K = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle^{\langle\phi\rangle}$ è chiaro che K è un sottogruppo di G che risulta ϕ-invariante, nilpotente e finitamente generato. Siccome ϕ è quasi-regolare su K, per il Teorema 3.1 si deve avere $R_K(\phi) < \infty$. Essendo K finitamente generato esso è residualmente nilpotente e quindi, per il Lemma 4 di [5], esiste un sottogruppo H di indice finito in K su cui ϕ risulta p-spezzante.

Posto $L = TH$ è evidente che L è un sottogruppo ϕ-invariante di indice finito in G.

Per dimostrare che ϕ è p-spezzante su L poniamo $T_{p'} = \bigoplus\limits_{q\neq p} T_q$ e ragioniamo per induzione su c, il minimo numero naturale tale che $T_{p'} \le Z_c(L)$.

Se $c = 0$ allora $T_{p'} = \{1\}$ e ricordando che T_p è radicabile, dal Teorema 1.4.4 di [7] si ottiene $T = T_p \le Z(G)$. Ogni elemento di L si scrive nella forma $g = hz$ con $h \in H$ e $z \in T_p$ e quindi, siccome ϕ risulta p-spezzante sia su H che su T_p e $[H, T_p] = 1$ se ne ricava che

$$gg^{\phi}\dots g^{\phi^{p-1}} = hh^{\phi}\dots h^{\phi^{p-1}}zz^{\phi}\dots z^{\phi^{p-1}} = 1$$

e in questo caso l'asserto è dimostrato.

Sia $c > 0$ e sia $Z = Z(L) \cap T_{p'}$. Posto $\widetilde{L} = L/Z$ l'ipotesi induttiva porge che ϕ induce un automorfismo ϕ-spezzante su $\widetilde{L}$ e quindi per ogni $g \in G$ risulta

$$gg^{\phi}\dots g^{\phi^{p-1}} = \zeta_g$$

per un opportuno $\zeta_g \in Z$.

Siccome $\zeta_g \in Z(L)$ si ha che g commuta con $g^{\phi} g^{\phi^2} \dots g^{\phi^{p-1}}$ e quindi

$$(gg^{\phi} \dots g^{\phi^{p-1}})^{\phi} = g^{\phi} g^{\phi^2} \dots g^{\phi^{p-1}} g = gg^{\phi} \dots g^{\phi^{p-1}} \in C_L(\phi)$$

da cui $\zeta_g \in C_L(\phi) \cap T_{p'} = \{1\}$ e l'asserto è provato. □

OSSERVAZIONE 3.7. – Con le notazioni del Teorema 3.6, se d è la lunghezza derivata di N e se $p \neq 2$ allora, per il Teorema 2.15, la classe di nilpotenza di N è limitata da $\dfrac{(p-1)^d - 1}{p-2}$.

Il seguente risultato costituisce una generalizzazione del Teorema 1.1 di [1] e del Teorema C enunciato nel § 1.

TEOREMA 3.8. – *Sia G un* FAR-*gruppo dotato di un automorfismo quasi-regolare ϕ di ordine* 2. *Allora G ammette un sottogruppo normale ϕ-invariante di indice finito su cui ϕ induce l'inverisone. In particolare G è virtualmente abeliano.*

DIM. – Per il Teorema 3.6 esiste un sottogruppo normale ϕ-invariante N di indice finito in G su cui ϕ risulta 2-spezzante. L'Osservazione 2.16 porge che N è abeliano, il che conclude la dimostrazione. □

4. – Osservazioni ed esempi.

Se G è un gruppo finito e $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ è immediato provare che ϕ è regolare se e solo se la mappa

$$T_{\phi} : G \longrightarrow G \quad g \mapsto g^{-1} g^{\phi}$$

associata a ϕ è biiettiva.

In [9] Zappa, per estendere il concetto di automorfismo regolare a gruppi non necessariamente finiti, ha considerato gli automorfismi *uniformi* nel senso della seguente

DEFINIZIONE 4.1. – *Un automorfismo ϕ di un gruppo G si dice uniforme se la mappa T_{ϕ} associata a ϕ è suriettiva.*

OSSERVAZIONE 4.2. – Con la terminologia che abbiamo introdotto i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) l'automorfismo ϕ di G è uniforme;
(ii) $R_G(\phi) = 1$;
(iii) $G = [G, \phi]$.

In particolare se ϕ è uniforme, ogni elemento g di G si può scrivere nella forma $g = x^{-1}x^{\phi}$ con $x \in G$ opportuno e dunque se ϕ ha ordine n, allora ϕ risulta n-spezzante su G. Infatti

$$gg^{\phi} \dots g^{\phi^{n-1}} = x^{-1}x^{\phi}(x^{-1}x^{\phi})^{\phi} \dots (x^{-1}x^{\phi})^{\phi^{n-1}} = 1.$$

L'ipotesi che un automorfismo ϕ di ordine n sia uniforme su G è però assai più forte di quella che ϕ sia n-spezzante. Ad esempio Zappa ([9]) ha dimostrato che se un gruppo policiclico G ammette un automorfismo uniforme di ordine primo p allora G è necessariamente un p'-gruppo finito (e nilpotente). Tale risultato è stato generazizzato in [4] dove si è provato che ogni gruppo iperabeliano, finitamente generato G e dotato di un automorfismo uniforme di ordine p^k, potenza di un numero primo, è necessariamente un p'-gruppo finito (in questo caso, se $k > 1$, semplici esempi mostrano che non si può ottenere la nilpotenza di G). Quindi, seguendo il suggerimento di Zappa, invece di considerare automorfismi quasi-regolari è, in molte circostanze, conveniente considerare automorfismi con numero di Reidemeister finito.

In effetti tutti i risultati del §3 sono stati ottenuti come conseguenza del Teorema 3.1, ovvero grazie al fatto che se G è un gruppo risolubile con rango senza torsione finito allora

$$\phi \ \text{ quasi regolare su } G \Longrightarrow R_G(\phi) \ \text{ finito.}$$

È interessante osservare che l'implicazione inversa non vale, nemmeno se G è abeliano e $R_G(\phi) = 1$, come si vede nel seguente esempio.

ESEMPIO 4.3. – Sia $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di gruppi isomorfi a $C(2^\infty)$ e sia $G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Se ϕ è l'automorfismo che induce su G l'inversione è immediato verificare che $R_G(\phi) = 1$ ma, se $|\Lambda| = \infty$, allora $C_G(\phi)$ è abeliano elementare di ordine infinito.

Il prossimo esempio mostra che nel Teorema 3.5 non si può sostituire l'ipotesi che G sia un FAR-gruppo con quella, più debole, che G abbia rango senza torsione finito.

ESEMPIO 4.4. – Sia p un numero primo dispari e sia $P = \langle x, y \rangle$ il gruppo extraspeciale di ordine p^3 ed esponente p. In P si può definire un automorfismo a di ordine 2 ponendo $x^a = x^{-1}$ e $y^a = y^{-1}$; si verifica che $C_P(a) = Z(P)$.

(i) Sia G il prodotto centrale di n copie di P e sia ϕ l'automorfismo che agisce su ogni fattore di G come a. Si verifica facilmente che $|G| = p^{2n+1}$ e $C_G(\phi) = Z(G)$ ha ordine p inoltre $R_G(\phi) = p$. Sia $Z(G) = \langle z \rangle$; allora i p insiemi

$$\Gamma_i = \{g \in G \mid gg^{\phi} \dots g^{\phi^{p-1}} = z^i\} \quad \text{con} \quad i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

hanno tutti cardinalità p^{2n} ed anzi risulta $\mathscr{R}_G(\phi) = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}\}$. Questa costruzione dimostra che non esiste una limitazione all'indice di un sottogruppo ϕ-invariante di G sul quale ϕ è 2-spezzante.

(ii) Sia G il prodotto centrale di un numero infinito di copie di P e sia ϕ definito come nel punto (i). Chiaramente G è un gruppo periodico che non è un FAR-gruppo e risulta $|C_G(\phi)| = p$ e $R_G(\phi) = p$. Inoltre G non è residualmente finito in quanto il suo residuale finito (ovvero l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito) coincide con $Z(G)$.

Mostriamo che nel Teorema 3.1 l'ipotesi che G abbia rango senza torsione finito è essenziale per ottenere la tesi.

ESEMPIO 4.5 (Endimioni [1]). – Siano $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ due gruppi ciclici infiniti e sia $G = \langle b \rangle \wr \langle a \rangle$ il loro prodotto intrecciato. Il gruppo G è prodotto semidiretto di un gruppo normale $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \langle b_i \rangle$ (con $\langle b_i \rangle \simeq \langle b \rangle$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$) tramite $\langle a \rangle$, ove l'azione di a su N è data da $b_i^a = b_{i+1}$. Il gruppo G, essendo finitamente generato e metabeliano, è residualmente finito ed ovviamente risulta $\widehat{r}_0(G) = \infty$. Su G si definisce un automorfismo di ordine 2 ponendo $b_i^\phi = b_i^{-1}$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$ e $a^\phi = ab_0^{-1}$; è immediato verificare che $C_G(\phi) = \{1\}$ e che $R_G(\phi) = \infty$.

Osserviamo che

(i) su $G/N \simeq \langle a \rangle$ l'automorfismo ϕ induce l'identità;

(ii) posto $\overline{G} = G/N^2$, ϕ induce sul gruppo $\overline{N}$ (che ha esponente 2) l'identità;

(iii) sia $k \in \mathbb{N}$ e $d = 2k+1$. Posto $\overline{G} = G/N^d$ si verifica che $C_{\overline{G}}(\phi) = \langle \overline{a}\overline{b}_0^{-k} \rangle$.

I quozienti di G considerati nei punti (i), (ii) e (iii) sono gruppi con rango senza torsione finito, ma in ognuno di essi l'automorfismo indotto da ϕ non è quasi-regolare.

Il Teorema B di [5] asserisce che se un gruppo risolubile e finitamente generato G ammette un automorfismo di ordine primo ϕ con $R_G(\phi) < \infty$ allora G è virtualmente nilpotente. Alla luce dell'Osservazione 4.2 e dell'Esempio 4.5 appare naturale formulare la seguente

CONGETTURA 4.6. – *Sia G un gruppo risolubile dotato di un automorfismo ϕ quasi-regolare di ordine primo p. Se $R_G(\phi) < \infty$ allora G è virtualmente nilpotente.*

È anche possibile formulare una versione più forte della Congettura 4.6, omettendo l'ipotesi che l'automorfismo ϕ sia quasi-regolare.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ENDIMIONI, *On almost regular automorphisms.* Arch. Math. (Basel) **94** (2010), 19-27.

[2] G. ENDIMIONI, *Polycyclic group admitting an almost regular automorphism of prime order.* J. Algebra, **323** (2010), 3142-3146.

[3] B. HARTLEY - T. MEIXNER, *Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small.* Arch. Math. (Basel) **36** (1981), 211-213.

[4] E. JABARA, *Una nota sui gruppi dotati di un automorfismo uniforme di ordine potenza di un primo.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **84** (1990), 217-221.

[5] E. JABARA, *Automorphisms with finite Reidemeister number in residually finite groups.* J. Algebra, **320** (2008), 3671-3679.

[6] E. I. KHUKHRO, *Nilpotent groups and their automorphisms.* de Gruyter Expositions in Mathematics, **8**. Walter de Gruyter Co., Berlin (1993).

[7] J. C. LENNOX - D. J. S. ROBINSON, *The theory of infinite soluble groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2004).

[8] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups.* Second edition. GTM, **80**. Springer-Verlag, New York (1996).

[9] G. ZAPPA, *Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch.* Ricerche Mat., **7** (1958), 3-13.

Egle Bettio, Liceo Scientifico G. B. Benedetti,
Castello 2835 – 30122 Venezia
E-mail: egle.bettio@istruzione.it

Enrico Jabara, Dipartimento di Matematica Applicata,
Università di Ca' Foscari, San Giobbe, Cannaregio 873, 30121 Venezia
E-mail: jabara@unive.it

Received May 31, 2010 and in revised form December 7, 2010