Bollettino
Unione Matematica Italiana

F. Lazzeri

Piani e sfere osculatrici ad archi differenziabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **3** (2010), n.1, p. 111–124.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2010_9_3_1_111_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

Bollettino U. M. I.
(9) **III** (2010), 111-124

Piani e sfere osculatrici ad archi differenziabili

F. Lazzeri

Dedicated to the memory of Professor Aldo Andreotti on the 30th anniversary of his death

Abstract. – *The existence of osculating planes is established for a large class of differentiable arcs in* $\mathbb{R}^n$*, called "coherent"; all analytic arcs, including the singular ones, belong to this family. On a coherent arc, osculating planes and spheres exist at any point and vary differentiably; Frenet formulas and curvatures are reformulated in order to generalize the classical ones. Coherent arcs form an open set in the space of all arcs, with infinite codimensional complement.*

English title: **Osculating Planes and Spheres for Differentiable Arcs**

Introduzione.

Nello studio degli archi differenziabili in spazi euclidei, sono di grande interesse le formule di Frenet, assieme ai connessi concetti di piano e sfera osculatrice. Le ipotesi che si fanno per l'introduzione di tali oggetti sono abbastanza restrittive: nel caso di un arco nello spazio tridimensionale si suppone che le prime tre derivate siano linearmente indipendenti (veramente per costruire la terna di Frenet, è sufficiente la indipendenza lineare delle prime due derivate, individuando poi la terza direzione come quella ortogonale alle prime due). In questa nota mostriamo che tali ipotesi sono in gran parte superflue e che piani e sfere osculatrici per una classe molto ampia di archi differenziabili (che chiamiamo *coerenti*) non solo esistono ma hanno anche variazione differenziabile.

Nel seguito il termine *differenziabile* significherà differenziabile di classe C^∞. Una applicazione differenziabile $\gamma : \Omega \to V$ ove Ω è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e V è uno spazio vettoriale (reale) sarà chiamata *arco differenziabile* in V.

Anche la sua *velocità* $\dot{\gamma}(t) = \dfrac{d}{dt}(\gamma(t))$ e la sua *accelerazione* $\ddot{\gamma}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}(\gamma(t))$ saranno quindi archi differenziabili definiti su Ω. Se per $t_0 \in \Omega$ si ha $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, la retta di V avente parametrizzazione $t \mapsto t \cdot \dot{\gamma}(t_0) + \gamma(t_0)$ approssimerà (in un senso ovvio che comunque sarà precisato più avanti) la curva γ per t vicino a t_0. In certi casi (come ad esempio per la cuspide $\gamma(t) = (t^2, t^3)$), anche nei punti ove $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ si può scegliere tra le rette per $\gamma(t_0)$ una che approssima meglio di tutte le altre l'arco γ ed ottenere in ogni punto dell'arco una retta tangente variante con continuità.

Ciò non è però sempre possibile. Sia ad esempio $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile identicamente nulla su $]-\infty, 0]$ e con derivata positiva su $]0, +\infty[$ e si consideri l'arco $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$\gamma(t) = (\phi(t), 0) \quad \text{per } t \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma(t) = (0, \phi(-t)) \quad \text{per } t \leq 0$$

Tale γ è differenziabile ma cambia bruscamente direzione nell'origine: nessuna definizione sensata di retta tangente per $t = 0$ è evidentemente possibile.

In modo analogo, se la dimensione di V è almeno tre, si può cercare di scegliere in ogni punto dell'arco γ un piano che localmente lo approssima nel modo migliore; in ogni punto $t_0 \in \Omega$ in cui $\dot{\gamma}(t)$ e $\ddot{\gamma}(t)$ sono linearmente indipendenti tale piano è quello parametrizzato da:

$$\mathbb{R}^2 \ni (\lambda, \mu) \mapsto \gamma(t_0) + \lambda\dot{\gamma}(t_0) + \mu\ddot{\gamma}(t_0)$$

Nessuna tale scelta è in genere possibile nei punti ove velocità ed accelerazione sono linearmente dipendenti, anche se la velocità è non nulla. Ad esempio l'arco:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (t, \phi(t), \phi(-t))$$

ove ϕ è come sopra, è contenuto per t positivo nello spazio delle prime due coordinate e per t negativo nello spazio della prima e terza coordinata e quindi il piano approssimante l'arco cambia bruscamente passando per l'origine.

Si noti inoltre che quest'arco ha in ogni punto la derivata terza linearmente dipendente dalle prime due: ci si potrebbe attendere che un arco con tale proprietà debba giacere tutto su un piano ma ciò non accade.

Evidentemente queste patologie non possono presentarsi per archi analitici. L'analiticità è comunque una condizione molto restrittiva: se da un lato le curve analitiche sono un insieme denso in ogni topologia ragionevole sullo spazio delle curve differenziabili, esse non possono però costituire un insieme aperto.

Introdurremo una classe di archi differenziabili in $\mathbb{R}^n$ che si comportano bene (ad esempio nel senso che hanno piani approssimanti che variano in modo differenziabile) e che per una topologia ragionevole sullo spazio di tutte le curve differenziabili costituiscono non solo un aperto denso ma addirittura il complementare di un insieme di codimensione infinita.

Un richiamo sugli ordini di contatto.

Per fissare le notazioni che utilizzeremo in seguito, diamo un richiamo di alcune ben note equivalenze tra varie definizioni di ordine di contatto tra sottovarietà differenziabili di una data. Le dimostrazioni relative sono facilmente ottenibili tramite sviluppi di Taylor nella forma abitualmente utilizzata in argomentazioni geometriche: quelli in cui il resto è dato come un polinomio i cui coefficienti sono funzioni differenziabili (cfr. ad esempio il primo capitolo delle note di "Istituzioni di Geometria Superiore" www.dm.unipi.it/pages/lazzeri).

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si *annulla d'ordine* p in 0 se:

$$\lim_{x \to 0} f(x)/\|x\|^{p-1} = 0$$

È chiaro che tale nozione non dipende dal sistema di coordinate utilizzato in $\mathbb{R}^n$ e può quindi essere trasportata su una varietà differenziabile qualsiasi. Se f è differenziabile essa si annulla d'ordine p se e solo se il suo sviluppo di Taylor ha nulli tutti i termini di grado minore di p.

Siano X una varietà differenziabile e Γ, Δ due sottovarietà passanti per un punto $x_0 \in X$. Se p è un intero positivo diremo che Γ ha un *contatto d'ordine* (almeno) p con Δ in x_0 od anche che Γ *contiene* Δ in x_0 *all'ordine* p se per ogni funzione differenziabile f definita in un intorno di x_0 in X e la cui restrizione a Γ ha in x_0 uno zero d'ordine $p+1$, anche la restrizione di f a Δ ha in x_0 uno zero d'ordine $p+1$.

Le seguenti proprietà sono facilmente verificabili:

1. Se $\Gamma \supset \Delta$ allora Γ contiene Δ in ogni x_0 per qualsiasi ordine.
2. Γ contiene Δ d'ordine ≥ 1 in un punto x_0 se e solo se $T(\Gamma)_{x_0} \supset T(\Delta)_{x_0}$.

In particolare $dim(\Gamma) \geq dim(\Delta)$ se Γ contiene Δ di un ordine ≥ 1 in qualche punto.

3. Se Γ e Δ sono sottospazi affini in $\mathbb{R}^n$ ed esiste $x_0 \in \Gamma$ in cui Γ contiene Δ d'ordine ≥ 1, allora $\Gamma \supset \Delta$.

4. È evidente la proprietà transitiva della relazione di contenere all'ordine p sull'insieme di tutte le sottovarietà di X che passano per un punto x_0; tale relazione è anche simmetrica (ed è quindi una relazione di equivalenza) se ci restringiamo a sottovarietà della stessa dimensione (lo si verifichi rappresentandole localmente entrambi come grafici di applicazioni rispetto ad una stessa decomposizione di $\mathbb{R}^n$).

Se $dim\ \Gamma = dim\ \Delta$ ed una delle due contiene l'altra in x_0 di un ordine p, diremo allora che esse hanno un *contatto* d'ordine p in x_0.

5. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un diffeomorfismo tra Ω e una sottovarietà $X = \phi(\Omega)$ di $\mathbb{R}^N$. Per $t_0 \in \Omega$ e $p \in \mathbb{N}^+$, lo sviluppo di Taylor di ordine p di ϕ è una eguaglianza $\phi(t) = \phi^{(p)} + R$ ove $\phi^{(p)}$ è una applicazione polinomiale di grado p ed R verifica la condizione $\lim\limits_{t \to t_0} R(t)/(\|t - t_0\|)^p = 0$.

L'applicazione $\phi^{(p)}$ ha differenziale iniettivo in $t = t_0$, quindi la sua restrizione ad un intorno sufficientemente piccolo U di t_0, induce un diffeomorfismo tra U ed una sottovarietà $\tilde{X} = \phi(U)$ di $\mathbb{R}^N$. Allora X ed $\tilde{X}$ hanno in $x_0 = \phi(t_0)$ un contatto d'ordine p.

6. Siano Γ, Δ sottovarietà di X passanti per x_0 e sia $p \geq 1$ un intero. Allora Γ contiene Δ all'ordine p in x_0 se e solo se per ogni $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Delta$ differenziabile con $\sigma(0) = x_0$ ed ogni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile su un aperto Ω contenente x_0 e

tale che $f_{|\Gamma\cap\Omega} \equiv 0$, si ha che $f \circ \sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ si annulla in zero assieme alle prime p derivate.

7. Siano $\Delta \subset X$ una sottovarietà ed $x_0 \in \Delta$. Una funzione differenziabile su X all'intorno di x_0 è nulla d'ordine p su Δ in x_0 se e solo se è somma di una funzione identicamente nulla su Δ e di una che si annulla d'ordine p su X in x_0 (localmente si può supporre che $\Delta = \mathbb{R}^a \times \{0\} \subset \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$; ogni funzione $f(x, y)$ si può scrivere come $f(x, 0) + g(x, y) \cdot y$ quindi...).

Ne segue che una sottovarietà Δ contiene all'ordine p una sottovarietà Γ in un punto x_0 se e solo se ogni funzione differenziabile su X all'intorno di x_0 ed identicamente nulla su Δ, si annulla d'ordine $p+1$ su Γ in x_0.

8. In $\mathbb{R}^n$ una sottovarietà Γ ne contiene un'altra Δ all'ordine p in un punto x_0 se e solo se per $x \in \Delta$, la distanza da Γ è un infinitesimo di ordine superiore della potenza $p-$esima della distanza da x_0; ossia il rapporto $d(x, \Gamma)/d(x, x_0)^p$ va a zero per x che tende ad x_0 in Δ. (Utilizzando un intorno tubolare di Γ si esprima $d(x, \Gamma)$ nella forma $(g_1^2 + \cdots + g_r^2)^{1/2}$ ove le g_i sono differenziabili e identicamente nulle su Γ e si applichi il punto 7).

9. Una sottovarietà connessa e chiusa in $\mathbb{R}^n$ che abbia in ogni punto un contatto d'ordine almeno due con il proprio spazio tangente in tale punto è un sottospazio affine.

Le nozioni di contatto sopra richiamate si possono estendere al seguente contesto più generale: sia Γ una sottovarietà differenziabile di X ; una applicazione differenziabile $a : \Delta \to X$ è detta contenuta all'ordine p in Γ nel punto $x_0 \in \Delta$ se $a(x_0) = y_0 \in \Gamma$ e se per ogni funzione differenziabile f all'intorno di y_0 in X che sia nulla d'ordine p su Γ, la funzione $f \circ a$ è nulla d'ordine p in $x_0 \in \Delta$; si verifica facilmente che se a ha in x_0 differenziale iniettivo e definisce quindi un diffeomorfismo tra un qualche intorno di x_0 in Δ ed una sottovarietà Δ' di X, ciò accade se e solo se Δ' è contenuta all'ordine p in Γ.

Nel seguito esamineremo il caso che $a : \Delta \to X$ sia un arco differenziabile in uno spazio vettoriale X (di dimensione finita su $\mathbb{R}$). Se a è la parametrizzazione di una curva differenziabile Δ' (sostanzialmente: se a ha derivata prima non nulla) quel che costruiremo (sistemi di Frenet, piani e sfere osculatrici) non dipenderà dalla particolare parametrizzazione utilizzata. La situazione (per gli archi coerenti che introdurremo) non sarà molto diversa anche nel caso che a non sia un diffeomorfismo locale: se ad esempio a è analitica, gli oggetti geometrici costruiti dipenderanno solo dalla singolarità analitica di cui a è una parametrizzazione.

Archi coerenti e sistemi di Frenet.

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto ed $a : \Omega \to V$ un arco differenziabile in uno spazio vettoriale reale V. Per $t \in \Omega$ ed r intero positivo, consideriamo il sottospazio vettoriale $V_r(t)$ generato in V dalle prime r derivate $a^{(1)}(t), \dots, a^{(r)}(t)$ di a in t. L'unione $V(t) = \bigcup_{r \geq 1} V_r(t)$ sarà detto lo *spazio generato* da a in t.

Diremo *rango* di a in $t \in \Omega$ la dimensione di $V(t)$; il minimo di tali interi sarà detto il *rango* dell'arco. Un arco sarà detto *coerente* se la dimensione di $V(t)$ è un intero non dipendente da $t \in \Omega$ e coincide quindi col suo rango.

Ogni arco analitico a è coerente. Infatti sia $t_0 \in \Omega$ e sia $W(t_0)$ un supplementare di $V(t_0)$ in V. Si avrà $a(t) = (v(t), w(t))$ con $v(t)$, $w(t)$ archi analitici in $V(t_0)$ e $W(t_0)$ rispettivamente. Dalla definizione di $V(t_0)$ deriva che $w(t)$ ha tutte le derivate nulle in t_0 ed essendo analitico è quindi costante; in altri termini l'arco a è contenuto in un translato di $V(t_0)$. Se ne deduce che per $t_1 \in \Omega$ qualsiasi si avrà $V(t_1) \subset V(t_0)$; siccome per simmetria si avrà anche $V(t_0) \subset V(t_1)$ se ne deduce che non solo un arco analitico è coerente, ma il suo rango è la dimensione del minimo sottospazio affine di V che lo contiene. Vedremo più avanti che gli archi coerenti si comportano nello stesso modo.

L'arco $(t, \phi(t), \phi(-t))$ descritto nel paragrafo 1. non è coerente: la dimensione di $V(t)$ è sempre 2 salvo che nell'origine ove è 1.

La condizione di essere coerente è fortemente generica nel senso che in ogni topologia "ragionevole" su uno spazio di archi, non solo quelli coerenti di rango uguale alla dimensione di V costituiscono un aperto denso ma per di più quelli che non lo sono costituiscono un sottoinsieme di *codimensione infinita*; ossia vicino ad ogni famiglia di archi il cui spazio dei parametri sia un compatto di dimensione finita, ve ne è una fatta tutta di archi coerenti.

Siano Ω un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \to V$ un arco nello spazio vettoriale V. Se p è un intero positivo e $t \in \Omega$, chiameremo *sistema di Frenet* di ordine p per f in t, ogni successione $V_1(t) \subset \dots \subset V_p(t)$ di sottospazi vettoriali di V tali che per $p \geq r \geq 1$, il sottospazio $V_r(t)$ abbia dimensione r e contatto di ordine r con l'arco nel punto $f(t)$; quest'ultima condizione equivale alla seguente: V_r contiene $f^{(1)}(t), \dots, f^{(r)}(t)$. Quindi se in t le prime r derivate di f sono linearmente indipendenti, V_r non può che essere lo spazio generato da esse. Ma se in t tali derivate sono linearmente dipendenti, si avranno infiniti sistemi di Frenet possibili. Mostriamo ora che se f ha rango almeno p esiste un modo naturale per selezionare in ogni caso un sistema di Frenet $F_1(t), \dots, F_p(t)$ che chiameremo *osculatore*; precisamente indicando come prima con $V_r(t)$ il sottospazio di V generato dalle prime r derivate di f, scegliamo $F_1(t)$ come il primo dei V_i che non sia nullo, con $F_2(t)$ il primo dei $V_i(t)$ che sia diverso da $F_1(t)$ e così via sino ad $F_p(t)$. Equivalentemente per $1 \leq r \leq p$ scegliamo come $F_r(t)$ il sottospazio di V di dimensione r che ha massimo contatto possibile con l'arco nel punto $f(t)$.

Vogliamo ora studiare con quale regolarità dipendono da $t \in \Omega$ i sottospazi $F_r(t)$; evidentemente essi appartengono alla grassmaniana dei sottospazi di V aventi dimensione r che è una varietà differenziabile che indicheremo con $\mathcal{G}(r, V)$. Ricordiamo che una applicazione σ di una varietà differenziabile T in $\mathcal{G}(r, V)$ è differenziabile se e solo se per ogni punto $t_0 \in T$ esistono un suo intorno U ed r applicazioni differenziabili $v_1, \dots v_r : U \to V$ i cui valori in ogni $t \in U$ diano una base di $\sigma(t)$. Lo strumento base per questo studio sarà il seguente lemma ispirato alla cosiddetta *regola* di de l'Hôpital.

Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\pi : W - \{0\} \to \mathbb{P}(W)$ l'applicazione che ad ogni vettore non nullo di W associa il sottospazio da esso generato in W. Se $F : \Omega \to W$ è una applicazione differenziabile da un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ contenente l'origine in W, indicheremo con $\hat{F} : \Omega - F^{-1}(0) \to \mathbb{P}(W)$ l'applicazione ottenuta componendo la F con π.

LEMMA 1 [Regola di de l'Hôpital]. – *Supponiamo che* $F(0) = F^{(1)}(0) = \cdots = F^{(q-1)}(0) = 0$ *e che* $F^{(q)}(0) \neq 0$*; allora* 0 *è isolato in* $F^{-1}(0)$ *e definendo* $\hat{F}(0)$ *come il punto di* $\mathbb{P}(W)$ *individuato da* $F^{(q)}(0)$*, si ottiene una estensione differenziabile di* $\hat{F}$ *ad un intorno di* 0.

DIMOSTRAZIONE. – Lo sviluppo di Taylor di F dà una eguaglianza $F(t) = \dfrac{t^q}{q!} \cdot G(t)$ con $G : \Omega \to V$ differenziabile e $G(0) = F^{(p)}(0) \neq 0$.

In un intorno U di $0 \in \Omega$ si avrà $G \neq 0$ e quindi F non si annulla su $U - \{0\}$. Inoltre essendo F e G proporzionali, esse inducono la stessa applicazione di $U - \{0\}$ in $\mathbb{P}(V)$. L'estensione di $\hat{F}$ a tutto U è così l'applicazione $\hat{G}$ la quale in 0 assume proprio il valore dichiarato nell'enunciato. $\square$

TEOREMA 2. – *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto ed* $f : \Omega \to V$ *differenziabile di rango almeno* p*. Allora l'insieme* Δ *dei* $t \in \Omega$ *tali che* $(f^{(1)}(t), \dots, f^{(p)}(t))$ *non sono linearmente indipendenti è costituito da punti isolati. Inoltre l'applicazione che associa a* $t \in \Omega$ *il sottospazio* $F_p(t)$ *è una applicazione differenziabile di* Ω *nella grassmaniana* $\mathcal{G}(p, V)$.

DIMOSTRAZIONE. – La questione è di natura locale ed esamineremo quindi cosa succede all'intorno di $0 \in \Omega$. Intendiamo utilizzare il lemma precedente per l'applicazione $F : \Omega \to \bigwedge^p V = W$ definita da $F(t) = f^{(1)}(t) \wedge \cdots \wedge f^{(p)}(t)$: dobbiamo quindi mostrare che esiste qualche derivata $F^{(q)}(0) \neq 0$. Per $1 \leq r \leq p$ sia v_r il primo intero n per il quale i sottospazi $V_r(0)$ e $F_r(0)$ coincidono; in altri termini v_r è definito induttivamente come il minimo intero n tale che $f^{(n)}(0)$ sia linearmente indipendente da $f^{(v_1)}(0), \dots, f^{(v_{r-1})}(0)$. La prima derivata non nulla di F è allora la q–esima ove $q = \sum_1^p (v_i - i)$ ed essa vale un multiplo intero positivo m di $f^{(v_1)} \wedge \cdots \wedge f^{(v_p)}(0)$ (tale m rappresenta la cardinalità delle "geodetiche" da $(1, \dots, p)$ a $(v_1, \dots, v_p)$ nel grafo indotto su $\mathbb{Z}^p$ dal semiordinamento prodotto degli ordinamenti sui fattori). $\square$

COROLLARIO 3. – *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto ed* $f : \Omega \to V$ *un arco coerente di rango* r. *Allora l'immagine di* f *è contenuta in un sottospazio vettoriale* $W \subset V$ *di dimensione* r.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\Delta \subset \Omega$ l'insieme dei punti t in cui qualche $F_i(t)$ è diverso da $V_i(t)$; per il teorema precedente esso è discreto in Ω. Essendo le $f^{(i)}(t)$ per $t \in \Omega - \Delta$ ed $1 \leq i \leq r$ linearmente indipendenti, esistono $a_1, \ldots a_r : \Omega - \Delta \to \mathbb{R}$ differenziabili tali che:

$$f^{(r+1)}(t) = \sum_1^r a_i(t) \cdot f^{(i)}(t)$$

Se $h : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, la funzione $\phi = h \circ f$ soddisfa quindi l'equazione differenziale lineare:

$$\phi^{(r+1)}(t) = \sum_1^r a_i(t) \cdot \phi^{(i)}(t)$$

Fissato t_0 in $\Omega - \Delta$ per ogni funzionale h nullo sulle $f^{(i)}(t_0)$ per $1 \leq i \leq r$, la funzione $h \circ f$ coincide in conseguenza del teorema di unicità per le soluzioni di equazioni differenziali lineari, con la funzione costante $h(f(t_0))$ su tutta la componente connessa di $\Omega - \Delta$ che contiene t_0. Si è così ottenuto che per ogni componente connessa J di $\Omega - \Delta$ l'immagine di f è contenuta in un sottospazio vettoriale W_J di V di dimensione r; essendo $W_J = F_r(t)$ per ogni $t \in J$ ed essendo per il precedente teorema F_r definito e continuo su tutto Ω si ottiene che tutti i W_J coincidono con un W contenente tutta l'immagine di f. □

COROLLARIO 4. – *Sia* a *un arco differenziabile per il quale l'insieme dei punti in cui la derivata* p*–esima è combinazione lineare delle precedenti non è discreto. Se l'arco è coerente esso giace necessariamente in uno spazio affine di dimensione* $p - 1$.

DIMOSTRAZIONE. – Per il corollario precedente basta mostrare che a non può avere rango maggiore di $p - 1$; ciò segue dal precedente teorema. □

Formule di Frenet.

Sia $f : \Omega \to V$ un arco differenziabile di rango almeno p in uno spazio V su cui sia stato fissato un prodotto scalare definito positivo $\langle \, , \rangle$. Come abbiamo visto sopra un tale arco possiede un unico sistema di Frenet d'ordine p che vari differenziabilmente; sia esso costituito dagli spazi vettoriali $V_1(t) \subset \ldots \subset V_p(t) \subset V$.

Chiameremo *riferimento di Frenet* di ordine p per f la scelta di p funzioni differenziabili $e_1, \dots, e_p : \Omega \to V$ tali che per $t \in \Omega$ ed $1 \leq h \leq p$ il sistema $(e_1(t), \dots, e_h(t))$ sia una base ortonormale di $V_h(t)$. Utilizzando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si dimostra facilmente l'esistenza di un tale riferimento ed è anche ovvio che esso è univocamente determinato a meno di cambiamenti di segno.

Sia Δ l'insieme dei punti di Ω in cui le derivate $f^{(1)}(t), \dots, f^{(p)}(t)$ sono linearmente dipendenti; abbiamo visto che essendo f di rango almeno p tale insieme è discreto in Ω. Per $t \in \Omega - \Delta$ i vettori $f^{(1)}(t), \dots, f^{(h)}(t)$ costituiscono una base di $V_h(t)$. Se ne deduce che per tali t la derivata $\dot{e}_h(t)$ appartiene allo spazio $V_{h+1}(t)$; per continuità ciò sarà valido anche per $t \in \Delta$. Per ogni $1 \leq i \leq p$ si avrà quindi:

$$\dot{e}_i(t) = k_{i1}(t)e_1(t) + \cdots + k_{ii+1}(t)e_{i+1}(t)$$

ove le $k_{rs} : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili.

Ponendo $k_{ij}(t) = 0$ per $j > i + 1$ si ottiene una matrice $\boldsymbol{K}(t)$ e la relazione precedente può essere scritta:

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{K}(t) \cdot \boldsymbol{e}(t)$$

ove $\boldsymbol{e}(t)$ indica il vettore colonna di componenti $e_1(t), \dots, e_p(t)$.

Osservando ora che per ogni i, j il prodotto scalare $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle$ è costante ed ha quindi derivata nulla si ottiene $\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), \dot{e}_j(t) \rangle = 0$. Se ne deduce che la matrice $\boldsymbol{K}$ è antisimmetrica ed essendo anche $k_{ij} = 0$ per $j > i + 1$ si ottiene che gli unici elementi non nulli della matrice $\boldsymbol{K}$ sono i $k_{i\,i+1} = -k_{i+1\,i} = k_i$ per $i = 1, \dots, p - 1$, quantità che vengono dette le *curvature* di f.

La relazione $\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{K}(t) \cdot \boldsymbol{e}(t)$ equivale quindi alle seguenti relazioni:

$$\dot{e}_1 = k_1 \cdot e_2, \quad \dots \quad, \dot{e}_i = -k_{i-1} \cdot e_{i-1} + k_i \cdot e_{i+1}, \quad \dots, \dot{e}_p = -k_{p-1} \cdot e_{p-1}$$

che sono le usuali formule di Frenet.

Nota.

Per come sono state definite, le curvature dipendono dalla parametrizzazione: passando dal parametro t ad un altro s esse vengono moltiplicate per $\dfrac{dt}{ds}$. Per parlare di curvature assolute, si può convenire di scegliere quelle che si ottengono con una parametrizzazione per arco lunghezza relativa ad una fissata orientazione dell'arco; ciò però funziona solo per le curve che hanno tali parametrizzazioni, in generale quelle prive di singolarità. Ad esempio per la cuspide ordinaria $t \mapsto (t^2, t^3)$ tale curvatura assoluta va all'infinito quando t si avvicina a zero.

Probabilmente, una corretta definizione di curvatura assoluta per un arco coerente $x(t)$ di rango p è quella ottenuta nel modo seguente.

Sia $e_1(t)$ il primo elemento di un riferimento di Frenet dell'arco; per ogni t la derivata $\dot{x}(t)$ è un multiplo di $e_1(t)$ e si ha quindi $\dot{x}(t) = a(t) \cdot e_1(t)$. La funzione $a(t)$ risulta essere differenziabile: infatti essa coincide col quoziente tra $x_i(t)$ e la i-esima coordinata di $e_1(t)$ nei punti ove questa è non nulla; inoltre tale a può avere solo zeri di molteplicità finita (altrimenti $x(t)$ avrebbe nulle tutte le derivate).

Ne segue che associando ad un t in cui $a(t) \neq 0$ (ossia dove l'arco ha derivata non nulla) il punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{p-1}$ avente come coordinate omogenee $K'(t) = (a(t), k_1(t), \ldots, k_{p-1}(t))$, si ottiene in effetti (ancora per la regola di de l'Hôpital) una applicazione differenziabile ovunque definita che proporremmo di chiamare *curvatura assoluta* dell'arco.

Si noti che nei punti in cui l'arco ha derivata non nulla (ma generalmente anche in altri) la "curvatura" $K'(t)$ ha prima coordinata non nulla e ponendo questa uguale ad 1, le restanti coordinate danno le curvature classiche.

La varietà delle sfere generalizzate.

I sistemi di Frenet sono costituiti dai sottospazi lineari *osculatori* all'arco ossia quelli che meglio lo approssimano. Precisamente abbiamo visto che per un arco coerente (di rango almeno p), il piano osculatore di dimensione p è quello (unico) che fra tutti i sottospazi di dimensione p ha il contatto più alto con esso.

Seguiremo adesso la stessa procedura sostituendo ai $p-$piani le $p-$sfere e cercando quelle che meglio approssimano l'arco. Nell'attuazione di questo programma non si incontrano problemi se nel punto dell'arco che consideriamo le prime p derivate sono linearmente indipendenti; ma avvicinandoci ad un punto in cui tali derivate divengano dipendenti, la $p-$sfera osculatrice può divenire sempre più grande degenerando quando si arriva nel punto ad un $p-$piano. Ad esempio per un arco piano passando per un flesso, il cerchio osculatore (che viene detto *cerchio di curvatura*) diviene la retta tangente passando da un lato dell'arco all'opposto per rimanere sempre dalla parte in cui questo presenta la sua concavità. Lo stesso avviene per l'arco $t \mapsto (t^2, t^5)$ il cui cerchio osculatore degenera in una retta avvicinandosi al punto $t = 0$; in questi casi potremo dire che l'arco ha "curvatura zero". Invece per l'arco $t \mapsto (t^2, t^4 + t^5)$ quando ci si avvicina a $t = 0$ il cerchio osculatore tende al cerchio di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ e mantiene quindi una curvatura finita non nulla anche nel punto singolare. Ma è anche possibile la degenerazione in un cerchio di raggio zero; ciò accade ad esempio per la cuspide standard $t \mapsto (t^2, t^3)$, che ha quindi "curvatura infinita" nell'origine.

Questi esempi suggeriscono di aggiungere alla famiglia delle $p-$sfere i $p-$piani affini e analogamente completare lo spazio anche con le degenerazioni ottenute dalle $p-$sfere quando il raggio tende a zero. Vedremo adesso che la totalità di questi oggetti è dotata di una struttura naturale di varietà differenziabile.

Sia quindi V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n su cui sia stato fissato un prodotto scalare definito positivo $\langle\,,\rangle$.

Consideriamo $\mathbb{S} = \{(x,t) \in V \oplus \mathbb{R} : \|x\|^2 + t^2 = 1\}$ e $N = (0,1) \in \mathbb{S}$.

La *proiezione stereografica* di $\mathbb{S}$ da N è l'applicazione $\phi : \mathbb{S} - \{N\} \to V$ definita da $\phi((y,t)) = y/(1-t)$; essa è biunivoca anzi è un diffeomorfismo con inversa $\psi : V \to \mathbb{S} - \{N\}$ definita da:

$$\psi(x) = \left(\frac{2x}{\|x\|^2 + 1}\ ,\ \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right)$$

Una sfera T (di codimensione uno) in $\mathbb{S}$ è data dall'intersezione di $\mathbb{S}$ con un iperpiano affine $H \subset V \oplus \mathbb{R}$ avente distanza inferiore ad uno dall'origine.

Tale H è univocamente determinato da T ed avrà una equazione:

$$H = \{(x,t) \in V \oplus \mathbb{R} : \lambda t + \langle a, x\rangle = \mu\}$$

ove $(\lambda, a, \mu) \in \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V \oplus \mathbb{R})$ verifica $(\lambda, a) \neq 0$. La sua distanza d dall'origine si calcola determinando l'intersezione di H con la retta che congiunge in $V \oplus \mathbb{R}$ l'origine col punto (a, λ). Si ottiene:

$$d^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \|a\|^2}$$

L'immagine di $T - \{N\}$ in V tramite la proiezione stereografica, si determina utilizzando l'applicazione ψ e si trova:

$$\phi(T - \{N\}) = \{x \in V : 2\langle a, x\rangle + \lambda(\|x\|^2 - 1) = \mu(\|x\|^2 + 1)\}$$

Si noti che T passa per N se e solo se $\lambda = \mu$; se ciò accade l'equazione precedente diviene $\langle a, x\rangle = \lambda$ e si ha quindi un iperpiano affine in V; altrimenti $\lambda - \mu \neq 0$ e l'equazione diviene:

$$\left\{x \in V : \|x\|^2 + 2\left\langle \frac{a}{\lambda - \mu}, x\right\rangle = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right\}$$

che rappresenta l'equazione della sfera in V di centro $C = a/(\mu - \lambda)$ e raggio:

$$\sqrt{\frac{\|a\|^2 + \lambda^2 - \mu^2}{(\lambda^2 - \mu^2)}}$$

Si identificano in questo modo l'insieme delle sfere (di codimensione uno) di $\mathbb{S}$ con l'insieme delle sfere ed iperpiani in V ed entrambi con l'aperto dei $(\lambda, a, \mu) \in \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V \oplus \mathbb{R})$ tali che $\mu^2 < \lambda^2 + \|a\|^2$.

Consideriamo ora le sfere in $\mathbb{S}$ di dimensione $p$con $n - 1 > p \geq 1$. Esse coincidono con le intersezioni di $\mathbb{S}$ con sottospazi affini H di dimensione $p + 1$ aventi distanza dall'origine minore di uno in $V \oplus \mathbb{R}$; tali sfere sono così identificate ai punti di un aperto della grassmanniana dei $p + 1$ piani affini in $V \oplus \mathbb{R}$.

Per capire cosa divengono tali sfere se trasformate in V tramite la proiezione stereografica, si rappresenti il sottospazio affine H come intersezione di iperpiani in $V \oplus \mathbb{R}$; allora la trasformata di $H \cap \mathbb{S}$ viene rappresentata come intersezione di sfere ed iperpiani che sarà una sfera di dimensione p in V o un sottospazio affine di dimensione p secondo che N stia o no nella sfera di partenza.

In questo modo dato uno spazio vettoriale V di dimensione n su $\mathbb{R}$ su cui sia fissato un prodotto scalare definito positivo e fissato un intero p tra 1 ed $n-1$, l'insieme delle sfere di dimensione p in V unito all'insieme dei sottospazi affini di dimensione p in V viene identificato ad un aperto connesso della grassmaniana dei sottospazi affini di dimensione $p+1$ in $V \oplus \mathbb{R}$.

Dobbiamo ora aggiungere le possibili degenerazioni di $p-$sfere al tendere a zero del raggio. Per semplicità restringiamo le considerazioni alle $p-$sfere passanti per l'origine; in effetti le sfere che prenderemo in considerazione, così come gli spazi tangenti a varietà differenziabili in V, posseggono un punto speciale: quello in cui approssimano l'arco. L'insieme costituito dalle $p-$sfere passanti per l'origine di V e dai $p-$piani affini pure passanti per l'origine (ossia i sottospazi vettoriali di dimensione p in V), nella interpretazione data prima in termini della grassmaniana, corrisponde all'insieme dei $(p+1)-$piani affini in $V \oplus \mathbb{R}$ passanti per il "polo sud" $S = (0, -1)$ che non sono contenuti nello spazio tangente H ad $\mathbb{S}$ in tal punto; i sottospazi $K \subset H$ di dimensione $p+1$ possono invece essere interpretati come $p-$sfere passanti per l'origine di V che hanno raggio zero ma che "conservano" come giacitura K (o meglio il suo translato nell'origine). In questo modo, l'insieme delle $p-$sfere passanti per l'origine in V, più i sottospazi vettoriali di dimensione p (pensati come sfere di raggio infinito), più i sottospazi vettoriali di dimensione $p+1$ (pensati come $p-$sfere di raggio zero aventi tale giacitura) corrispondono biunivocamente alla grassmaniana dei sottospazi di dimensione $p+1$ in $V \oplus \mathbb{R}$ ed in tal modo sono dotati di una struttura di varietà differenziabile compatta che indicheremo con $\mathcal{S}_p(V)$; i suoi elementi saranno chiamati *$p-$sfere generalizzate* di V.

Sfere osculatrici.

Sia ancora V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle\, , \rangle$ e sia $f : \Omega \to V$ un arco differenziabile. Una applicazione $\sigma : \Omega \to \mathcal{S}_p(V)$ viene detta *osculatrice* all'arco f se è differenziabile e se per ogni $t \in \Omega$ la $p-$sfera $\sigma(t)$ ha nel punto $f(t)$ un contatto di ordine almeno $p+1$ con l'arco f.

Mostreremo che una tale applicazione esiste ed è univocamente determinata per ogni arco coerente di rango almeno $p+1$. Anche questo risultato seguirà da un lemma ispirato alla regola di de l'Hôpital che analizza la dipendenza dello spazio delle soluzioni per un sistema lineare omogeneo di n equazioni in $n+p$ incognite che dipende differenziabilmente da un parametro variante in un intorno U di $0 \in \mathbb{R}$ assicurando regolarità se tale sistema ha almeno un minore d'ordine massimo che non ha tutte le derivate nulle in 0.

Precisamente sia $A : U \to \{$matrici a n righe ed $n+p$ colonne$\}$ una applicazione differenziabile definita in un intorno aperto U di $0 \in \mathbb{R}$. Per $t \in U$ sia

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n+p} \ : \ A(t) \cdot x = 0\}$$

il nucleo della applicazione lineare associata alla matrice $A(t)$. Nell'anello $\mathcal{E}$ dei germi di funzioni differenziabili in $0 \in \mathbb{R}$ siano $\mathfrak{m}_\infty$ l'ideale dei germi con sviluppo di Taylor nullo e J quello generato dai minori di ordine n della matrice $A(t)$.

LEMMA 5. – *Se J non è contenuto in $\mathfrak{m}_\infty$, esiste un intorno U' di $0 \in \mathbb{R}$ tale che l'applicazione $U' - \{0\} \ni t \mapsto K(t)$ assume valori nella grassmaniana $\mathcal{G}_p(n+p)$ dei sottospazi di dimensione p di $\mathbb{R}^{n+p}$ ed ha una estensione differenziabile a tutto U'.*

DIMOSTRAZIONE. – La dimostrazione consiste essenzialmente nel seguire il metodo di Gauss. Siano $r_1(t), \dots, r_n(t)$ le righe di $A(t)$. Gli ideali di $\mathcal{E}$ che non sono contenuti in $\mathfrak{m}_\infty$ sono quelli generati da una qualche potenza di t. Ne segue che ognuna delle $r_i(t)$ deve potersi scrivere come prodotto di una potenza di t^{q_i} per una $b_i(t)$ differenziabile con $b_i(0) \neq 0$; a meno di cambiare l'ordine delle equazioni, possiamo supporre che q_1 sia minimo tra i vari $q_1, \dots, q_{n+p}$. Cambiando eventualmente anche l'ordine delle incognite, possiamo supporre che la prima coordinata di r_1 divisa per t^{q_1} sia non nulla per $t = 0$. Il sistema associato alla matrice in cui la prima riga r_1 di A è stata sostituita con $b_1(t)$ avrà per $t \neq 0$ le medesime soluzioni del precedente. Aggiungendo poi alle altre equazioni opportuni multipli della prima, possiamo eliminare in quelle la prima incognita. Questo è il primo passo del metodo di Gauss, per cui siamo ridotti al caso che la matrice $A(t)$ abbia la prima coordinata della prima riga invertibile in $\mathcal{E}$ e la prima coordinata identicamente nulla in tutte le altre righe. Il metodo prosegue considerando la matrice ottenuta da $A(t)$ eliminando prima riga e prima colonna, ed applicando nuovamente la procedura ora seguita. Alla fine avremo ottenuto un sistema che per $t \neq 0$ ha le medesime soluzioni di quello di partenza, che per $t = 0$ ha tutti gli elementi della diagonale principale invertibili e che ha identicamente nulli tutti quelli sottostanti; per un tale sistema l'enunciato del lemma è ovvio. □

Veniamo adesso all'esistenza di $p-$sfere osculatrici per un arco coerente di rango almeno $p+1$. Le equazioni per una $p-$sfera passante per un $v \in V$ sono

$$\lambda\langle X - v, X - v\rangle + \langle A, X - v\rangle = 0$$

e

$$\langle b_i, X - v\rangle = 0 \quad per \quad i = 1, \dots, n-p-1$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in V$ e $b_1, \ldots, b_{n-p-1} \in V$. Si richiede che le b_i siano linearmente indipendenti, di modo che il loro ortogonale abbia dimensione $p+1$, che λ e A non siano contemporaneamente nulli e che A sia combinazione lineare delle b_i; in tal caso se $\lambda = 0$ si ha un $p-$piano affine, se $A = 0$ si ha una sfera di raggio zero ed in tutti gli altri casi si ha una genuina $p - sfera$. Le condizioni che tale sfera generalizzata abbia contatto d'ordine $p+1$ con l'arco $\Omega \ni t \mapsto x(t)$ in un punto $x(s)$ per un $s \in \Omega$ si ottengono annullando per $t = s$ le prime $p+1$ derivate delle funzioni:

$$\lambda\langle x(t) - x(s), x(t) - x(s)\rangle + \langle A, x(t) - x(s)\rangle$$

e

$$\langle b_i, x(t) - x(s)\rangle \quad i = 1, \ldots, n-p-1$$

Le seconde danno $\langle b_i, x^{(j)}(s)\rangle = 0$ per $j = 1, \ldots, p+1$ ed $i = 1, \ldots, n-p-1$; quindi se le prime $p+1$ derivate dell'arco in s sono linearmente indipendenti significa che le b_i devono essere una base dell'ortogonale al $p+1-$piano osculatore.

Le derivate della prima, calcolate per $t = s$ sono del tipo

$$(*) \qquad \langle A, x^{(j)}(s) > +\lambda c_j(s)\rangle \qquad j = 1, \ldots, p+1$$

Nei punti s nei quali le prime $p+1$ derivate dell'arco sono linearmente indipendenti, il vettore A (che deve essere ortogonale alle b_i e quindi essere combinazione lineare di tali derivate perché esse generano il $(p+1)-$piano osculatore) è univocamente determinato dal sistema ottenuto anullando le $(*)$; quindi in tali punti s la $p-$sfera osculatrice esiste, ha per giacitura il $p+1-$piano osculatore ed è (localmente) funzione differenziabile di s.

Sia ora $s \in \Omega$ un punto qualsiasi. L'ipotesi che l'arco sia coerente di rango almeno $p+1$ assicura che il sistema lineare cui devono soddisfare le b_i verifica le ipotesi del lemma precedente.

L'annullarsi delle $(*)$ può poi essere interpretato come un sistema lineare omogeneo in λ e nei coefficienti che esprimano A come combinazione lineare delle prime $(p+1)-$derivate dell'arco; anche questo sistema verifica le ipotesi del lemma precedente: infatti i minori della matrice relativa alle incognite diverse da λ sono le componenti di $x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(p+1)}$ che abbiamo già considerato nella dimostrazione del teorema 2. Si è così ottenuto il

TEOREMA 6. – *Per ogni arco $\Omega \ni t \mapsto x(t) \in V$ coerente di rango almeno $p+1$ con Ω un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo, esiste una ed una sola applicazione differenziabile $o_p : \Omega \to \mathcal{S}_p(V)$ in cui per ogni $s \in \Omega$ la $p-$sfera $o_p(s)$ ha un contatto d'ordine almeno $p+1$ con l'arco dato nel punto $x(s)$.*

Osservazioni

1. In un punto dell'arco in cui la derivata prima non si annulla, la $p-$sfera osculatrice può degenerare in uno spazio affine ma non in una sfera di raggio zero: infatti la seconda delle $(*)$ è :

$$\lambda\|x^{(1)}\|^2 + \langle A, x^{(2)} \rangle$$

ed il suo annullarsi, se $x^{(1)} \neq 0$, assicura che $A \neq 0$.

2. Per un arco chiuso, ossia parametrizzato dalla circonferenza S^1 la famiglia delle sfere osculatrici esiste globalmente, così come quella dei sistemi di Frenet. Lo stesso non accade per i riferimenti di Frenet , se la dimensione di V è almeno 3. Ad esempio per un arco in $\mathbb{R}^3$ se il numero delle volte (contato con le opportune molteplicità) che la derivata seconda si allinea con la prima è dispari, il secondo elemento del sistema di Frenet dopo un giro ritorna col segno cambiato. Ciò equivale anche al fatto che la superficie descritta da un piccolo segmento che si muove centrato nei punti dell'arco e che ha la direzione del terzo elemento del sistema di Frenet (superficie per la quale l'arco è una geodetica) sia non orientabile.

Per un arco generico invece si ha l'esistenza globale anche dei sistemi di Frenet (le derivate sono infatti linearmente indipendenti in ogni punto); si può anche osservare che in tal caso l'indice di allacciamento dell'arco con un suo piccolo translato lungo la derivata seconda sarà nullo.

Dipartimento di Matematica L. Tonelli, Università di Pisa
Largo Bruno Pontecorvo, 5 - 56127 Pisa
e-mail: lazzeri@dm.unipi.it

Received September 16, 2009 and in revised form December 10, 2009