Daniel Barlet

Périodes évanescentes et (a,b)-modules monogènes

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **2** (2009), n.3, p. 651–697.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2009_9_2_3_651_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

Bollettino U. M. I.
(9) **II** (2009), 651-697

Périodes évanescentes et (a,b)-modules monogènes

Daniel Barlet

Je suis un des nombreux mathématiciens qui ont été profondément influencés par les cours d'Aldo Andreotti. Mais dans mon cas son influence a été bien au-delà, puisque mes premiers travaux ont été motivés par ses fameux articles en collaboration avec Hans Grauert et François Norguet. Aussi est-ce un honneur pour moi de contribuer à ce volume dédier à sa mémoire.

English version:

I am one among many mathematematicians who has been deeply impressed by Aldo Andreotti courses. But in my case his influence was much more, because my first works were motivated by Aldo Andreotti's famous papers with Hans Grauert and François Norguet. So it is an honour for me to contribute to this volume dedicated to his memory.

English title : **Vanishing periods and (a,b)-modules generated by one element.**

Abstract. – *In order to describe the asymptotic behaviour of a vanishing period in the degeneration of a one parameter family of complex manifolds, we introduce and use a very simple algebraic structure encoding the corresponding filtered Gauss-Manin connection : regular geometric (a,b)-module generated (as left $\tilde{A}$–modules) by one element. The idea is to use not the full Brieskorn module associated to the Gauss-Manin connection but the minimal (regular) filtered differential equation satisfied by the period integral we are interested in. We show that the Bernstein polynomial associated is quite simple to compute for such (a,b)-modules and give a precise description of the exponents which appears in the asymptotic expansion which avoids integral shifts. We show the efficiency of this tool on a couple of explicit computations in some classical (but not so easy) examples.*

1. – Introduction.

Cet article a pour but d'étudier le développement asymptotique d'une intégrale de la forme (voir [A-G-V])

$$s \to \int_{\gamma_s} \frac{d\omega}{df}$$

issue d'une des deux situations géométriques suivantes :

1. Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, soit ω une $p-$forme holomorphe sur X vérifiant $df \wedge d\omega \equiv 0$, et soit $(\gamma_s)_{s\in D}$ une famille horizontale de $p-$cycles compacts dans les fibres de f.
2. Soit $f : X \to D$ une fonction holomorphe propre d'une variété complexe X de dimension $n+1$ dont les singularités éventuelles sont toutes contenues dans la fibre $Y := f^{-1}(0)$, soit ω une $p-$forme holomorphe sur X vérifiant $df \wedge d\omega \equiv 0$, et soit $(\gamma_s)_{s\in D}$ une famille horizontale de $p-$cycles compacts dans les fibres de f.

La connexion de Gauss-Manin de f en degré p est un système différentiel sur D avec une singularité régulière à l'origine qui "contrôle" ce type de fonction quand la forme différentielle ω varie. Mais il est clair que pour une $p-$forme donnée, le "contrôle" en question est assez imprécis.
En effet l'intégrale considérée est solution d'une équation différentielle "minimale" (en un sens à préciser) qui est "contenue" dans le système de Gauss-Manin, mais peut-être beaucoup plus "petite", et donne donc des renseignements beaucoup plus précis sur la fonction considérée et les termes intéressants apparaissant dans son développement asymptotique (convergeant en fait).

Nous nous intéresserons plus précisément aux cas où l'on sait déjà que le système de Gauss-Manin considéré est incarné par un (a,b)-module régulier ([1]). Le cas classique est évidemment celui d'un germe f à singularité isolée à l'origine (que l'on peut aussi voir comme le cas global à singularité isolée). Pour le cas d'un germe quelconque, quitte à quotienter par la torsion, on est toujours dans cette situation d'après [B.-S. 04]. Mais la présence de torsion non de type fini peut-être une difficulté sérieuse pour mener à bien des calculs concrets. Plus récemment on a montré dans [B.II] complété par [B.07] que pour un germe f à singularité de dimension 1 la torsion est de type finie. On a aussi montré dans [B.08] que c'est toujours la situation pour une fonction holomorphe propre (situation du 2. ci-dessus).

Dans le cadre des (a,b)-modules (ou modules de Brieskorn généralisés) il s'agit de considérer un (a,b)-module régulier géométrique E ([2]) et de considérer le sous-(a,b)-module minimal contenant un élément $x \in E$ donné. Ceci conduit naturellement à la notion de (a,b)-module **monogène** qui est introduite et décrite

([1]) Le concept de (a,b)-module généralise le complété formel d'un module de Brieskorn d'une singularité isolée ; voir par exemple [S. 89], [B. 93] ou [B. 05].

([2]) La régularité du (a,b)-module correspond ici à la régularité de la connexion de Gauss-Manin, l'aspect géométrique encode à la fois le théorème de Monodromie et le théorème de positivité de B. Malgrange ; voir [M. 75].

dans cet article. Un invariant important est l'élément de Bernstein d'un tel (a,b)-module monogène qui est dans ce cas un avatar très simple du polynôme de Bernstein d'un (a,b)-module régulier (voir [B.93]). Le calcul de cet invariant, qui est beaucoup plus simple que le calcul du (a,b)-module engendré par x lui-même, c'est à dire la détermination précise de l'équation différentielle "minimale" vérifiée par la fonction considérée, donne déjà des renseignements précis sur les exposants apparaissant dans le développement asymptotique à l'origine de l'intégrale considérée.

De manière à bien montrer l'aspect "concret" de notre approche, nous avons détaillé deux exemples dans le cas classique d'une singularité isolée (comparer avec [A'C.73] et [Sc.78]), qui font bien apparaître le gain en précision par rapport à ce que donne le calcul du système de Gauss-Manin complet dans ces cas, ou à fortiori par rapport à un calcul topologique de la monodromie.

Décrivons de façon un peu plus précise les principaux résultats obtenus.

Nous commençons par montrer un résultat de factorisation (proposition 2.0.2) des éléments homogènes en (a,b) dans l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ qui met en évidence une représentation "tordue" du groupe symétrique. Ceci joue un rôle important dans la compréhension du calcul du polynôme de Bernstein et les théorèmes de structure des (a,b)-modules monogènes réguliers.

Le premier théorème de structure 3.2.1 met en évidence le lien entre la forme initiale du générateur de l'idéal annulateur d'un générateur d'un (a,b)-module monogène régulier et son polynôme de Bernstein. L'aspect multiplicatif de l'élément de Bernstein associé en est une conséquence importante. Ce théorème met également en évidence des invariants plus fins (voir 3.3.4) qui seront exploités dans un travail ultérieur.

Le second théorème de structure 3.4.1 est multiplicatif et il explicite le lien entre les suites de Jordan-Hölder et l'idéal annulateur d'un générateur d'un (a,b)-module monogène régulier.
Nous donnons ensuite un théorème (voir 3.6.1) permettant de déduire la valeur du polynôme de Bernstein d'un (a,b)-module monogène régulier dès que l'on connait un élément convenable annulant son générateur sans pour autant demander de connaître la forme canonique donnée dans le premier théorème de structure. Ceci est l'outil crucial qui permet de mener a bien les calculs d'exemples qui concluent cet article.

Enfin nous montrons (voir le théorème 4.2.1) que tout (a,b)-module monogène géométrique est engendré par une fonction multiforme de détermination finie "de type standard" et réciproquement. Ceci permet de montrer que la connaissance du polynôme de Bernstein répond à la question "basique" de la détermination *précise* (sans décalage entier et avec l'exposant du logarithme) des termes "fondamentaux" du dévelopement asymptotique standard considéré.

2. – Polynômes homogènes en (a,b), unitaires en a.

On notera par $\tilde{\mathcal{A}}$ la $\mathbb{C}[[b]]-$algèbre

$$\tilde{\mathcal{A}} := \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a).b^\nu, P_\nu \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

où l'on a $a.b - b.a = b^2$, et où la multiplication par a à gauche (ou à droite) est continue pour la topologie $b-$adique.

DÉFINITION 2.0.1. – *Nous dirons qu'un élément de $\tilde{\mathcal{A}}$ est* **homogène de degré** k **en** (a,b) *si on peut l'écrire comme une combinaison linéaire*

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_j.a^j.b^{k-j}$$

où les λ_j sont des nombres complexes. On dira qu'un tel élément est **unitaire en** a *si on a $\lambda_k = 1$.*

Le lecteur vérifiera facilement que tout élément de $\tilde{\mathcal{A}}$ de la forme

$$a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{m_2}\cdots a^{m_h}b^{n_h}$$

avec $\sum_{p=1}^{h} m_p + n_p = k$, est homogène de degré k en (a,b). Ceci montre que le produit d'un élément homogène de degré k par un élément homogène de degré l est homogène de degré $k+l$.

On remarquera que les monômes $b^j.a^{k-j}, j \in [0,k]$ forment également une base de l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré k de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$.

Notre premier objectif est de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.0.2. – *Tout élément homogène $P \in \tilde{\mathcal{A}}$ de degré k en (a,b) et unitaire en a peut s'écrire sous la forme $P = (a-\lambda_1.b)(a-\lambda_2.b)\cdots(a-\lambda_k.b)$, où les λ_j sont des nombres complexes. De plus, pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ on aura encore*

$$P = (a-(\lambda_{\sigma(1)}+\sigma(1)-1).b)\cdots(a-(\lambda_{\sigma(k)}+\sigma(k)-k).b)$$

et on obtient ainsi, quand σ décrit le groupe $\mathfrak{S}_k$ des permutations de $\{1,2,\cdots,k\}$ toutes les façons de décomposer P en produit d'éléments homogènes de degré 1 *en* (a,b).

PREUVE. – Commençons par remarquer que l'application

$$\varphi : \mathfrak{S}_k \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$$

définie par $\varphi(\sigma, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) = (\lambda_{\sigma(1)} + \sigma(1) - 1, \cdots, \lambda_{\sigma(k)} + \sigma(k) - k)$ est une action du groupe $\mathfrak{S}_k$ sur $\mathbb{C}^k$. En effet on a

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \varphi(\sigma, (\lambda_j))) &= \varphi(\tau, (\lambda_{\sigma(j)} + \sigma(j) - j)) \\ &= (\lambda_{\tau(\sigma(j))} + \sigma(j) - j + \tau(\sigma(j)) - \sigma(j)) = (\lambda_{\tau(\sigma(j))} + \tau(\sigma(j)) - j) \\ &= \varphi(\tau \circ \sigma, (\lambda_j)).\end{aligned}$$

Nous appellerons cette action **"l'action tordue"** de $\mathfrak{S}_k$ sur $\mathbb{C}^k$.

Pour montrer l'égalité

$$(a - \lambda_1.b)(a - \lambda_2.b) \cdots (a - \lambda_k.b) = (a - (\lambda_{\sigma(1)} + \sigma(1) - 1).b) \cdots (a - (\lambda_{\sigma(k)} + \sigma(k) - k).b)$$

il suffit donc de traiter le cas de la transposition de $\mathfrak{S}_2$, c'est-à-dire de vérifier dans $\tilde{\mathcal{A}}$ l'égalité $(a - \lambda_1.b).(a - \lambda_2.b) = (a - (\lambda_2 + 1).b).(a - (\lambda_1 - 1).b)$, ce qui est immédiat.

Passons à l'existence de la décomposition de P en produit d'éléments homogènes de degré 1 en (a, b). Pour cela montrons que $b^{-k}.P$ est un polynôme unitaire de degré k en $b^{-1}.a$. Comme il suffit de prouver que pour chaque $j \in [0, k]$ l'élément $b^{-k}.b^j.a^{k-j} \in \tilde{\mathcal{A}}[b^{-1}]$ est un polynôme en $b^{-1}.a$ de degré au plus k, écrivons, puisque l'on a $a.b^m = b^m.a + mb^{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}b^{-k}.b^j.a^{k-j} &= b^{-1}.(b^{j-k+1}.a).a^{k-j-1} \\ &= b^{-1}.(a.b^{j-k+1} - (j - k + 1)b^{j-k+2}).a^{k-j-1} \\ &= b^{-1}.a.(b^{j-k+1}.a^{k-j-1}) - (j - k + 1)b^{j-k+1}.a^{k-j-1} \\ &= (b^{-1}.a - (j - k + 1)).b^{-k}.b^{j+1}.a^{k-j-1}\end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion par récurrence descendante sur j, le cas $j = k$ étant clair.

La factorisation du polynôme unitaire de degré k ainsi obtenu donne alors la factorisation désirée pour P, de la façon suivante :
La relation

$$b^k.\prod_{j=1}^{k} (b^{-1}.a - \lambda_j) = (a - (\lambda_1 + k - 1).b) \cdots (a - (\lambda_k + k - k).b)$$

s'obtient facilement en remarquant que l'on a

$$b^k.(b^{-1}.a - \lambda) = b^{k-1}.(a - \lambda.b) = (a - (\lambda + k - 1).b).b^{k-1}$$

ce qui permet de conclure. □

Ceci montre la correspondance entre les orbites de l'action usuelle de $\mathfrak{S}_k$ sur $\mathbb{C}^k$ et les orbites de l'action tordue via la correspondance qui à un polynôme unitaire Q de degré k associe l'élément homogène de degré k en (a, b), unitaire en a défini par $P := b^k.Q(b^{-1}.a)$. On a en fait un isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$$

donné par $\varphi(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) = (\lambda_1 + k - 1, \cdots, \lambda_k + k - k)$ qui est équivariant quand on fait agir $\mathfrak{S}_k$ au départ par l'action usuelle et à l'arrivée par l'action tordue.

La proposition qui suit donne une autre façon de voir cette action tordue et l'équivariance décrite ci-dessus.

PROPOSITION 2.0.3. – *Soient $\mu_1, \cdots, \mu_k$ des nombres complexes deux à deux distincts. Alors on a l'égalité suivante entre idéaux à gauche de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$:*

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} \tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu_j.b) = \tilde{\mathcal{A}}.(a - (\mu_1 + k - 1).b) \cdots (a - (\mu_k + k - k).b).$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

LEMMA 2.0.4. – *Soient $\lambda \neq \mu$ deux nombres complexes distincts et soit $x \in \tilde{\mathcal{A}}$. Alors $x.(a - \lambda.b) \in \tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu.b)$ si et seulement si $x \in \tilde{\mathcal{A}}.(a - (\mu + 1).b)$.*

PREUVE. – En utilisant l'automorphisme unitaire de la $\mathbb{C}-$algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ qui envoie a sur $a - \mu.b$ et b sur b, on se ramène au cas où $\lambda \neq \mu = 0$.

L'égalité $(a - b).(a - \lambda.b) = (a - (\lambda - 1).b).a$ montre que la condition $x \in \tilde{\mathcal{A}}.(a - b)$ implique bien $x.(a - \lambda.b) \in \tilde{\mathcal{A}}.a$.

Réciproquement, supposons que $x.(a - \lambda.b) = t.a$. Écrivons $x = z.(a - b) + r$ avec $r \in \mathbb{C}[[b]]$. On obtient alors

$$x.(a - \lambda.b) = z.(a - b).(a - \lambda.b) + r.(a - \lambda.b) = t.a$$

ce qui donne $\lambda.r.b \in \tilde{\mathcal{A}}.a$. Comme $\lambda \neq 0$ on en conclut que $r = 0$ ce qui prouve l'assertion $x \in \tilde{\mathcal{A}}.(a - b)$. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.0.3. – L'inclusion $\supseteq$ de l'énoncé résulte immédiatement de l'invariance du produit considéré dans le second membre de (*) par l'action tordue de $\mathfrak{S}_k$. Montrons l'inclusion opposée par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ étant clair, supposons l'assertion montrée pour $k - 1 \geq 1$.

Soit donc $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \big(\tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu_j.b)\big)$. Écrivons $x = y.(a - \mu_k.b)$. On a alors pour chaque $j \in [1, k - 1] \quad y.(a - \mu_k.b) \in \tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu_j.b)$.

De plus l'hypothèse que les μ_j sont deux à deux distincts pemet d'appliquer le lemme 2.0.4 pour chaque $j \in [1, k-1]$, ce qui donne que $y \in \bigcap_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu_j.b)$. Alors l'hypothèse de récurrence permet de conclure. $\square$

Terminons ce paragraphe en montrant que tout (a,b)-module régulier contient un sous-module monogène qui est de codimension finie.

LEMMA 2.0.5. – *Pour tout (a,b)-module régulier E il existe $x \in E$ tel que le sous-(a,b)-module monogène $\tilde{\mathcal{A}}.x$ de E soit de codimension finie dans E.*

PREUVE. – Montrons ce résultat par récurrence sur k, le rang de E. Le cas du rang 1 étant évident, supposons l'assertion montrée en rang $k-1$, avec $k \geq 2$ et montrons-là au rang k. Considérons une suite exacte de (a,b)-modules ([3])

$$0 \to E_\lambda \to E \xrightarrow{\pi} F \to 0$$

où E est de rang k, et soit $y \in F$ tel que $\tilde{\mathcal{A}}.y$ soit de codimension finie dans F. Soit $x_0 \in E$ vérifiant $\pi(x_0) = y$. Nous allons considérer deux cas.

PREMIER CAS : $\tilde{\mathcal{A}}.x_0 \cap E_\lambda \neq \{0\}$ Il existe alors un entier $\nu \geq 0$ tel que $\tilde{\mathcal{A}}.x_0 \cap E_\lambda = b^\nu.E_\lambda$. On a alors la suite exacte de (a,b)-modules

$$0 \to b^\nu.E_\lambda \to \tilde{\mathcal{A}}.x_0 \to \tilde{\mathcal{A}}.y \to 0$$

qui montre que le rang de $\tilde{\mathcal{A}}.x_0$ est égale à k. Ce qui permet de conclure.

SECOND CAS : $\tilde{\mathcal{A}}.x_0 \cap E_\lambda = \{0\}$ Soit $P \in \tilde{\mathcal{A}}$ un polynôme unitaire en a qui engendre l'annulateur ([4]) à gauche dans $\tilde{\mathcal{A}}$ de l'élément $x_0 \in E$. Montrons qu'il existe un entier $\nu \geq 0$ tel que $P.b^\nu.e_\lambda \neq 0$ où e_λ dénote un générateur standard de E_λ (donc vérifiant $a.e_\lambda = \lambda.b.e_\lambda$). Chaque entier ν tel que $P.b^\nu.e_\lambda = 0$ définit un morphisme (a,b)-linéaire

$$\varphi_\nu : \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P \to E_\lambda$$

en posant $\varphi_\nu(1) := b^\nu.e_\lambda$. De plus, pour des entiers $\nu_1, \cdots, \nu_N$ deux à deux distincts, on obtient ainsi des éléments $\mathbb{C}-$linéairement indépendants dans $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P, E_\lambda)$ puisque l'image de φ_ν est égale à $b^\nu.E_\lambda$. Comme l'espace vectoriel $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P, E_\lambda)$ est de dimension finie d'après [B.95] (corollaire du

([3]) une telle suite existe d'après [B.93] prop. 2.2.

([4]) on utilise ici le théorème 3.2.1 ci-après; ceci ne pose pas de problème car le lemme 2.0.5 ne sera pas utilisé dans la suite.

th. 1 ter), on en conclut qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers ν vérifiant $P.b^\nu.e_\lambda = 0$, ce qui prouve notre assertion.

Fixons alors ν tel que $P.b^\nu.e_\lambda \neq 0$ et posons $x_1 := x_0 + b^\nu.e_\lambda$. On a alors $\pi(x_1) = y$ et $\tilde{\mathcal{A}}.x_1 \cap E_\lambda \neq \{0\}$ puisque $P.x_1 = P.b^\nu.e_\lambda \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Nous sommes donc ramené au premier cas, quitte à choisir x_1 à la place de x_0. □

3. – Les théorèmes de structure.

3.1 – *Préambule.*

DÉFINITION 3.1.1. – *On dira qu'un (a,b)-module E est* **monogène** *s'il est isomorphe comme $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche à un quotient $\tilde{\mathcal{A}}/I$ où I est un idéal à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}$.* □

Rappelons qu'un (a,b)-module est, par définition un $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche qui est libre et de type fini sur la sous-algèbre $\mathbb{C}[[b]]$. Donc tout idéal à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}$ ne donne pas un (a,b)-module, mais quand c'est le cas il est nécessairement monogène. Le théorème 3.2.1 caractérisera les idéaux qui conviennent.

EXEMPLE. – Soit E un (a,b)-module et soit $e \in E$. Alors $\tilde{\mathcal{A}}.e \subset E$ est un (a,b)-module monogène, puisque $\mathbb{C}[[b]]$ est noethérien et E sans $b-$torsion. Si I est l'annulateur de e dans E, on a un isomorphisme "évident" de $\tilde{\mathcal{A}}-$modules à gauche $\varphi : \tilde{\mathcal{A}}/I \to \tilde{\mathcal{A}}.e$ défini en posant $\varphi(1) = e$.

LEMMA 3.1.2. – *Soit E un (a,b)-module de rang k. On suppose que E est local, c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N.E \subset b.E$. Alors les propriétés suivantes pour un élément $x \in E$ sont équivalentes*

1) *x est un générateur de E comme $\tilde{\mathcal{A}}-$module.*
2) *$\{x, a.x, \cdots, a^{k-1}.x\}$ induit une $\mathbb{C}-$base de $E/b.E$.*
3) *$\{x, a.x, \cdots, a^{k-1}.x\}$ est $\mathbb{C}[[b]]-$base de E.*
4) *x engendre le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $E/a.E + b.E$.*

PREUVE. – Montrons que 1) ⇔ 2). Si x est un générateur de E, il engendre $E/b.E$ comme $\mathbb{C}[a]-$module. Comme E est local, l'action de a sur $E/b.E$ est nilpotente, donc 2) est vérifiée. Réciproquement supposons 2) vérifiée. Pour $y \in E$ construisons par récurrence une suite de polynômes P_n de degrés $\leq k-1$ tels que l'on ait $y - \sum_{j=0}^{n} b^j.P_j(a).x \in b^{n+1}.E$. Pour construire P_{n+1} posons $y - \sum_{j=0}^{n} b^j.P_j(a).x = b^{n+1}.z_n$ et écrivons, grâce à 2)

$$z_n = \sum_{h=0}^{k-1} \lambda_h.a^h.x + b.z_{n+1}.$$

Posons $P_{n+1}(a) := \sum_{h=0}^{k-1} \lambda_h.a^h$. On aura alors

$$y - \sum_{j=0}^{n+1} b^j.P_j(a).x = b^{n+2}.z_{n+1}.$$

En posant alors $u := \sum_{j=0}^{\infty} b^j.P_j(a) \in \tilde{\mathcal{A}}$, on obtient $y = u.x$ puisque E est complet pour la topologie $b-$adique.

Les assertions 2) $\Rightarrow$ 3) et 3) $\Rightarrow$ 4) sont faciles et laissées au lecteur.

Montrons 4) $\Rightarrow$ 2). Soit k minimal tel que $a^k.E \subset b.E$. Si $y \in E$ construisons par récurrence les nombres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}$ tels que

$$y - \sum_{j=0}^{h} \lambda_j.a^j.x \in a^{h+1}.E + b.E.$$

Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_h$ sont construits, posons

$$y - \sum_{j=0}^{h} \lambda_j.a^j.x = a^{h+1}z + b.\xi$$

et écrivons $z = \lambda_{h+1}.x + a.t + b.v$ grâce à notre hypothèse. Alors on aura

$$y - \sum_{j=0}^{h+1} \lambda_j.a^j.x \in a^{h+2}.E + b.E$$

ce qui fait avancer la récurrence.

On aura donc $y - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j.a^j.x \in b.E$, ce qui montre que $x, a.x, \cdots, a^{k-1}.x$ est un système générateur de $E/b.E$. On a donc prouvé 2). $\square$

REMARQUE. – Le fait qu'il existe $x \in E$ vérifiant la condition 1), c'est à dire le fait d'être monogène, équivaut donc, pour un (a,b)-module local, au fait que l'espace vectoriel $E/a.E + b.E$ soit de dimension 1, c'est à dire à l'existence d'un $x \in E$ vérifiant la condition 4). $\square$

COROLLAIRE 3.1.3. – *Soit E un (a,b)-module monogène local de rang k et soit F un sous-(a,b)-module normal de rang $k-1$ de E; soit x un générateur de E, λ un nombre complexe et soit $\xi \in a^2.E + a.b.E + b^2.E$. Si $y := (a - \lambda.b).x + \xi \in F$ alors y est un générateur de F.*

PREUVE. – Comme F est normal dans E, l'application évidente $F/b.F \to E/b.E$ est injective. Donc le fait que a soit nilpotent sur $E/b.E$ impose la même condition sur $F/b.F$, ce qui montre que F est local.

Pour prouver que F est monogène, remarquons que, comme F est normal dans E, $F/b.F$ est un hyperplan de $E/b.E$. Comme on a $y - a.x \in a^2.E + b.E$, on obtient pour chaque $h \in [0, k-2]$:

$$a^h.y = a^{h+1}.x + \sum_{j=2}^{k-h-1} \lambda_{j,h}.a^{j+h}.x \quad \text{modulo } b.E$$

ce qui montre que $y, a.y, \cdots, a^{k-2}.y$ est un système libre de $F/b.F$ et donc une base. On conclut grâce à l'implication 2) $\Rightarrow$ 1) du lemme précédent appliquée à F. $\square$

PROPOSITION 3.1.4. – *(Isomorphisme) Soit E un (a,b)-module monogène régulier et soient x et y deux générateurs de E d'annulateurs respectifs I et J dans $\tilde{\mathcal{A}}$. Alors il existe $u, v \in \tilde{\mathcal{A}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

@ $\qquad 1 - vu \in J \quad \text{et} \quad I = \{\beta \in \tilde{\mathcal{A}} \ / \ \beta.u \in J\}.$

@′ $\qquad 1 - uv \in I \quad \text{et} \quad J = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{A}} \ / \ \alpha.v \in I\}.$

Réciproquement, si $\tilde{\mathcal{A}}/I$ et $\tilde{\mathcal{A}}/J$ sont des (a,b)-modules monogènes réguliers isomorphes s'il existe $u, v \in \tilde{\mathcal{A}}$ vérifiant la condition (@).

PREUVE. – Comme x et y sont des générateurs de E, il existe $u, v \in \tilde{\mathcal{A}}$ tels que l'on ait $x = u.y$ et $y = v.x$ dans E. On en déduit que $1 - uv \in I$ et que $1 - vu \in J$. De plus on a pour $\beta \in \tilde{\mathcal{A}}$ l'équivalence entre $\beta.x = 0$ et $\beta.u.y = 0$ c'est à dire la seconde égalité de (@). Celle de (@′) est analogue.
Réciproquement, si l'on suppose que (@) est vérifiée, définissons l'application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à gauche

$$\varphi : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}/J$$

en posant $\varphi(1) := u$. Alors le noyau de φ est l'ensemble des $\beta \in \tilde{\mathcal{A}}$ tels que $\beta.u \in J$. C'est donc exactement I. Donc φ induit une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire $\psi : \tilde{\mathcal{A}}/I \to \tilde{\mathcal{A}}/J$. Mais comme $\varphi(v) = vu = 1$ *modulo* J, l'application φ est surjective et ψ est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{A}}-$modules. $\square$

REMARQUES

1. Soit E un (a,b)-module monogène régulier et soit $x \in E$ un générateur. Alors il résulte du lemme 3.1.2 que $(1 + a).x = y$ est également un générateur de E. Mais il est clair que $1 + a$ n'est pas un inversible de $\tilde{\mathcal{A}}$. Ceci montre qu'il est possible que I et J vérifient (@) sans que les éléments u et v soient des inversibles de $\tilde{\mathcal{A}}$.
2. Un (a,b)-module E est un $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche. Mais si l'on suppose que E est régulier (ou même seulement local, c'est à dire qu'il existe N tel que

$a^N.E \subset b.E$), il est complet pour la filtration $a-$adique et c'est naturellement un module à gauche sur l'algèbre

$$\hat{\mathcal{A}} := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a).b^n, S_n \in \mathbb{C}[[a]] \right\}$$

qui est la completion $a-$adique de $\tilde{\mathcal{A}}$.
Un isomorphisme de (a,b)-modules réguliers est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{A}}-$modules à gauche et c'est alors nécessairement un isomorphisme de $\hat{\mathcal{A}}-$modules à gauche. □

3.2 – *Le premier théorème de structure.*

THÉORÈME 3.2.1. – *Soit I un idéal à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}$. Alors le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/I$ est un (a,b)-module régulier de rang k si et seulement si l'idéal I est principal et admet un générateur de la forme*

$$x = P + b^2.R$$

où $P \in \tilde{\mathcal{A}}$ est un élément homogène de degré k en (a,b), unitaire en a et où $R \in \tilde{\mathcal{A}}$ est un polynôme en a de degré au plus $k-1$, à coefficients dans $\mathbb{C}[[b]]$, de valuation en (a,b) supérieure ou égale à $k-1$.

Dans ces conditions, l'élément $P + b^2.R$ est unique et ne dépend que de l'idéal I de $\tilde{\mathcal{A}}$.

De plus, on a l'égalité dans $\tilde{\mathcal{A}}$

$$(@) \qquad (-b)^k.B_E(-b^{-1}.a) = P$$

où B_E désigne le polynôme de Bernstein du (a,b)-module régulier $E := \tilde{\mathcal{A}}/I$. Ceci montre que $P \in \tilde{\mathcal{A}}$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de E.

REMARQUE IMPORTANTE. Nous montrerons dans la démonstration du théorème ci-dessus que le polynôme de Bernstein d'un (a,b)-module monogène E est en fait le polynôme caractéristique de $-b^{-1}.a$ agissant sur $E^\sharp/b.E^\sharp$, où $E^\sharp$ désigne le saturé de E par $b^{-1}.a$. L'égalité du polynôme minimal avec le polynôme caractéristique dans ce cas donnera évidemment de bien meilleures propriétés fonctorielles du polynôme de Bernstein dans le cas des (a,b)-modules monogènes (voir par exemple la proposition 3.4.4). □

DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord montrer par récurrence sur le rang $k \geq 1$ du (a,b)-module monogène régulier E l'assertion suivante :

- pour tout générateur x de E il existe des nombres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ et des éléments $T_1, \cdots, T_k$ de $\mathbb{C}[[b]]$ vérifiant $T_j(0) = 1 \quad \forall j \in [1, k]$ tels que l'on ait

$$\big[(a-\lambda_1.b).T_1.(a-\lambda_2.b).T_2\cdots(a-\lambda_k.b).T_k\big].x = 0$$

dans E.

Supposons l'assertion montrée en rang $k-1$. Considérons alors une suite exacte

$$0 \to F \to E \xrightarrow{\pi} E_\lambda \to 0 \tag{1}$$

où E_λ désigne le (a,b)-module de rang 1 (régulier monogène) $\tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.(a-\lambda.b)$.

Le théorème d'existence des suites de Jordan-Hölder pour les (a,b)-modules réguliers (voir [B.93]) assure de l'existence d'une telle suite exacte. Alors le (a,b)-module F est régulier de rang $k-1$. Comme x est un générateur de E, $\pi(x)$ est un générateur de E_λ et peut donc être écrit $\pi(x) = S_k.e_\lambda$ où $S_k \in \mathbb{C}[[b]]$ vérifie $S_k(0) = 1$ quitte à normaliser le générateur standard e_λ de E_λ vérifiant $(a-\lambda.b).e_\lambda = 0$.

Pour faire avancer notre récurrence il nous suffit alors de montrer que l'élément $y = (a-\lambda.b).S_k^{-1}.x$ est un générateur (sur $\tilde{\mathcal{A}}$) de F. D'abord c'est bien un élément de $F = Ker\,\pi$ par définition de S_k. Alors il résulte du corollaire 3.1.3 que y est un générateur de F.

Notre assertion est donc démontrée en posant $T_k := S_k^{-1}$.

Notons $Q := (a-\lambda_1.b).T_1.(a-\lambda_2.b).T_2\cdots(a-\lambda_k.b).T_k$ et considérons le $\tilde{\mathcal{A}}-$module $G := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.Q$. On a une application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à gauche surjective

$$\varphi : G \to E$$

définie en posant $\varphi(1) = x$ puisque, par construction, on a $Q.x = 0$ dans E. Comme $T_1^{-1}\cdots T_k^{-1}.Q$ est un polynôme unitaire en a de degré k et de valuation k en (a,b), G est un $\mathbb{C}[[b]]-$module libre de rang k (de base $1, a, \cdots, a^{k-1}$). L'application surjective φ est donc un isomorphisme.

On en conclut que tout idéal à gauche I de $\tilde{\mathcal{A}}$ tel que $E := \tilde{\mathcal{A}}\big/I$ soit un (a,b)-module régulier est bien principal avec un générateur $x = P + b^2.R$ de la forme annoncée.

Montrons la réciproque. On suppose donc que $I = \tilde{\mathcal{A}}.x$ avec $x = P + b^2.R$ comme dans l'énoncé. Soit $y \in \tilde{\mathcal{A}}$ et écrivons

$$y = \sum_{n\geq 0} b^n.Y_n(a)$$

où les Y_n sont dans $\mathbb{C}[z]$. Posons alors $Y_n = Z_n.x + R_n$ pour chaque $n \geq 0$, où Z_n, R_n sont dans $\mathbb{C}[[b]][a]$ et $deg_a(R_n) \leq k-1$. On aura alors

$$y = \Big(\sum_{n\geq 0} b^n.Z_n\Big).x + \sum_{n\geq 0} b^n.R_n.$$

Ceci montre que l'application $\mathbb{C}[[b]]-$linéaire

$$\psi : \mathbb{C}[[b]]^k \to \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$$

définie par $\psi(S_0, \cdots, S_{k-1}) = \left[\sum_{j=0}^{k-1} S_j.a^j\right]$ est surjective.

Montrons qu'elle est également injective. Supposons donc que l'on ait dans $\tilde{\mathcal{A}}$ l'égalité:

$$\sum_{j=0}^{k-1} S_j.a^j = T.(P + b^2.R).$$

Le cas $T = 0$ étant immédiat, supposons que $T \neq 0$. Alors on peut écrire $T = b^N.T_1 + b^{N+1}.T_2$ où $T_1 \in \mathbb{C}[a] \setminus \{0\}$ et $T_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$.

En raisonnant modulo $b^{N+1}.\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}.b^{N+1}$, on obtient que

$$\sum_{j=0}^{k-1} S_{j,N}.a^j = b^N.T_1(a).a^k$$

où $S_{j,N}$ désigne la classe de S_j dans $\mathbb{C}[[b]]/b^{N+1}.\mathbb{C}[[b]]$. On en déduit que l'on a $T_1 = 0$. Contradiction. Donc ψ est injective.

Le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$ est donc libre de rang k sur $\mathbb{C}[[b]]$. C'est donc un (a,b)-module. Montrons qu'il est régulier.

Pour cela, montrons que les $b^{-j}.a^j$ pour $j \in [0, k-1]$ engendrent (comme $\mathbb{C}[[b]]-$module) le saturé $E^\sharp$ de E par $b^{-1}.a$ dans $E[b^{-1}]$. Il suffit, en fait, de montrer que l'on a

$$b^{-k}.a^k.E \subset \sum_{j=0}^{k-1} b^{-j}.a^j.E.$$

Ceci signifie que nous devons montrer l'inclusion

$$b^{-k}.a^k.\tilde{\mathcal{A}} \subset \sum_{j=0}^{k-1} b^{-j}.a^j.\tilde{\mathcal{A}} + b^{-k}.\tilde{\mathcal{A}}.x.$$

Comme on a vu que $\tilde{\mathcal{A}} = Im\psi + \tilde{\mathcal{A}}.x$ il suffit de voir que l'on a

$$a^k.\left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].a^j\right) \subset \sum_{j=0}^{k-1} b^{k-j}.a^j.\tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{A}}.x.$$

Ceci va résulter de l'assertion suivante :

(@@) Pour tout $h \geq 0$ on a $\mathbb{C}[[b]].a^{k+h} \subset \sum_{j=0}^{k-1} b^{k-j+h}.a^j.\mathbb{C}[[b]] + \tilde{\mathcal{A}}.x$

qui est clairement équivalente à

$$(@@\text{bis}) \quad \text{Pour tout} \quad h \geq 0 \quad \text{on a} \quad \mathbb{C}[[b]].a^{k+h} \subset \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h}.a^j. + \tilde{\mathcal{A}}.x$$

Prouvons (@@*bis*) par récurrence sur $h \geq 0$. Pour $h = 0$ on obtient

$$\mathbb{C}[[b]].a^k \subset \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j}.a^j + \tilde{\mathcal{A}}.x$$

en écrivant x sous la forme

$$x = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} \ S_j(b).b^{k-j}.a^j$$

où l'on a posé

$$P := a^k + \sum_{j=0}^{k-1} \ S_j(0).b^{k-j}.a^j \qquad \text{et} \qquad R = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{S_j(b) - S_j(0)}{b}.b^{k-j-1}.a^j.$$

Supposons (@@*bis*) montrée pour $h \leq h_0$. Alors on a

$$\mathbb{C}[[b]].a^{k+h_0+1} \subset \ a.\mathbb{C}[[b]].a^{k+h_0} + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0+2}.a^j + \tilde{\mathcal{A}}.x$$

en utilisant le fait que $\mathbb{C}[[b]].a \subset a.\mathbb{C}[[b]] + b^2.\mathbb{C}[[b]]$ et l'hypothèse de récurrence. Celle-ci donne alors :

$$\mathbb{C}[[b]].a^{k+h_0+1} \subset \ a.\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0}.a^j + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0+2}.a^j + \tilde{\mathcal{A}}.x.$$

On a

$$\begin{aligned} a.\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0}.a^j \ &\subset \ \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0+1}.a^j \ + \mathbb{C}[[b]].b^{h_0+1}.a^k \\ &\subset \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].b^{k-j+h_0+1}.a^j + \tilde{\mathcal{A}}.x \end{aligned}$$

en utilisant le cas $h = 0$ démontré plus haut. Ceci achève la preuve de la régularité de E.

Si maintenant on suppose que l'on a un autre générateur $y = P_1 + b^2.R_1$ de I tel que P_1 soit homogène en (a,b) de degré $k = rg(E)$, unitaire en a et R_1 de valuation $\geq k-1$ en (a,b) et de degré $\leq k-1$ en a, montrons que $P = P_1$ et $R = R_1$.

On a un élément inversible $u \in \tilde{\mathcal{A}}$ vérifiant $x = u.y$. Comme les inversibles de $\tilde{\mathcal{A}}$ sont de la forme $\lambda + b.\xi$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\xi \in \tilde{\mathcal{A}}$, on obtient, en supposant $u \neq 1$ une égalité

$$P + b^2.R = (1 + b^m.Q(a) + b^{m+1}.\eta).(P_1 + b^2.R_1)$$

où $\lambda = 1$ car P et P_1 sont unitaires en a de degré k, et où $m \geq 1$ est maximal tel que $u - 1 \in b^m.\tilde{\mathcal{A}}$. En regardant cette égalité modulo $b^{m+1}.\tilde{\mathcal{A}}$ on obtient $P = P_1$ et $deg_a(b^m.Q(a).P_1) \leq k - 1$ ce qui implique $Q(a) = 0$, contredisant le choix de m. On a donc $u = 1$ et $x = y$.

Montrons maintenant que les $(b^{-1}.a)^j, j \in [0, k-1]$, ou ce qui est équivalent, que les $b^{-j}.a^j, j \in [0, k-1]$, forment une base de $E^\sharp/b.E^\sharp$. Comme on sait déjà que c'est un système générateur, il suffit de prouver que c'est un système libre. Mais comme on sait déjà que le rang de E est égal à k, le rang de $E^\sharp$ est aussi égal à k et c'est nécessairement une base. On en déduit que le polynôme caractéristique de $-b^{-1}.a$ agissant sur $E^\sharp/b.E^\sharp$ est son polynôme minimal. La relation (@) résulte alors de l'égalité dans $E[b^{-1}]$

$$0 = b^{-k}.x = b^{-k}.P + b^{-k+2}.R$$

en tenant compte du fait que P est homogène de degré k en (a, b), unitaire en a et que la valuation en (a, b) de R est au moins égale à $k - 1$, alors que son degré en a est au plus $k - 1$. □

3.3 – *Élément de Bernstein et autres invariants.*

DÉFINITION 3.3.1 [Élément de Bernstein]. – *Soit E un (a,b)-module monogène régulier de rang k, nous appellerons* **élément de Bernstein de** E, *que nous noterons $P_E \in \tilde{\mathcal{A}}$, l'élément homogène en (a,b) de degré k, unitaire en a, défini dans le théorème* 3.2.1. *Pour I idéal à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}$ tel que $E := \tilde{\mathcal{A}}/I$ soit un (a,b)-module régulier, l'élément $x_I := P_E + b^2.R_I \in \tilde{\mathcal{A}}$ sera appelé* **l'élément caractéristique** *de I.* □

Le lien entre les suites de Jordan-Holdër de E régulier monogène et l'élément de Bernstein de E est donné par le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.3.2. – *Soit E un (a,b)-module monogène régulier de rang k et soit*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = E$$

une suite de Jordan-Hölder de E. Posons $F_j/F_{j-1} \simeq E_{\lambda_j}$ pour $j \in [1, k]$.

Alors on a $P_E = (a - \lambda_1.b)(a - \lambda_2) \cdots (a - \lambda_k.b)$.

Considérons une autre suite de Jordan-Hölder $(F'_j)_{j\in[1,k]}$ *de* E *et posons* $F'_j/F'_{j-1} \simeq E_{\mu_j}$. *Alors* $(\mu_1,\cdots,\mu_k) \in \mathbb{C}^k$ *sera dans l'orbite tordue de* $(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ *sous l'action de* $\mathfrak{S}_k$.

Remarque. On notera que dans la situation du corollaire ci-dessus le polynôme de Bernstein de E est donné par

$$B_E(x) = (x+\lambda_1+k-1)(x+\lambda_2+k-2)\cdots(x+\lambda_k).$$

En particulier $-\lambda_k$ est une racine du polynôme de Bernstein de E. □

Lemma 3.3.3 (Complément). – *Soit* $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/I$ *un (a,b)-module monogène régulier. Notons* $x_I := P_E + b^2.R_I$ *l'élément caractéristique de* I. *La partie homogène* $b^2.R_{k-1}$ *en (a,b) de degré* $k+1$ *de* $b^2.R_I$ *ne dépend, modulo* $\mathbb{C}.[P_E,b]+\mathbb{C}.[P_E,a]$, *que de la classe d'isomorphisme du (a,b)-module E.*

On notera que les commutateurs $[P,a],[P,b]$ sont bien homogènes de degré $k+1$ en (a,b) et de la forme $b^2.T$ où T est homogène de degré $k-1$ en (a,b).

Preuve. – Grâce à la proposition 3.1.4 ceci revient à montrer, en posant $P := P_E$, qu'une égalité

$$u.(P+b^2.R) = (P+b^2.S).v \tag{E}$$

où u,v sont des éléments de $\tilde{\mathcal{A}}$ qui sont égaux à 1 modulo $\tilde{\mathcal{A}}.b+\tilde{\mathcal{A}}.a$ et R,S des polynômes en a de degré $\leq k-1$ et de valuation en (a,b) au moins égale à $k-1$, implique $b^2.R_{k-1}-b^2.S_{k-1} \in \mathbb{C}.[P,a]+\mathbb{C}.[P,b]$ ou R_{k-1} et S_{k-1} désignent les parties homogènes en (a,b) de degré $k-1$ de R et S respectivement.

Comme P est unitaire en a on peut supposer que $u = 1+\lambda.b+\lambda'.a+\xi$ et $v=1+\mu.b+\mu'.a+\eta$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ et ξ,η dans l'idéal bilatère $b^2\tilde{\mathcal{A}}+b.a\tilde{\mathcal{A}}+\tilde{\mathcal{A}}.a^2$. Alors la partie homogène de degré $k+1$ de l'égalité (E) donne

$$\lambda.b.P+\lambda'.a.P+b^2.R_{k-1} = \mu.P.b+\mu'.P.a+b^2.S_{k-1};$$

ceci implique $\lambda'=\mu'$, puis $\lambda=\mu$ et donc $b^2.R_{k-1}-b^2.S_{k-1} \in \mathbb{C}.[P,a]+\mathbb{C}.[P,b]$. □

Corollaire 3.3.4. – *Tout (a,b)-module monogène régulier E de rang k est isomorphe à un quotient* $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$ *où l'élément* x *de* $\tilde{\mathcal{A}}$ *est de la forme*

$$x = P_E + b^3.S$$

avec S un polynôme en a de degré $\leq k-1$ *et de valuation* $\geq k-2$ *en (a,b). Dans le choix d'un tel x, la partie homogène* S_{k-2} *de degré* $k-2$ *de S ne dépend que de la classe d'isomorphisme de E modulo* $\mathbb{C}.[P_E,(\alpha.a+b)]$, *où* $\alpha \in \mathbb{C}$ *est tel que* $deg_a([P_E,(\alpha.a+b)] \leq k-2$.

PREUVE. – Le fait que S_{k-2} ne dépende que de la classe d'isomorphisme de E résulte du lemme précédent, puisque l'on a $b.P_E - P_E.b = b^2.k.a^{k-1} + Q$ avec $deg_a(Q) \leq k-2$. Il nous reste à montrer que tout E est bien isomorphe à un tel quotient. Soit déjà $y = P_E + b^2.R$ tel que $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.y$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ le coefficient de a^{k-1} dans la partie homogène de degré $k-1$ de R, et posons $\lambda = -\dfrac{\mu}{k}$. Définissons $x = (1+\lambda.b).y.(1+\lambda.b)^{-1}$. Alors on a un isomorphisme $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à gauche :

$$\varphi : \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.y \to \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$$

défini par $\varphi(z) = z.(1+\lambda.b)^{-1}$. Comme les idéaux $\tilde{\mathcal{A}}.x$ et $\tilde{\mathcal{A}}.y.(1+\lambda.b)^{-1}$ sont égaux, φ est bien un isomorphisme. Mais on a

$$x = (1+\lambda.b).(P_E + b^2.R).(1+\lambda.b)^{-1}$$

et on constate facilement que le coefficient de $b^2.a^{k-1}$ vaut $k.\lambda + \mu = 0$, ce qui prouve que $x = P_E + b^3.S$ avec S un polynôme de degré $\leq k-1$ en a et de valuation $\geq k-2$ en (a,b). □

EXEMPLES.

1. Pour $P = a^2 - \alpha.ab + \beta.b^2$ on vérifie facilement que $[P, a]$ et $[P.b]$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{C}.a.b^2 + \mathbb{C}.b^3$ si on a $4\beta \neq \alpha.(\alpha+2)$. Dans ce cas l'invariant S_0 du corollaire précédent disparaît.
2. Si on considère, pour $\beta \in \mathbb{C}$ l'idéal à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}$ engendré par $a^2 + \beta.b^3$, on trouve la famille de (a,b)-modules de rang 2 qui sont notés $E_{1,0}(\alpha)$ dans la classification de la proposition 2.4 de [B.93] (avec $\lambda = n = 1$). Montrons que l'invariant donné par le corollaire ci-dessus (égal à β) coïncide avec l'invariant α de la classification :
   Par définition $E_{1,0}(\alpha)$ admet une $\mathbb{C}[[b]]-$base e_1, e_2 dans laquelle on a

   $$a.e_1 = (1+\alpha.b).e_2 \quad \text{et} \quad a.e_2 = 0.$$

   Donc l'élément e_1 engendre ce $\tilde{\mathcal{A}}-$module monogène (régulier) et il est annulé par

   $$x := a.(1+\alpha.b)^{-1}.a.$$

   En fait il est plus pratique de considérer $(1+\alpha.b)^{-1}.e_1$ comme générateur, car il est annulé par $y := x.(1+\alpha.b) = a.(1+\alpha.b)^{-1}.a.(1+\alpha.b)$. Comme on a

   $$(1+\alpha.b)^{-1}.a.(1+\alpha.b) = a + \alpha.b^2 + b^3.\varphi(b)$$

   où $\varphi \in \mathbb{C}[[b]]$, l'annulateur du générateur $(1+\alpha.b)^{-1}.e_1$ est l'idéal engendré par l'élément

   $$y = a^2 + \alpha.ab^2 + ab^3.\varphi(b).$$

Comme $P_E = a^2$ et que $[a^2, a] = 0, [a^2, b] = 2a.b^2 - 2b^3$, l'invariant S_0 donné par le corollaire est le coefficient de b^3 dans $\alpha.a.b^2 - \frac{\alpha}{2}.[a^2, b] = \alpha.b^3$. Donc le corollaire et la classification des (a,b)-modules réguliers de rang 2 nous donnent l'égalité annoncée.

A titre d'exercice sur les équations différentielles, le lecteur pourra déterminer, dans la présentation du (a,b)-module $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a^2 + \alpha.b^3)$ sous la forme d'une $\mathbb{C}[[b]]-$base e_1, e_2 vérifiant $a.e_1 = e_2$, $a.e_2 = -\alpha.b^3.e_1$ des éléments S, T dans $\mathbb{C}[[b]]$ avec $T(0) = 1$, tels que l'élément

$$\varepsilon := S.e_1 + T.e_2$$

satisfasse $a.\varepsilon = 0$ (on sait à priori qu'il existe et qu'il est unique). $\square$

3.4 – *Le second théorème de structure.*

THÉORÈME 3.4.1. – *Soit E un (a,b)-module monogène régulier de rang k. Soit $0 \subset F_1 \subset \cdots F_k = E$ une suite de Jordan-Hölder de E et posons $F_j/F_{j-1} \simeq E_{\lambda_j}$ pour $j \in [1, k]$. Alors il existe $S_1, \cdots, S_{k-1} \in \mathbb{C}[b]$ vérifiant $S_j(0) = 1 \quad \forall j$, tels que E soit isomorphe à $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.\Pi$ où*

$$(**) \qquad \Pi = (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}.(a - \lambda_2.b).S_2^{-1} \cdots (a - \lambda_{k-1}.b).S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$$

Si l'on suppose que pour chaque $j \in [1, k-1]$ on a $\lambda_j \notin \lambda_{j+1} - \mathbb{N}$ alors on peut choisir les polynômes S_j vérifiant de plus $deg(S_j) \leq k - j - 1$.

Dans le cas général, posons $m_j := \sup\{\lambda_h - \lambda_j, h \in [j+1, k]/\lambda_h - \lambda_j \in \mathbb{N}\}$ si cet ensemble est non vide, et $m_j := -1$ sinon.

Alors on peut choisir S_j de degré $\leq k - j + m_j$.

La démonstration du théorème utilisera le lemme suivant.

LEMMA 3.4.2. – *Soit E un (a,b)-module et soit $\pi : E \to E_\mu$ un morphisme surjectif. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des nombres complexes, et soient $T_1, \cdots, T_k$ des inversibles de $\mathbb{C}[[b]]$.*

Notons $j_1, \cdots, j_h$ les éléments de $[1, k]$ pour lesquels on a $\mu \in \lambda_{j_i} - \mathbb{N}$. Posons $\mu = \lambda_{j_1} - m_1 = \cdots = \lambda_{j_h} - m_h$ et $m := \sup_{i=1}^h\{m_i\}$ et $m := -1$ s'il n'existe aucun j tel que $\mu \in \lambda - \mathbb{N}$. Alors l'image de l'application induite par π

$$\pi' : \big((a - \lambda_1.b).T_1.(a - \lambda_2.b) \cdots T_{k-1}.(a - \lambda_k.b).T_k\big)(E) \to E_\mu$$

contient $b^{k+m+1}.E_\mu$.

Dans le cas où $\mu \notin \lambda_j - \mathbb{N} \quad \forall j \in [1, k]$ alors l'image de π' est exactement $b^k.E_\mu$.

PREUVE. – Commençons par montrer le résultat dans le cas où $E = E_\mu$ et $\pi = Id$.

Remarquons qu'il suffit de démontrer ce lemme pour $T_1 = \cdots = T_k = 1$ puisque l'on a $T.b^j.E = b^j.E$ pour tout $j \geq 0$ et tout $T \in \mathbb{C}[[b]]$ inversible.

On a, pour chaque entier $j \geq 0$ la relation

$$(a - \lambda_1.b)\cdots(a - \lambda_k.b).b^j = b^j.(a - (\lambda_1 - j).b)\cdots(a - (\lambda_k - j).b)$$

ce qui donne quand $a.e_\mu = \mu.b.e_\mu$:

$$(a - \lambda_1.b)\cdots(a - \lambda_k.b).b^j.e_\mu = (\mu - \lambda_1 + j)\cdots(\mu - \lambda_k + j).b^{j+k}.e_\mu.$$

Donc si $j \geq m+1$, on aura $(a - \lambda_1.b)\cdots(a - \lambda_k.b)(E_\mu) \supset b^{j+k}.E_\mu$ et donc l'inclusion

$$b^{k+m+1}(E_\mu) \subset (a - \lambda_1.b)\cdots(a - \lambda_k.b)(E_\mu).$$

Dans le cas où $\mu \notin \lambda_j - \mathbb{N}\ \forall j \in [1,k]$ ce raisonnement donne immédiatement $(a - \lambda_1.b)\cdots(a - \lambda_k.b)(E_\mu) = b^k.E_\mu$.

Dans le cas général la surjectivité de l'application π' induite par π est conséquence immédiate du carré commutatif suivant, de la surjectivité de π et des deux flèches verticales

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"] & E_\mu \arrow[d, "u"] \\ u(E) \arrow[r, "\pi'"] & u(E_\mu) \end{tikzcd}$$

où l'on a posé $u = (a - \lambda_1.b).T_1.(a - \lambda_2.b)\cdots T_{k-1}.(a - \lambda_k.b).T_k \in \tilde{\mathcal{A}}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. – Notons π_j la projection $F_j \to F_j/F_{j-1} \simeq E_{\lambda_j}$, pour $j \in [1,k]$. Comme π_k est surjective, on peut choisir un générateur x_k de E de sorte que $\pi_k(x_k)$ soit un générateur (sur $\tilde{\mathcal{A}}$) e_{λ_k} de E_{λ_k} vérifiant $(a - \lambda_k.b).e_{\lambda_k} = 0$. Alors on aura $z_{k-1} := (a - \lambda_k.b).x_k \in F_{k-1}$ et qui sera un générateur (sur $\tilde{\mathcal{A}}$) de F_{k-1} grâce au corollaire 3.1.3.

Montrons par récurrence descendante sur $j \in [1,k]$ que l'on peut trouver les polynômes $1 = S_k, \cdots, S_j, \cdots, S_1$ et des éléments $\xi_j \in F_j, \forall j \in [1, k-1]$ tels que les éléments $x_j := x_k - \sum_{h=j}^{k-1} \xi_h$ soient des générateurs de E et que pour chaque $j \in [1, k-1]$ (avec la convention $m_k = 0$) l'élément

$$z_j := (a - \lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b).x_{j+1}$$

soit un générateur de F_j et que l'on ait

$$deg(S_j) \leq k - j + m_j.$$

Comme $S_k = 1$ et x_k ont été construits, supposons que $S_k, \cdots, S_{j+1}$ ainsi que $x_k, \cdots, x_{j+1}$ construits et construisons S_j et ξ_j. Alors z_j est un générateur de F_j par hypothèse. Posons $\pi_j(z_j) = T.e_{\lambda_j}$ où $T \in \mathbb{C}[[b]]$ et où l'on peut supposer $T(0) = 1$, quitte à normaliser convenablement le générateur standard e_{λ_j} de E_{λ_j} vérifiant $a.e_{\lambda_j} = \lambda_j.b.e_{\lambda_j}$, puisque π_j est surjective et que z_j est un générateur de F_j.

Utilisons maintenant le lemme 3.4.2 qui nous donne l'inclusion

$$b^{k-j+m_j+1}.E_{\lambda_j} \subset \pi_j\big[(a-\lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}.(a-\lambda_{j+2}.b).S_{j+2}^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b)(F_j)\big].$$

Posons alors $T = T_1 + b^{k-j+m_j+1}.T_2$ où T_1 est un polynôme de degré $\leq k-j+m_j$ vérifiant $T_1(0) = 1$. Posons $S_j := T_1$.

Soit $\xi_j \in F_j$ tel que

$$\pi_j((a-\lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}.(a-\lambda_{j+2}.b).S_{j+2}^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b)(\xi_j)) = b^{k-j+m_j+1}.T_2.e_{\lambda_j}.$$

Alors on aura

$$\pi_j((a-\lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}.(a-\lambda_{j+2}.b).S_{j+2}^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b)(x_{j+1}-\xi_j)) = T_1.e_{\lambda_j}$$

et donc

$$\pi_j(S_j^{-1}.(a-\lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}.(a-\lambda_{j+2}.b).S_{j+2}^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b)(x_{j+1}-\xi_j)) = e_{\lambda_j}$$

ce qui montre que l'élément

$$z_{j-1} := (a-\lambda_j.b).S_j^{-1}.(a-\lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1}.(a-\lambda_{j+2}.b)\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b)(x_{j+1}-\xi_j)$$

est dans $Ker\,\pi_j = F_{j-1}$. Comme $F_j \subset F_{k-1} \subset a.E + b.E$, $x_j := x_{j+1} - \xi_j$ est bien un générateur de E. On a donc prouvé le pas de récurrence.

L'assertion du théorème en découle facilement puisque le morphisme surjectif

$\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.\Pi \to E$ entre deux (a,b)-modules de même rang est nécessairement un isomorphisme. □

Remarque. – Si on part d'un (a,b)-module monogène régulier E qui possède un générateur e dont l'annulateur est l'idéal $\tilde{\mathcal{A}}.\Pi$ où $\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}$ est donné par l'équation (**), les $S_1, \cdots, S_{k-1}$ étant des inversibles de $\mathbb{C}[[b]]$, on peut modifier le choix du générateur de manière que son annulateur soit l'idéal $\tilde{\mathcal{A}}.\Pi'$, où Π' est encore donné par une équation (**) avec maintenant des S_j dans $\mathbb{C}[b]$ vérifiant $S_j(0) = 1$ et $deg(S_j) \leq k-j+m_j$.

Ceci résulte immédiatement de la démonstration du théorème.

On prendra garde que l'on ne change pas la suite ordonnée $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ dans cette opération.

En particulier la suite de Jordan-Holdër considérée $0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = E$ ne change pas. Le changement éventuel de suite de Jordan-Holdër sera examiné au paragraphe suivant (voir la proposition 3.5.2 et le corollaire qui la suit). □

COROLLAIRE 3.4.3. – *Soit $E = \tilde{\mathcal{A}}/I$ un (a,b)-module monogène régulier de rang k. Il existe des éléments $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \mathbb{C}[[b]]$ tels que l'on ait*

$$x_I := P_E + b^2.R_I = (a - b.\theta_1(b)) \cdots (a - b.\theta_k(b)).$$

On remarquera que dans la situation du corollaire ci-dessus on a

$$P_E = (a - \theta_1(0).b) \cdots (a - \theta_k(0).b).$$

PREUVE. – Appliquons le théorème précédent et posons $T_j := S_j \cdots S_{k-1}$. Comme on a pour $S \in \mathbb{C}[[b]$ inversible et $\lambda \in \mathbb{C}$ l'identité

$$S.(a - \lambda.b).S^{-1} = a - b.\theta(b)$$

où $\theta(b) = \lambda + b.S'.S^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned} T_1.\Pi &= T_1.(a - \lambda_1.b).T_1^{-1}.T_2.(a - \lambda_2.b).T_2^{-1}.T_3 \cdots T_{k-1}.(a - \lambda_{k-1}.b).T_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b) \\ &= (a - b.\theta_1(b)) \cdots (a - b.\theta_k(b)) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

REMARQUE. – Quand on choisit un isomorphisme $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$ avec $x = P_E + b^3.S$, la factorisation du corollaire précédent se fera avec la condition

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_j'(0) = 0.$$

PROPOSITION 3.4.4. – *Soit E un (a,b)-module monogène régulier et soit*

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

une suite exacte de (a,b)-modules. Alors F et G sont monogènes réguliers et on a l'égalité dans $\tilde{\mathcal{A}}$

$$P_E = P_F.P_G.$$

On en déduit que le polynôme de Bernstein de E est donné par la formule :

$$B_E(x) = B_F(x - rg_G).B_G(x).$$

PREUVE. – Notons $\pi : E \to G$ la surjection $\tilde{\mathcal{A}}$–linéaire à gauche de la suite exacte de l'énoncé. Soit $e \in E$ un générateur de E. Alors $\pi(e)$ est un générateur de G qui est donc monogène régulier([5]). Notons Q l'élément caractéristique de l'annulateur de $\pi(e)$ dans G. Alors la forme initiale en (a,b) de Q est P_G.

([5]) Pour l'assertion "E régulier implique F et G réguliers", voir [B. 93].

Montrons que $Q.e$ est un générateur de F. En effet si $y \in F$ écrivons $y = \xi.e$ où $\xi \in \tilde{\mathcal{A}}$. On a $\pi(y) = \xi.\pi(e) = 0$ et donc $\xi = \eta.Q$. Ceci montre que $y = \eta.Q.e$ et donc que $Q.e$ engendre F. Soit R l'élément caractéristique de son annulateur. On a donc P_F qui est la forme initiale en (a,b) de R. On a $R.Q.e = 0$ et si P est l'élement caractéristique de l'annulateur de e dans E, on aura donc $R.Q = u.P$ avec $u \in \tilde{\mathcal{A}}$. Mais les degrés des formes initiales de P, Q, R sont respectivement $rg(E), rg(G), rg(F)$ avec $rg(E) = rg(F) + rg(G)$ et elles sont unitaires de ces degrés en a. Ceci montre que la forme initiale de u vaut 1 et que l'on a $P_E = P_F.P_G$.

On obtient alors

$$b^{-rg(E)}.P_E = b^{-rg(G)}.[b^{-rg(F)}.P_F].b^{rg(G)}.b^{-rg(G)}.P_G$$

et on conclut grâce à l'identité $b^{-j}.b^{-1}.a.b^j = b^{-1}.a + j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. □

On notera que quand G est de rang 1, on aura $G \simeq E_\lambda$ et $B_G(x) = x + \lambda$. On retrouve ainsi la remarque qui suit le corollaire 3.3.2.

3.5 – *Changement de suite de Jordan-Hölder.*

Commençons par un lemme qui permettra dans presque tous les cas de permuter deux facteurs consécutifs.

Lemma 3.5.1. – *Soient λ, μ deux nombres complexes distincts et posons $\delta := \lambda - \mu \neq 0$. Soit $S \in \mathbb{C}[[b]]$ vérifiant $S(0) = 1$ et supposons que si $\delta \in \mathbb{N}^*$ on a $S_\delta = 0$ (6) ; soit $U \in \mathbb{C}[[b]]$ l'unique solution de l'équation différentielle $b.U' = \delta.(U - S)$ vérifiant $U(0) = 1$ et ne présentant pas le terme b^δ dans son développement quand $\delta \in \mathbb{N}^*$, alors on a l'identité suivante dans l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$*

$$(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\lambda - 1).b) = U^{-1}.(a - \lambda.b)U.S^{-1}.U.(a - (\mu - 1).b).U^{-1}.$$

Preuve. – Remarquons déjà que U est donné, en posant $S := \sum_{h=0}^{+\infty} S_h.b^h$, par

$$U(b) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\delta}{\delta - h}.S_h.b^h.$$

En multipliant à droite et à gauche par U il s'agit de calculer

$$U.(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\lambda - 1).b).U.$$

(6) On a noté S_δ le coefficient de b^δ dans la série $S \in \mathbb{C}[[b]]$.

Comme on a $a.U = U.a + b^2.U'$ et $b.U' = \delta.(U - S)$ cela donne

$$\begin{aligned}
&U.(a-\mu.b).S^{-1}.(a-(\lambda-1).b).U\\
&\quad = ((a-\mu.b).U - \delta.b.(U-S)).S^{-1}.(U.(a-(\lambda-1).b) + \delta.b.(U-S))\\
&\quad = ((a-\lambda.b).U.S^{-1} + \delta.b)(U.(a-(\mu-1).b) - \delta.b.S)\\
&\quad = (a-\lambda.b)U.S^{-1}.U.(a-(\mu-1).b) - (a-\lambda.b).\delta.b.U\\
&\qquad + \delta.b.U.(a-(\mu-1).b) - \delta^2.b^2.S\\
&\quad = (a-\lambda.b)U.S^{-1}.U.(a-(\mu-1).b)\\
&\qquad + \lambda.\delta.b^2.U - a.\delta.b.U + \delta.b.U.a - \delta.(\mu-1).b^2.U - \delta^2.b^2.S
\end{aligned}$$

et on conclut, en utilisant les égalités

$$\begin{aligned}
&a.(b.U) - (b.U).a = b^2.(b.U)' \quad \text{et}\\
&\delta.b^2.(b.U)' = \delta^2.b^2.U - \delta^2.b^2.S + \delta.b^2.U
\end{aligned}$$

que l'élément $\xi := \lambda.\delta.b^2.U - a.\delta.b.U + \delta.b.U.a - \delta.(\mu-1).b^2.U - \delta^2.b^2.S$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ est nul : en effet on obtient, en utilisant la relation $\lambda - \mu = \delta$:

$$\xi = \delta^2.b^2.U + \delta.b^2.U - (\delta^2.b^2.U - \delta^2.b^2.S + \delta.b^2.U) - \delta^2.b^2.S = 0.$$

□

REMARQUES.

i) Si S est un polynôme en b de degré d on notera que U est alors également un polynôme en b de degré d.

ii) On peut renverser le processus car l'équation différentielle $b.U' = \delta.(U - S)$ donne, pour $V := U^{-1}$ et $\Sigma := S.U^{-2}$, que V est solution de l'équation $b.V' = -\delta.(V - \Sigma)$ et vérifie $V(0) = 1$. On notera que le fait qu'il existe une solution $V \in \mathbb{C}[[b]]$ implique que pour $\delta \in -\mathbb{N}^*$, on a nécessairement $\Sigma_{-\delta} = 0$! □

PROPOSITION 3.5.2. – *Considérons l'élément*

$$P := S_0^{-1}.(a-\lambda_1.b).S_1^{-1}.(a-\lambda_2).S_2^{-1}\cdots(a-\lambda_{k-1}.b).S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b).S_k^{-1}$$

de $\tilde{\mathcal{A}}$ *où les* $S_0,\cdots,S_k$ *sont dans* $\mathbb{C}[[b]]$ *et vérifient* $S_j(0) = 1 \quad \forall j \in [0,k]$, *les* $\lambda_j, j \in [1,k]$ *étant des nombres complexes arbitraires. Notons* $(\mu_1,\cdots,\mu_k)$ *un élément de l'orbite tordue de* $(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ *vérifiant*

$$(@) \qquad \Re(\mu_1) + 1 \leq \Re(\mu_2) + 2 \leq \cdots \leq \Re(\mu_k) + k.$$

Alors il existe des éléments $T_0, T_1, \cdots, T_k$ *dans* $\mathbb{C}[[b]]$ *vérifiant* $T_j(0) = 1$ *pour tout* $j \in [0,k]$ *et*

$$P = T_0^{-1}.(a-\mu_1.b).T_1^{-1}.(a-\mu_2).T_2^{-1}\cdots(a-\mu_{k-1}.b).T_{k-1}^{-1}.(a-\mu_k.b).T_k^{-1}.$$

Remarque. – La preuve de la proposition montrera qu'il existe toujours un élément de l'orbite tordue de $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ vérifiant la condition (@). Elle montrera même qu'un tel élément est unique quand les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont réels. □

Preuve. – D'après le lemme précédent 3.5.1, si on a un produit de la forme $(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\lambda - 1).b)$ avec $\Re(\mu) > \Re(\lambda - 1) + 1$, on aura $\Re(\delta) < 0$ et donc on peut le remplacer par $U^{-1}.(a - \lambda.b)U.S^{-1}.U.(a - (\mu - 1).b).U^{-1}$ et maintenant on aura

$$\Re(\lambda) \leq \Re(\mu - 1) + 1$$

ce qui signifie, si i désigne le rang de $(a - \mu.b)$ dans le produit donnant P, qu' en faisant agir la transposition $t_{i,i+1}$ par l'action tordue sur $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$, on a rétabli l'ordre souhaité pour le produit entre les rangs i et $i + 1$.

Il est alors clair que l'on arrive ainsi à un élément de l'orbite tordue qui satisfait la condition demandée. Il reste alors à rejoindre l'élément $(\mu_1, \cdots, \mu_k)$ donné par une succession de transpositions de ce type. Mais d'après ce qui vient d'être dit il reste seulement à considérer des termes $(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\lambda - 1).b)$ pour lesquels $\Re(\mu) = \Re(\lambda - 1) + 1$. Deux cas sont possibles : ou bien $\lambda = \mu$ et il n'y a rien à faire, ou bien $\lambda \neq \mu$ et alors $\delta \in i.\mathbb{R}$. Le lemme 3.5.1 permet à nouveau de conclure sans restriction dans ces cas. □

Avant de donner un premier corollaire de la proposition 3.5.2 rappelons que dans la classification des (a,b)-modules réguliers de rang 2 donnée dans [B. 93] proposition 2.4, apparaît la famille de (a,b)-modules monogènes $E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$ qui est par définition, pour $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha) := \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a - (\lambda - n).b)(1 + \alpha.b^n)^{-1}.(a - (\lambda - 1).b)).$$

Lemma 3.5.3. – *Soient $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le (a,b)-module $E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$ pour admet une* **unique** *suite de Jordan-Holdër*

$$0 \to E_{\lambda-n} \to E \to E_{\lambda-1} \to 0$$

Preuve. – Notons e_1 le générateur et $e_2 := (1 + \alpha.b^n)^{-1}(a - (\lambda - 1).b).e_1$. On a ainsi une $\mathbb{C}[[b]]$−base de $E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$ et l'opérateur a est défini par les formules :

$$a.e_1 = (\lambda - 1).b.e_1 + e_2 + \alpha.b^n.e_2, \qquad a.e_2 = (\lambda - n).b.e_2.$$

Nous allons déterminer tous les sous-(a,b)-modules normaux de rang 1 de $E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$. Cela revient à déterminer les éléments $\varepsilon := S(b).e_1 + T(b).e_2$ vérifiant $a.\varepsilon = \mu.b.\varepsilon$ et $\varepsilon \notin b.E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$. On obtient immédiatement les relations

$$b.S'(b) = (\mu - \lambda + 1).S(b)$$

$$S(b).(1 + \alpha.b^n) + b^2.T'(b) = (\mu - \lambda + n).b.T(b) \tag{$*$}$$

On a donc $p := \mu - \lambda + 1 \in \mathbb{N}$ et $S(b) = c.b^p$ où $c \in \mathbb{C}$. Pour $p = 0$ l'équation $(^*)$ impose $c = 0$ et $T = 0$, cas exclu. On a donc $p \geq 1$ et $S(0) = 0$, d'où $T(0) \neq 0$. La résolution de l'équation $(^*)$ avec $S(b) = c.b^p$ donne pour $p + n - 1 = \mu - \lambda + n \neq 0$ que

$$T = c_1.b^{n+p-1} + \frac{c}{n}.b^{p-1} - c.\alpha.b^{n+p-1}.Log\, b$$

ce qui impose $c = 0$ puisque $T \in \mathbb{C}[[b]]$, et donc $S = 0$ ce qui conduit à une contradiction puisque $\mu - \lambda + n \neq 0$.

Si l'on suppose $\mu = \lambda - n$ et donc $p = 1 - n$, on retombe sur le cas $p = 0$ déjà traité. $\square$

COROLLAIRE 3.5.4. – *Soit E un (a,b)-module monogène régulier tel que son élément de Bernstein s'écrive*

$$P_E := (a - \lambda_1.b) \cdots (a - \lambda_k.b).$$

Soit $(\mu_1, \cdots, \mu_k)$ *un élément de l'orbite tordue de* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ *vérifiant la condition* (@) *de la proposition précédente. Alors il existe un générateur e de E sur* $\tilde{A}$ *dont l'annulateur est l'idéal* $\tilde{A}.Q$ *avec*

$$Q := (a - \mu_1.b).T_1^{-1}.(a - \mu_2).T_2^{-1} \cdots (a - \mu_{k-1}.b).T_{k-1}^{-1}.(a - \mu_k.b).$$

Si, de plus,E n'admet pas de sous-quotient de rang 2 *isomorphe à* $E_{\lambda,\lambda-n}(\alpha)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \geq 1$, *alors pour tout* $(\nu_1, \cdots, \nu_k)$ *dans l'orbite tordue de* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ *on peut trouver un générateur de E sur* $\tilde{A}$ *dont l'annulateur est égal à* $\tilde{A}.R$, *avec*

$$R := (a - \nu_1).X_1^{-1}.(a - \nu_2.b).X_2^{-1} \cdots (a - \nu_{k-1}.b).X_{k-1}^{-1}.(a - \nu_k.b)$$

où les X_j *sont dans* $\mathbb{C}[[b]]$ *et vérifient* $X_j(0) = 1$.

PREUVE. – La première assertion est une conséquence immédiate de la proposition 3.5.2. Pour montrer la seconde assertion, considérons sous quelles circonstances nous ne pouvons pas échanger deux facteurs consécutifs, c'est à dire sous quelles conditions le lemme 3.5.1 ne peut s'appliquer à un produit

$$(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\lambda - 1).b).$$

On doit avoir $\delta = \lambda - \mu \in \mathbb{N}^*$ et $S_\delta \neq 0$. On aura donc un sous-quotient (à savoir $F_{j+2}/F_j \subset E/F_j$) qui est de rang 2, monogène et dont le générateur est annulé par $(a - \mu.b).S^{-1}.(a - (\mu + \delta - 1).b)$, avec la condition $S_\delta \neq 0$. Ceci correspond à une $\mathbb{C}[[b]]-$base e_1, e_2 vérifiant

$$a.e_1 = (\mu + \delta - 1).b.e_1 + S(b).e_2 \qquad a.e_2 = \mu.b.e_2 \quad \text{avec} \quad S(0) = 1.$$

Soit $\delta.T(b) = \delta - 1 + S(b) - S_\delta.b^\delta$, et soit $U \in \mathbb{C}[[b]]$ la solution de l'équation différentielle $b.U' = \delta.(U - T)$ vérifiant $U(0) = 1$ et $U_\delta = 0$ (remarquer que $T_\delta = 0$). Posons alors

$$\varepsilon := e_1 + \frac{U(b) - 1}{b}.e_2.$$

On a,

$$\begin{aligned} a.\varepsilon &= (\mu + \delta - 1).b.e_1 + S(b).e_2 + \mu.(U(b) - 1).e_2 + b^2.\frac{b.U'(b) - U(b) + 1}{b^2}.e_2 \\ &= (\mu + \delta - 1).b.e_1 + (S(b) - \delta.T(b) + \delta).e_2 + (\mu + \delta - 1).(U(b) - 1).e_2 \\ &= (\mu + \delta - 1).b.\varepsilon + (1 + S_\delta.b^\delta).e_2 \end{aligned}$$

ce qui montre que ce (a,b)-module de rang 2 est isomorphe à $E_{\mu+\delta,\mu}(S_\delta)$. Comme notre hypothèse exclut cette possibilité, le corollaire est démontré. □

3.6 – *Détermination du polynôme de Bernstein.*

Le but de ce paragraphe est de determiner l'élément de Bernstein d'un sous-(a,b)-module monogène F (nécessairement régulier) d'un (a,b)-module régulier à partir de la connaissance d'un élément non nul convenable de $\tilde{\mathcal{A}}$ annulant un générateur de F. Le résultat principal que nous obtenons est le théorème suivant dont nous montrerons l'efficacité sur des exemples concrets au paragraphe 5.

THÉORÈME 3.6.1. – *Soit E un (a,b)-module régulier et soit $e \in E$ un élément annulé dans E par un élément $x \in \tilde{\mathcal{A}}$ dont la forme initiale en (a,b) est unitaire en a et de degré k. Supposons que $\tilde{\mathcal{A}}.e$ soit de rang au moins k comme (a,b)-module. Alors le (a,b)-module monogène régulier $F := \tilde{\mathcal{A}}.e$ est exactement de rang k et il a pour élément de Bernstein la forme initiale de x.*

REMARQUE. – On prendra garde que, sous les hypothèses du théorème, le $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche $\tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.x$ n'est pas, en général, un (a,b)-module régulier. A priori seule son image F dans E par le morphisme $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à gauche φ défini en posant $\varphi(1) = e$, est un (a,b)-module (monogène) régulier. □

Commençons par deux lemmes :

LEMMA 3.6.2 (Division.). – *Soit P un élément homogène de degré k en (a,b), unitaire en a. Alors pour tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ il existe $Q \in \tilde{\mathcal{A}}$ et $R \in \mathbb{C}[[b]][a]$ de degré au plus $k - 1$ en a uniques vérifiant*

$$X = Q.P + R.$$

DÉMONSTRATION. – L'unicité est facile : si $Q.P + R = 0$ en raisonnant modulo $b.\tilde{\mathcal{A}}$ on obtient $Q_0.a^k + R_0 = 0$ où $R_0 \in \mathbb{C}[a]$ est de degré $\leq k-1$. On a donc $R_0 = 0 = Q_0$. Mais comme la multiplication par b est injective dans $\tilde{\mathcal{A}}$, on se ramène immédiatement quand $(Q, R) \neq (0,0)$ au cas où $(Q_0, R_0) \neq (0,0)$ ce qui contredit le raisonnement précédent.

Écrivons $X := \sum_{\nu=0}^{\infty} X_m(a).b^m$ avec $X_m \in \mathbb{C}[a]$, et soit $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application croissante telle que l'on ait $deg(X_m) \leq \mu(m)$.

Écrivons également

$$X := \sum_{n=0}^{\infty} H_n$$

où H_n est homogène de degré n en (a, b).

La division euclidienne de H_n par P donne

$$H_n = Q_{n-k}.P + R_n$$

où R_n est homogène de degré n en (a,b) et de degré $\leq k-1$ en a et Q_{n-k} est homogène en (a,b) de degré $n-k$. On a donc $R_n \in b^{n-k+1}.\tilde{\mathcal{A}}$ pour $n \geq k$, et la série $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converge dans $\tilde{\mathcal{A}}$ vers un élément R qui est un polynôme en a de degré $\leq k-1$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[b]]$.

Montrons que la série $\sum_{n=k}^{\infty} Q_{n-k}$ converge également dans $\tilde{\mathcal{A}}$ vers un élément que l'on notera Q. Pour cela il suffit de montrer que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $Q_n \notin b^p.\tilde{\mathcal{A}}$ est fini. Mais $Q_{n-k} \notin b^p.\tilde{\mathcal{A}}$ implique $deg_a H_n \geq n-p+1$ et donc $\mu(p-1) \geq n-p+1$ puisqu'il doit exister un entier $q \leq p-1$ tel que X_q soit de degré $\geq n-p+1$. Ceci montre que l'on a $n \leq \mu(p-1) + p - 1$ dans ces conditions, ce qui prouve notre assertion.

On a alors clairement $X = Q.P + R$ puisque la multiplication (à droite par P) est continue dans $\tilde{\mathcal{A}}$. $\square$

LEMMA 3.6.3 (Inversibilité.). – *Soit* $X := \sum_{n \geq 0} P_n(a).b^n$ *un élément de* $\tilde{\mathcal{A}}$ *vérifiant* $P_0(0) = 1$. *Soit* E *un (a,b)-module régulier de rang k. Alors l'action de* X *sur* E *est bijective et pour* $e \in E$, *il existe un élément* $Y \in \tilde{\mathcal{A}}$, *que l'on peut supposer polynomial en a et de degré en a au plus égal à* $k-1$, *de terme constant égal à* 1, *tel que l'on ait dans* E *l'égalité*

$$Y.X.e = e.$$

PREUVE. – La complétion de E pour la filtration $a-$adique, qui est conséquence de la régularité de E, montre que la suite d'endomorphismes de E donnée par l'action des $T_N := \sum_{n=0}^{N} (1-X)^n$ converge vers l'inverse de l'action de X sur E. Celle-ci est donc bien bijective.

Pour $e \in E$ considérons le (a,b)-module monogène $F := \tilde{\mathcal{A}}.e \subset E$. Il est régulier de rang $l \leq k$, et il existe un polynôme P, unitaire en a, de degré l à coefficients dans $\mathbb{C}[[b]]$ et de valuation l en (a,b), tel que l'on ait un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{A}}-$modules ([7])

$$\varphi : \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P \to F$$

défini par $\varphi(1) = e$. On peut ainsi écrire dans F, pour chaque $n \geq 0$,

$$a^{l+n}.e = \sum_{j=0}^{l-1} S_{n,j}(b).a^j.e$$

où $S_{n,j} \in \mathbb{C}[[b]]$ est de valuation $\geq n$. En écrivant alors

$$T_N.e = \sum_{j=0}^{l-1} T_{N,j}(b).a^j.e$$

on constate que pour chaque j $T_{N,j} - T_{N-1,j}$ est de valuation au moins égale à $N - l$, et donc la suite $T_{N,j}$ converge dans $\mathbb{C}[[b]]$ vers un élément T_j; il reste à poser $Y := \sum_{j=0}^{l-1} T_j(b).a^j$ pour achever la démonstration. $\square$

Remarque. – On notera que le lemme ci-dessus est un résultat plus précis que la simple inversibilité de X dans $\hat{\mathcal{A}}$ le complété $a-$adique de $\tilde{\mathcal{A}}$, qui agit sur tout (a,b)-module régulier (ou même local). $\square$

La démonstration utilisera également la proposition suivante, que l'on rapprochera du théorème 3.2.1 :

Proposition 3.6.4. – *Soit $x = Q_k(a,b) + b.R_k(a,b)$ un élément de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$, où Q_k est un polynôme unitaire en a, homogène de degré $k \geq 1$ en (a,b), et où l'élément $R_k(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$ est de valuation en (a,b) au moins égale à k.*

Alors le quotient $E := \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$ est un $\mathbb{C}[[b]]-$module libre de rang k. C'est un (a,b)-module régulier.

Preuve de la proposition. – Le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.x$ est sans $b-$torsion. En effet, si $b.y = z.x$, posons $z = Q(a) + b.t$ où $Q \in \mathbb{C}[a]$ et où $t \in \tilde{\mathcal{A}}$. On obtient alors $a^k.Q(a) = 0$ dans $\mathbb{C}[a] \simeq \tilde{\mathcal{A}}/b.\tilde{\mathcal{A}}$. Et donc $Q = 0$ et $z \in b.\tilde{\mathcal{A}}$. On en déduit que $y \in \tilde{\mathcal{A}}.x$, d'où notre assertion.

Le fait que $1, a, \cdots, a^{k-1}$ forme une famille $\mathbb{C}[[b]]-$libre dans E est immédiat. Pour voir qu'elle est génératrice considérons $z_0 \in \tilde{\mathcal{A}}$ et écrivons $z_0 = u_0 + \zeta_0.x + b.z_1$

([7]) Ceci est démontré plus haut dans le théorème 3.2.1.

avec $u_0 \in \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}.a^j, \zeta_0 \in \mathbb{C}[a]$ et $z_1 \in \tilde{\mathcal{A}}$. Le fait qu'une telle écriture existe résulte immédiatement de l'égalité $\mathbb{C}[a] = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}.a^j + (a^k)$.

On construit ainsi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement dans $\tilde{\mathcal{A}}$, $\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}.a^j$ et $\mathbb{C}[a]$ vérifiant

$$z_n = u_n + \zeta_n.x + b.z_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On voit alors facilement que l'on a $z_0 = \sum_n b^n.u_n + \Big(\sum_n b^n.\zeta_n\Big).x$ où par construction $\sum_n b^n.u_n \in \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].a^j$.

Prouvons la régularité. L'égalité

$$x = a^k + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.b^j a^{k-j} + b.R_k(a,b)$$

donne dans E, pour $h \in [0, k-1]$,

$$a^{k+h} + \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,h}.b^j a^{k-j+h} \in b.\sum_{j=0}^{k} b^j a^{k-j}.E$$

et donc, dans $E[b^{-1}]$

$$(b^{-1}a)^k a^h + \sum_{j=1}^{k} \nu_{j,h}(b^{-1}a)^{k-j} a^h \in \sum_{j=0}^{k-1} (b^{-1}a)^j.E$$

ce qui montre que

$$F := \sum_{j=0}^{k-1} (b^{-1}a)^j.E$$

est stable par b et $b^{-1}a$. On en conclut que E est régulier. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.6.1. – Écrivons $x = in(P) + Q$ où la valuation de Q en (a,b) est au moins $k+1$ [8]. Comme $in(P)$ est unitaire de degré k en a, on peut écrire

$$Q = X.in(P) + R$$

[8] Attention, maintenant Q n'est plus nécessairement dans $b.\tilde{\mathcal{A}}$, on ne peut donc pas appliquer la proposition précédente.

avec R de degré $\leq k-1$ en a et X, R de valuations repectives en (a,b) au moins égales à 1 et $k+1$. Ceci résulte du lemme de division 3.6.2.

Ceci montre déjà que l'on peut réécrire $R = b^2.S$ où S est de valuation en (a,b) au moins égale à $k-1$.

On a, dans E

$$(1+X).in(P).e = -b^2.S.e$$

et on peut appliquer le lemme 3.6.3 à l'élément $in(P).e \in E$ et à l'élément $(1+X)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$, puisque X est de valuation ≥ 1 en (a,b). On en déduit l'existence de $Y \in \tilde{\mathcal{A}}$, polynôme de degré $\leq k-1$ en a, de terme constant égal à 1, tel que l'on ait dans E

$$in(P).e = -Y.b^2.S.e \in b.E.$$

On en déduit que le rang de E est au plus égal à k, donc égal à k.

Soit $Z := in(P) + Y.b^2.S$. C'est un polynôme en a qui annule e. Sa forme initiale en (a,b) est $in(P)$ qui est de degré k et unitaire en a. Le quotient $\tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.Z$ est donc un (a,b)-module régulier monogène de rang k. De plus l'application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire $\varphi : \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.Z \to E$ définie par $\varphi(1) = e$ est surjective. Son noyau est donc un (a,b)-module de rang nul. Donc φ est un isomorphisme. On conclut alors grâce au théorème 3.2.1 de la façon suivante : soit $x_I := P_E + b^2.R_I$ l'élément caractéristique de l'idéal $I := \tilde{\mathcal{A}}.Z$. Il existe un élément unitaire ([9]) $u \in \tilde{\mathcal{A}}$ tel que l'on ait $Z = u.x_I$. La comparaison des formes initiales en (a,b) donne alors $P_E = in(P)$ d'où la formule cherchée pour le polynôme de Bernstein. $\square$

REMARQUE. – Dans la situation du théorème précédent on a toujours une surjection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire à gauche $\tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.x \to E$ mais elle n'est pas,en général, injective.

4. – Développements asymptotiques standards et (a,b)-modules monogènes réguliers géométriques.

4.1 – *Écriture canonique.*

DÉFINITION 4.1.1. – *Un (a,b)-module régulier E est dit* **géométrique** *si les valeurs propres de $b^{-1}.a$ agissant sur $E^\sharp/b.E^\sharp$ sont dans $\mathbb{Q}^{*+}$, où $E^\sharp$ désigne le saturé de E par $b^{-1}.a$.*

On notera que le générateur e_λ de E_λ correspond au monôme $s^{\lambda-1}$ et que E_λ est géométrique si et seulement si la monodromie est unipotente et le monôme est localement de carré intégrable à l'origine.

([9]) C'est-à-dire dont le terme constant vaut 1.

DÉFINITION 4.1.2. – *Nous appellerons* **développement asymptotique standard** *une serie formelle du type*

$$\varphi(s) = \sum_{j\in[0,n]} \sum_{\alpha\in A} T_{j.\alpha}(s).s^{\alpha}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

où les $T_{\alpha,j}$ sont dans $\mathbb{C}[[s]]$, où $n \in \mathbb{N}$ et où A est un sous-ensemble **fini** *de $\mathbb{Q} \cap\,]-1,+\infty[$.*

Nous noterons par Ξ_N l'ensemble des DAS pour lesquels l'entier n est dans $[0,N]$, et par Ξ la réunion des Ξ_N quand N décrit $\mathbb{N}$.

Nous considérerons toujours les Ξ_N ainsi que Ξ comme des $\tilde{\mathcal{A}}-$modules à gauche, l'action de a étant donnée par multiplication par s, celle de b par la primitive sans constante. Explicitement, si l'on pose $e_{\alpha,j} := s^{\alpha}.\frac{(Logs)^j}{j!}$ on aura

$$\begin{aligned} a.e_{\alpha,j} &= e_{\alpha+1,j} \\ b.e_{\alpha,0} &= \frac{1}{\alpha+1}.e_{\alpha+1,0} \\ b.e_{\alpha,j} &= \frac{1}{\alpha+1}.e_{\alpha+1,j} - \frac{1}{\alpha+1}.b(e_{\alpha,j-1}) \qquad \text{pour} \quad j \geq 1 \end{aligned}$$

LEMMA 4.1.3. – *Tout $\varphi \in \Xi_n$ admet une écriture unique de la forme*

$$\text{(Can)} \qquad \sum_{\alpha\in A_\varphi} S_{\alpha,j}(b).s^{\alpha}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

où les $S_{\alpha,j}$ sont dans $\mathbb{C}[[b]]$, où A_φ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q} \cap (]-1,+\infty[\times [0,n])$, les conditions suivantes étant réalisées :

i) *L'ensemble A_φ est saturé, c'est à dire que $(\alpha,j) \in A_\varphi$ implique $(\alpha,i) \in A_\varphi$ pour chaque $i \in [0,j]$.*
ii) *Pour chaque $(\alpha,j) \in A_\varphi$ on a, ou bien $S_{\alpha,j} \equiv 0$, ou bien $S_{\alpha,j}(0) \neq 0$.*
iii) *Si $(\alpha,j) \in A_\varphi$ il existe $k \geq j$ tel que $S_{\alpha,k}(0) \neq 0$.*
iv) *Si $(\alpha,j) \in A_\varphi$ vérifie $S_{\alpha,j} \neq 0$ et si $(\alpha+p,j) \in A_\varphi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ on a $S_{\alpha+p,j} \equiv 0$.*

REMARQUE. – En combinant les conditions iii) et iv) ci-dessus, on obtient que si $(\alpha,j) \in A_\varphi$ vérifie $S_{\alpha,j} \neq 0$ et si on a $(\alpha+p,j) \in A_\varphi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $k > j$ tel que $(\alpha+p,k) \in A_\varphi$ et $S_{\alpha+p,k} \neq 0$. □

L'écriture donnée dans le lemme précédent pour un DAS φ sera appelé **l'écriture canonique** de ce DAS.

On dira que φ est de **poids** p si dans son écriture canonique le cardinal de l'ensemble A_φ est égal à p.

EXEMPLE. – Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ l'écriture canonique de la fonction

$$\varphi = s^\alpha.Logs + s^{\alpha+1}.Logs$$

est donnée par $\varphi := (1+(\alpha+1).b).s^\alpha.Logs + \dfrac{1}{\alpha+1}.s^{\alpha+1}$, puisque l'on a $(\alpha+1).b(s^\alpha Logs) = s^{\alpha+1}.Logs - \dfrac{1}{\alpha+1}.s^{\alpha+1}$. □

PREUVE. – Comme pour $\alpha \in]-1,0] \cap \mathbb{Q}$ les sous-$\tilde{\mathcal{A}}$–modules :

$$\Xi_{\alpha,n} := \sum_{j\in[0,n]} \sum_{p\in\mathbb{N}} S_{\alpha+p,j}(b).s^{\alpha+p} \frac{Logs)^j}{j!}$$

sont en somme directe dans Ξ_n, il suffit de prouver le lemme dans le cas où $\varphi \in \Xi_{\alpha,n}$ où $\alpha \in]-1,0] \cap \mathbb{Q}$ sera fixé dans la suite.

Supposons que l'on ait écrit

$$\varphi = \sum_{(\alpha+p,j)\in A} S_{\alpha+p,j}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

les conditions i) à iv) étant remplies. Posons

$$j_0 := \sup\{j \in [0,n] / \exists p \in \mathbb{N} \quad (\alpha+p,j) \in A\}.$$

Nous noterons p_0 le plus petit entier tel que $(\alpha+p_0,j_0) \in A$ et $S_{\alpha+p_0,j_0} \neq 0$. On notera qu'en fait les conditions iii) et iv) impliquent qu'en fait p_0 est le seul entier p tel que $(\alpha+p,j_0)$ soit dans A avec $S_{\alpha+p,j_0} \neq 0$. C'est donc le plus grand entier p tel que $(\alpha+p,j_0)$ soit dans A d'après la condition iii).

Considérons maintenant les $j < j_0$ pour lesquels on a $S_{\alpha+p_0,j} \equiv 0$. Ou bien ceci a lieu pour tous les $j \in [0,j_0-1]$, et dans ce cas nous poserons

$$A' := A \setminus \{(\alpha+p_0,0),\dots,(\alpha+p_0,j_0)\}$$

ou bien nous noterons par j_1 le plus grand entier dans $[0,j_0-1]$ tel que $S_{\alpha+p_0,j_1}(0) \neq 0$, et nous poserons

$$A' := A \setminus \{(\alpha+p_0,j_1+1),\dots,(\alpha+p_0,j_0)\}.$$

Posons alors :

$$\psi := \varphi - S_{\alpha+p_0,j_0}(b).s^{\alpha_0+p_0}\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} = \sum_{(\alpha+p,j)\in A'} S_{\alpha+p,j}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

et montrons que les conditions i) à iv) sont vérifiées pour cette écriture de ψ.

Les propriétés i) et ii) sont claires. Pour vérifier iii) il suffit de regarder le cas où $(\alpha + p_0, j) \in A'$ vérifie $S_{\alpha+p_0,j} \equiv 0$, ce qui ne peut arriver que dans le cas où j_1 existe. Mais alors on a $j \leq j_1$ et on peut prendre $k = j_1$.

La propriété iv) est évidente car A' est un sous-ensemble de A et on n'a pas changer la valeur des $S_{\alpha,j}$.

Nous pouvons maintenant montrer par récurrence sur le poids de φ, l'unicité de l'écriture canonique. Supposons donc l'unicité montrée pour une écriture canonique de poids $\leq p - 1$. On part donc de deux écritures canoniques

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{(\alpha+p,j)\in A} S_{\alpha+p,j}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^j}{j!} \\ &= \sum_{(\alpha+q,h)\in B} T_{\alpha+q,h}(b).s^{\alpha+q}.\frac{(Logs)^h}{h!} \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que les entiers j_0 puis p_0 sont les mêmes pour A et B. En effet, j_0 correspond à l'exposant maximal de $Logs$ et $\alpha + p_0$ l'exposant minimal de s pour $(Logs)^{j_0}$. Il est aussi facile de vérifier que pour construire A' et B' on enlève le même ensemble à A et B.

Il nous reste alors à montrer que

$$\psi := \varphi - S_{\alpha+p_0,j_0}(b).s^{\alpha_0+p_0}\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$$

$$\psi_1 := \varphi - T_{\alpha+p_0,j_0}(b).s^{\alpha_0+p_0}\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$$

coïncident pour pouvoir conclure grâce à l'hypothèse de récurrence. Comme ψ et ψ_1 ne présentent plus que des termes dont les puissances de $Logs$ sont au plus égale à $j_0 - 1$, l'égalité cherchée résulte du fait que si $U \in \mathbb{C}[[b]]$ est telle que $U(b).s^{\alpha_0+p_0}\dfrac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$ ne présente plus que des termes dont les puissances de $Logs$ sont au plus égale à $j_0 - 1$, alors U est nul. On a donc $S_{\alpha_0+p_0,j_0} = T_{\alpha_0+p_0,j_0}$ et $\psi = \psi_1$.

On a donc montré l'unicité de l'écriture canonique.

L'existence d'une écriture

$$\varphi = \sum_{(\alpha+p,j)\in A} S_{\alpha+p,j}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

avec A fini (mais arbitraire) est un exercice simple laissé au lecteur. Pour passer à une écriture dans laquelle A vérifie les conditions i) à iv), faisons une récurrence sur la puissance maximale j_0 de $Logs$ qui apparait dans φ.

Considérons donc les termes correspondant à la puissance maximale j_0 de $Logs$.

Pour $S_{\alpha,j_0}(b) = b^p.T$ avec $T(0) \neq 0$, remplacons dans l'ensemble A l'élément (α, j_0) par $(\alpha+p, 0), \cdots, (\alpha+p, j_0)$, et écrivons

$$T(b).b^p.s^\alpha.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} = \sum_{h=0}^{j_0} T_{\alpha+p,h}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^h}{h!}.$$

On notera que maintenant on a $T_{\alpha+p,j_0}(0) \neq 0$.

Par ailleurs on peut regrouper les différents termes de la forme $T_{\alpha+p,j_0}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$ venant de différents $\alpha+p$ en constatant que l'on a, pour $p < q$

$$T_{\alpha+p,j_0}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} + T_{\alpha+q,j_0}(b).s^{\alpha+q}.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} =$$

$$(T_{\alpha+p,j_0}(b) + b^{q-p}.T_{\alpha+q,j_0}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} + \sum_{h<j_0} termes(\frac{(Logs)^h}{h!}),$$

et $T_{\alpha+p,j_0}(b) + b^{q-p}.T_{\alpha+q,j_0}(b)$ est inversible dans $\mathbb{C}[[b]]$ dès que $T_{\alpha+p,j_0}(b)$ l'est.

On retranche à φ le terme $T_{\alpha+p_0,j_0}(b).s^{\alpha+p}.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$ obtenu après regroupement (donc p_0 est minimal), et on applique l'hypothèse de récurrence sur j_0.

Il est alors facile de voir que l'on arrive à une écriture canonique pour φ en complétant l'ensemble A' donné par l'hypothèse de récurrence pour qu'il contienne $(\alpha+p_0, 0), \cdots, (\alpha+p_0, j_0)$. □

4.2 – *Le théorème de réalisation.*

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Nous munirons $\Xi_n \otimes_{\mathbb{C}} V$ de la structure de $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche définie par $a.(\xi \otimes v) = (a.\xi) \otimes v$ et pour $S \in \mathbb{C}[[b]]$ par $S(b).(\xi \otimes v) = (S(b).\xi) \otimes v$. On a alors le théorème de réalisation suivant pour tout (a,b)-module géométrique.

THÉORÈME 4.2.1. – *Soit $\varphi \in \Xi_n$. Alors*

1. *$E := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi \subset \Xi_n$ est un (a,b)-module régulier monogène géométrique.*
2. *Il existe des* **polynômes** *$T_{\alpha,j} \in \mathbb{C}[b]$ vérifiant $T_{\alpha,j}(0) \neq 0$ et tels que si $\psi := \sum_{(\alpha,j)\in A} T_{\alpha,j}(b).s^\alpha.(Log\, s)^j$ le (a,b)-module $F := \tilde{\mathcal{A}}.\psi \subset \Xi_n$ soit isomorphe à E.*
3. *Tout (a,b)-module régulier géométrique de rang k est isomorphe à un sous-(a,b)-module de $\Xi_n \otimes_{\mathbb{C}} V$, pour un entier n assez grand et V un espace vectoriel complexe de dimension $\leq k$.*

DÉMONSTRATION. – Montrons la propriété 1 par récurrence sur le poids de φ. L'assertion étant triviale pour le poids 1 supposons l'assertion montrée pour les poids $\leq k-1$ et considérons φ de poids k. Soit $(\alpha,j) \in A_\varphi$ avec j maximal l'exposant α étant donné. Remarquons que dans ces conditions on a $S_{\alpha,j}(0) \neq 0$ d'après les propriétes ii) et iii) de l'écriture canonique ; donc $S_{\alpha,j}(b)$ est un inversible de $\mathbb{C}[[b]]$. Considérons alors $\psi := (a-\alpha.b).S_{\alpha,j}^{-1}.\varphi$. Il est facile de voir que dans l'écriture canonique de ψ on a $A_\psi \subset A_\varphi + 1$ où $A+1 := \{(\beta+1,j)/\ (\beta,j) \in A\}$, et que $(\alpha+1,j) \notin A_\psi$. Donc le poids de ψ est $\leq k-1$. Alors l'hypothèse de récurrence donne que $\tilde{\mathcal{A}}.\psi$ est (a,b)-module régulier monogène géométrique.

Mais la relation entre φ et ψ donne la suite exacte

$$0 \to \tilde{\mathcal{A}}.\psi \to \tilde{\mathcal{A}}.\varphi \xrightarrow{\pi} E_{\alpha+1} \to 0$$

où $\pi(S_{\alpha,j}^{-1}.\varphi) := e_\alpha$. On en déduit que $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi$ est régulier géométrique puisque $\alpha+1>0$ est rationnel.

L'assertion 2 est conséquence immédiate du théorème 3.4.1.

Montrons l'assertion 3 par récurrence sur le rang de E. On se ramène alors à montrer que si on a une suite exacte

$$0 \to F \to E \xrightarrow{\pi} E_\alpha \to 0$$

avec E géométrique (ce qui implique que α est rationnel et strictement positif) et F isomorphe à un sous-module de $\Xi_n \otimes V$ via un plongement $\tilde{\mathcal{A}}$−linéaire $g : F \to \Xi_n \otimes V$, grâce à l'hypothèse de récurrence, alors E est isomorphe à un sous-module de $\Xi_{n+1} \otimes W$. Soit $e \in E$ un élément de E vérifiant $\pi(e) = e_\alpha$. Alors $z := (a-\alpha.b).e$ qui est dans F. Posons $g((a-\alpha.b).e) = \sum_{p=1}^{q} \psi_p \otimes v_p$. On voit donc que le problème consiste alors à trouver des $\varphi_p \in \Xi_{n+1}, p \in [1,q]$ tels que $(a-\alpha.b).\varphi_p = \psi_p$. C'est un exercice simple de montrer que de tels φ_p existent toujours. On définit alors $W := V \oplus \mathbb{C}.\varepsilon$ et une application $\tilde{\mathcal{A}}$−linéaire $f : E \to \Xi_{n+1} \otimes (V \oplus \mathbb{C}.\varepsilon)$ en posant $f(e) = \sum_{p=1}^{q} \varphi_p \otimes v_p + s^{\alpha-1} \otimes \varepsilon$, et $f(x) = g(x)$ pour $x \in F$, sous réserve de vérifier que si $u \in \tilde{\mathcal{A}}$ vérifie $u.e = y \in F$ on a bien $u.f(e) = g(y)$ dans $\Xi_{n+1} \otimes W$. Mais notre construction montre que l'idéal annulateur de e dans $E/F \simeq E_\alpha$ est $\tilde{\mathcal{A}}.(a-\alpha.b)$. On a donc $u = u_1.(a-\alpha.b)$, et on a donc $u.e = u_1.z$

$$\begin{aligned} u.f(e) &= u_1.(a-\alpha.b)\left[\sum_{p=1}^{q} \varphi_p \otimes v_p + s^{\alpha-1} \otimes \varepsilon\right] \\ &= \sum_{p=1}^{q} (u_1.\psi_p) \otimes v_p = g(u_1.z) \end{aligned}$$

puisque $g(z) = \sum_{p=1}^{q} \psi_p \otimes v_p$. □

Remarque. – On notera que si on omet le terme $s^{\alpha-1} \otimes \varepsilon$ dans la preuve précédente, on obtient bien une application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire f de E dans $\Xi_{n+1} \otimes V$ dont la restriction à F est bien g, mais il est possible que f ne soit pas injective. C'est par exemple le cas pour $E := E_{\lambda+k,\lambda} \simeq \mathbb{C}[[b]].e_1 \oplus \mathbb{C}[[b]].e_2$ avec $k \in \mathbb{N}^*, \lambda - 1 \in \mathbb{Q}^{+*}$ où a est défini par les relations

$$a.e_1 = e_2 + (\lambda + k - 1).b.e_1, \qquad a.e_2 = \lambda.b.e_2$$

et où $g(e_2) := s^{\lambda-1} \in \Xi_0$. En effet la relation $(a - (\lambda + k - 1).b).e_1 = e_2$ imposera de choisir $f(e_1) = c.s^{\lambda+k-2} - \frac{\lambda-1}{k}.s^{\lambda-2}$. On constate alors que l'image de f est contenue dans $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-2} \simeq E_{\lambda-1}$ qui est de rang 1.

On notera que nous avons choisi un (a,b)-module **monogène** géométrique dans l'exemple précédent, pour bien montrer que le problème ne vient pas seulement du cas où l'on cherche à étendre à $E_\lambda \oplus E_\lambda$ le plongement standard de E_λ dans Ξ_0. □

4.3 – *Exposants.*

Définition 4.3.1. – *Soit E un (a,b)-module géométrique et soit $\Lambda \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Nous appellerons $\Lambda-$exposant de E, noté $exp_\Lambda(E)$ le plus petit $\lambda \in \Lambda$ tel que $b^{-1}.a - \lambda$ ne soit pas injectif sur $E^\sharp/b.E^\sharp$ où $E^\sharp$ désigne le saturé de E par $b^{-1}.a$.*

On notera que pour $\lambda \in \Lambda$ la condition $\lambda < exp_\Lambda(E)$ implique que $-\lambda$ n'est pas racine du polynôme de Bernstein B_E, puisque ce dernier est le polynôme minimal de l'action de $-b^{-1}.a$ sur $E^\sharp/b.E^\sharp$.

Lemma 4.3.2. – *Soit $E = \tilde{\mathcal{A}}.e$ un (a,b)-module monogène géométrique.*
Soit $\lambda \in \mathbb{Q}^{*+}$ vérifiant $\lambda < exp(E)$ et soit S un élément inversible de $\mathbb{C}[[b]]$. Posons $F := \tilde{\mathcal{A}}.(a - \lambda.b).S^{-1}.e \subset E$. Alors on a $rg(F) = rg(E)$.

Preuve. – Quitte à remplacer e par $S^{-1}.e$ on peut supposer que $S = 1$. Soit Q un générateur “standard” (voir le théorème 3.2.1) de l'annulateur de $(a - \lambda.b).e$ dans F dont la forme initiale est de degré $l = rg(F)$ et est unitaire en a. On aura $Q.(a - \lambda.b).e = 0$ dans E, et donc $Q.(a - \lambda.b) \in I$, l'annulateur de e. Ceci implique que les éléments de Bernstein P_F et P_E vérifient une égalité de la forme

$$P_F.(a - \lambda.b) = R.P_E$$

où R est homogène de degré $k - l$ et unitaire en a. Si on a $l < k$, alors on aura $R = 1$ (on notera qu'il est évident à priori, d'après le lemme 3.1.2 que le rang de F est égal à k ou $k - 1$). Posons $P_E = (a - \lambda_1.b) \dots (a - \lambda_k.b)$. D'après la proposition 2.0.2 ceci montre qu'il existe $j \in [1, k]$ tel que $\lambda_j + k - j = \lambda$, contredisant notre hypothèse. On a donc R qui est de degré 1 et $l = k$. □

DÉFINITION 4.3.3. – *Soit $\varphi \in \Xi$ et soit A_φ l'ensemble saturé intervenant dans l'écriture canonique de φ (voir le lemme* 4.1.3*). Notons $\tilde{\pi} : A_\varphi \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la composée de l'application de projection $\pi : A_\varphi \to \mathbb{Q}^{*+}$ et de l'application quotient. Pour $\Lambda \in \tilde{\pi}$ posons*

$$n(\Lambda) := \sup\{j \in \mathbb{N} \ / \ \exists(\alpha, j) \in A_\varphi \quad avec \quad \alpha \in \Lambda \quad et \quad S_{\alpha,j}(0) \neq 0\}.$$

Posons également pour $\Lambda \in \tilde{\pi}(A_\varphi)$

$$\Lambda^+ := \sup\{\alpha \in \Lambda \ / \ (\alpha, n(\Lambda)) \in A_\varphi \quad et \quad S_{\alpha,n(\Lambda)}(0) \neq 0\}.$$

PROPOSITION 4.3.4. – *Soit $\varphi \in \Xi$ et soit*

$$\varphi = \sum_{(\alpha,j)\in A} S_{\alpha,j}(b).s^\alpha.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

son écriture canonique. Alors le rang de $E := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi \subset \Xi$ est donné par la formule suivante

$$rg(E) = \sum_{\Lambda\in\tilde{\pi}(A_\varphi)} n(\Lambda).$$

Pour chaque $\Lambda \in \tilde{\pi}(A_\varphi)$ le polynôme de Bernstein de E contient exactement $n(\Lambda)$ racines dans $-\Lambda$ en comptant les multiplicités. De plus il admet nécessairement $-\Lambda^+$ comme racine.

On voit donc que l'on peut lire sur le polynôme de Bernstein dans le cas d'un (a,b)-module monogène géométrique une bonne partie des informations sur les monômes intervenant dans l'écriture canonique d'un générateur.

PREUVE. – Nous allons montrer les assertions de la proposition dans ce cas par récurrence sur j_0 la puissance maximale des logarithmes intervenant dans le développement de φ.

Pour $j_0 = 0$ l'écriture canonique de φ se réduit à

$$\varphi = \sum_{(\alpha,0)\in A_\varphi} S_{\alpha,0}(b).s^\alpha$$

où l'on a $S_{\alpha,0}(0) \neq 0$ pour chaque $(\alpha, 0) \in A_\varphi$, et si $\alpha \neq \beta$ sont dans A_φ, ils ne sont pas congrus modulo $\mathbb{Z}$ à cause des propriétés iii) et iv). Le rang est alors clairement le cardinal de A ce qui correspond bien à la formule de l'énoncé dans ce cas.

De même le calcul de l'élément de Bernstein de $E := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi$ est immédiat dans ce cas, et on en déduit que $B_E(x) = \prod_{\alpha\in A_\varphi} (x + \alpha + 1)$.

Supposons donc la proposition démontrée quand l'exposant maximal des logarithmes est $\leq j_0 - 1$, et montrons-la quand φ a des exposants de logarithmes majorés par j_0.

Considérons déjà le cas où on a un seul terme $S_{\alpha,j_0}(b).s^\alpha.\dfrac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}$ de l'écriture canonique qui a l'exposant j_0 pour le logarithme. Quitte à considérer $S^{-1}_{\alpha,j_0}(b).\varphi$, ce qui ne change pas le (a,b)-module E considéré, on peut supposer que l'on a

$$\varphi = s^\alpha.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!} + \psi$$

où ψ ne présente plus de logarithme avec exposant j_0. Alors

$$\varphi_1 := (a - (\alpha+1).b)[\varphi]$$

satisfait l'hypothèse de récurrence. Donc le (a,b)-module $F := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi_1$ a son rang donné par la formule

$$rg(F) = \sum_{M \in \tilde{\pi}(A_{\varphi_1})} n(M)$$

où A_{φ_1} indexe l'écriture canonique de φ_1 :

$$\varphi_1 = \sum_{(\beta,j)\in A_{\varphi_1}} T_{\beta,j}(b).s^\beta.\frac{(Logs)^j}{j!}.$$

Mais on constate facilement que pour $\Lambda \neq [\alpha]$ on a $n(\Lambda)_{\varphi_1} = n(\Lambda)_\varphi$. Montrons que pour $\Lambda = [\alpha]$ on a $n(\Lambda)_{\varphi_1} = n(\Lambda)_\varphi - 1$. L'inégalité $\leq$ est claire puisque φ_1 n'a plus que des exposant $\leq j_0 - 1$ en $Logs$. Par ailleurs

$$(a - (\alpha+1).b)(s^\alpha.\frac{(Logs)^{j_0}}{j_0!}) = \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}.\frac{(Logs)^{j_0-1}}{(j_0-1)!} + termes\{(Logs)^h, h \leqslant j-2\}$$

montre que $(\alpha+1, j_0-1) \in A_{\varphi_1}$, et que $T_{\alpha+1,j_0-1}(0) \neq 0$. On a donc dans ce cas $n(\Lambda)_{\varphi_1} = j_0 - 1$.

Une récurrence facile sur le nombre de $\Lambda \in \tilde{\pi}(A_\varphi)$ pour lesquelles on a $n(\Lambda) = j_0$ permet d'achever la démonstration du calcul du rang.

La preuve ci-dessus montre que pour $\Lambda \in \tilde{\pi}(A_\varphi)$ le nombre $-\Lambda^+$ est racine du polynôme de Bernstein de $E := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi$. L'assertion sur le nombre de racines dans $\Lambda \in \tilde{\pi}(A_\varphi)$ découle de la récurrence précédente. $\square$

5. – Calculs d'exemples.

5.1 – *Le cas de* $f(z,y) = x^5 + y^5 + x^2.y^2$.

On comparera les calculs qui suivent avec ceux de [Sc.78].

5.1.1 – Annuler le générateur.

Dans ce paragraphe nous commencerons par expliciter un polynôme en (a,b) qui annule l'élément 1 du (a,b)-module de Brieskorn de $f(x,y) := x^5 + y^5 + x^2.y^2$. Ceci correspond aux intégrales du type

$$\int_{\gamma_s} \frac{dx \wedge dy}{df}$$

où $(\gamma_s)_{s \in D}$ est une famille horizontale de $1-$cycles compacts dans les fibres de f

LEMMA 5.1.1. – *On a*

$$x^{10}.y^{10} = (5a - 18b)(5a - 14b)(5a - 10b)(5a - 6b)(5a - 2b)(1).$$

PREUVE. – Commençons par montrer que l'on a

$$x^{p+5}.y^p = x^p.y^{p+5} \tag{a}$$

pour tout entier $p \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} b(x^p.y^p) &= (5x^4 + 2x.y^2)\frac{1}{p+1}x^{p+1}.y^p = \frac{1}{p+1}\left[5x^{p+5}.y^p + 2x^{p+2}.y^{p+2}\right] \\ &= (5y^4 + 2x^2.y)\frac{1}{p+1}x^p.y^{p+1} = \frac{1}{p+1}\left[5x^p.y^{p+5} + 2x^{p+2}.y^{p+2}\right] \end{aligned} \tag{b}$$

ce qui donne l'égalité annoncée. On en déduit que

$$a(x^p.y^p) = 2x^{p+5}.y^p + x^{p+2}.y^{p+2} \tag{c}$$

et en combinant avec (b) cela donne

$$(5a - 2(p+1).b)(x^p.y^p) = x^{p+2}.y^{p+2} \tag{d}$$

ce qui permet de conclure. □

LEMMA 5.1.2. – *On a*

$$(a - 4b)(x^5.y^{10}) = \frac{-1}{2}.x^{10}.y^{10} \tag{e}$$

PREUVE. – On a

$$b(x^5.y^{10}) = (5x^4 + 2x.y^2)\frac{1}{6}x^6.y^{10} = \frac{1}{6}\left[5x^{10}.y^{10} + 2x^7.y^{12}\right] \tag{f}$$

$$b(x^5.y^{10}) = (5y^4 + 2x^2.y)\frac{1}{11}x^5.y^{11} = \frac{1}{11}\left[5x^5.y^{15} + 2x^7.y^{12}\right] \tag{g}$$

$$a(x^5.y^{10}) = x^{10}.y^{10} + x^5.y^{15} + x^7.y^{12} \tag{h}$$

ce qui donne successivement, en combinant (h) et (g) puis avec (f)

$$(5a-11b)(x^5.y^{10}) = 5x^{10}.y^{10} + 3x^7.y^{12}$$

$$(10a-40b)(x^5.y^{10}) = -5x^{10}.y^{10}$$

d'où l'égalité annoncée. □

LEMMA 5.1.3. – *On a aussi*

(i) $$(2a-b)(1) = -x^5$$

(i′) $$(2a-3b)(x^5) = -x^5.y^5$$

(i″) $$(a-3b)(x^5.y^5) = \frac{-1}{2}x^5.y^{10}$$

PREUVE. – Comme on a $x^5 = y^5$, on aura $a(1) = 2x^5 + x^2.y^2$ et $b(1) = 5x^5 + 2x^2.y^2$. D'où la première égalité. De même, $a(x^5) = x^{10} + x^5.y^5 + x^7.y^2$ et

$$b(x^5) = (5x^4 + 2x.y^2)\frac{x^6}{6} = \frac{1}{6}[5x^{10} + 2x^7.y^2] = (5y^4 + 2x^2.y)x^5.y = 5x^5.y^5 + 2x^7.y^2$$

ce qui donne $x^{10} = 6x^5.y^5 + 2x^7.y^2$ d'où $a(x^5) = 7x^5.y^5 + 3x^7.y^2$ et permet de conclure pour (i′).

Utilisons (a) pour $p = 5$:

$$b(x^5.y^5) = (5x^4 + 2xy^2)\frac{1}{6}x^6.y^5 = \frac{1}{6}\left[5x^{10}.y^5 + 2x^7.y^7\right] \quad \text{et}$$

$$a(x^5.y^5) = 2x^{10}.y^5 + x^7.y^7 \quad \text{donnent}$$

$$(a-3b)(x^5.y^5) = \frac{-1}{2}x^5.y^{10}$$

et donc (i″). □

CONCLUSION. – On a donc

$$4(a-4b)(a-3b)(2a-3b)(2a-b)(1)$$
$$= (5a-18b)(5a-14b)(5a-10b)(5a-6b)(5a-2b)(1)$$

et donc l'élément

$$(5a-18b)(5a-14b)(5a-10b)(5a-6b)(5a-2b) - (2a-8b)(2a-6b)(2a-3b)(2a-b)$$

est dans l'annulateur de 1 dans le module de Brieskorn de f.

Traitons maintenant le cas du (a,b)-module engendré par le monôme x.

LEMMA 5.1.4. – *On a*

$$x^{11}.y^{10} = (5a-19b)(5a-15b)(5a-11b)(5a-7b)(5a-3b)[x].$$

PREUVE. – Posons $\alpha_p := x^{2p+1}.y^{2p}$ pour chaque $p \geq 0$. On a

$$b(\alpha_p) = (5x^4 + 2x.y^2)\,\frac{x^{2p+2}.y^{2p}}{2p+2} = \frac{1}{2p+2}\left[5x^{2p+6}.y^{2p} + 2x^{2p+3}.y^{2p+2}\right]$$

$$b(\alpha_p) = (5y^4 + 2x^2.y)\,\frac{x^{2p+1}.y^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\left[5x^{2p+1}.y^{2p+5} + 2x^{2p+3}.y^{2p+2}\right]$$

$$a(\alpha_p) = x^{2p+6}.y^{2p} + x^{2p+1}.y^{2p+5} + x^{2p+3}.y^{2p+2}$$

On en déduit que l'on a pour chaque $p \geq 0$

$$(5a-(4p+3)b)[\alpha_p] = \alpha_{p+1}$$

ce qui permet de conclure puisque $\alpha_0 = x$ et $\alpha_5 = x^{11}.y^{10}$. □

LEMMA 5.1.5. – *On a*

$$\left(a - \frac{42}{10}b\right)\left(a - \frac{27}{10}b\right)\left(a - \frac{23}{10}b\right)\left(a - \frac{8}{10}b\right)(x) = \frac{1}{16}.x^{11}.y^{10}.$$

PREUVE. – Calculons successivement les monômes $x^6, x^{11}, x^{11}.y^5$ et $x^{11}.y^{10}$.

$$b(x) = (5x^4 + 2x.y^2)\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\left[5x^6 + 2x^3.y^2\right]$$

ce qui donne, puisque $x^3.y^2 = \alpha_1 = (5a-3b)(x)$

(t) $\quad 5x^6 = 2b(x) - 2(5a-3b)(x) = (5b-10a)(x) \quad$ soit $\; -5x^6 = (10a-8b)(x)$

Puis

$$b(x^6) = (5x^4 + 2x.y^2)\frac{x^7}{7} = \frac{1}{7}\left[5x^{11} + 2x^8.y^2\right]$$
$$b(x^6) = (5y^4 + 2x^2.y)x^6.y = 5x^6.y^5 + 2x^8.y^2$$
$$a(x^6) = x^{11} + x^6.y^5 + x^8.y^2$$

ce qui donne

(u) $$-5x^{11} = (10a-23b)(x^6)$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
b(x^{11}) &= (5x^4 + 2x.y^2)\frac{x^{12}}{12} = \frac{1}{12}\left[5x^{16} + 2x^{13}.y^2\right]\\
b(x^{11}) &= (5y^4 + 2x^2.y)x^{11}.y = 5x^{11}.y^5 + 2x^{13}.y^2\\
a(x^{11}) &= x^{16} + x^{11}.y^5 + x^{13}.y^2
\end{aligned}$$

ce qui donne

(v) $$-5x^{11}.y^5 = (10a - 27b)(x^{11})$$

Et enfin

$$\begin{aligned}
b(x^{11}.y^5) &= (5x^4 + 2x.y^2)\frac{x^{12}.y^5}{12} = \frac{1}{12}\left[5x^{16}.y^5 + 2x^{13}.y^7\right]\\
b(x^{11}.y^5) &= (5y^4 + 2x^2.y)\frac{x^{11}.y^6}{6} = \frac{1}{6}\left[5x^{11}.y^{10} + 2x^{13}.y^7\right]\\
a(x^{11}.y^5) &= x^{16}.y5 + x^{11}.y^{10} + x^{13}.y^7
\end{aligned}$$

ce qui donne

(w) $$-5x^{11}.y^{10} = (10a - 42b)(x^{11}.y^5)$$

On en conclut donc que l'on a bien

$$(10a - 42b)(10a - 27b)(10a - 23b)(10a - 8b)(x) = 625.x^{11}.y^{10}.$$ □

Traitons enfin le cas du monôme xy.

LEMMA 5.1.6. – *Posons* $\alpha_p := x^{2p+1}.y^{2p+1}$ *pour* $p \geq 0$. *On a*

$$(5a - 4(p+1)b)(\alpha_p) = \alpha_{p+1}$$

ce qui donne

$$x^{11}.y^{11} = (5a - 20b)(5a - 16b)(5a - 12b)(5a - 8b)(5a - 4b)[xy].$$

Le calcul, analogue aux précédents, est laissé au lecteur.

LEMMA 5.1.7. – *On a*

$$\frac{1}{16}x^{11}.y^{11} = (2a - 9b)(2a - 6b)(2a - 5b)(2a - b)[xy].$$

PREUVE. – Le lecteur, en s'inspirant des calculs précédents, prouvera sans difficultés les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(2a-2b)[xy] = -x^6.y\\
&(2a-5b)(x^6.y) = -x^{11}.y\\
&(2a-6b)(x^{11}.y) = -x^{11}.y^6\\
&(2a-9b)(x^{11}.y^6) = -x^{11}.y^{11}
\end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion. □

5.1.2 – Application.

Le but de ce paragraphe est de montrer que le (a,b)-module (monogène) engendré par 1 dans le module de Brieskorn de $f(x,y) = x^5 + y^5 + x^2.y^2$ est de rang 4 et que son polynôme de Bernstein est

$$(x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Pour le monôme x on trouve que le polynôme de Bernstein vaut

$$\left(x+\frac{6}{5}\right)\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{13}{10}\right)\left(x+\frac{7}{10}\right).$$

Pour le monôme xy on trouve que le polynôme de Bernstein vaut

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Pour cela, compte tenu des paragraphes précédents, il nous suffit de prouver que les éléments $1, a(1), a^2(1), a^3(1)$ sont linéairement indépendants dans le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\tilde{\mathcal{A}}.1/b.\tilde{\mathcal{A}}.1$.

La vérification analogue pour les monômes x et xy est laissée au lecteur.

Considerons donc une relation du type

$$\lambda_0.1 + \lambda_1.a(1) + \lambda_2.a^2(1) + \lambda_3.a^3(1) \in b.\tilde{\mathcal{A}}.1.$$

Comme 1 et $x^2.y^2$ sont linéairement indépendants modulo l'idéal jacobien de f, on en déduit que nécessairement on a $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.

Montrons que $x^4.y^4$ et $x^6.y^6$ ne sont pas dans $b.\tilde{\mathcal{A}}.1$. Cela résulte de la liste suivante [10] qui engendre les polynômes de degrés ≤ 15 en (x,y) qui

[10] on utilise ici les égalités de symétrie en (x,y) prouvées au lemme 5.1.1.

sont dans $b.\tilde{\mathcal{A}}.1$:

$$b(1) = 5x^5 + 2x^2y^2$$
$$b(x^2.y^2) = \frac{5}{2}x^7.y^2 + x^4.y^4$$
$$b(x^5) = \frac{1}{6}[5x^{10} + 2x^7.y^2]$$
$$b(x^4.y^4) = x^9.y^4 + \frac{2}{5}x^6.y^6$$
$$b(x^7.y^2) = \frac{1}{8}[x^{12}.y^2 + 2x^9.y^4]$$
$$b(x^{10}) = \frac{1}{11}[5x^{15} + 2x^{12}.y^2]$$

Comme $25a^2(1) = x^4.y^4$ *modulo* $b.\tilde{\mathcal{A}}.1$, et comme $x^6.y^6 = 5a(x^4.y^4)$ *modulo* $b.\tilde{\mathcal{A}}.1$, on obtient la relation

$$5\lambda_2.x^4.y^4 + \lambda_3.a(x^4.y^4) \in b.\tilde{\mathcal{A}}.1.$$

Comme on a vu que λ_2 et λ_3 sont non nuls, ou alors tous les deux nuls, leur non nullité donnerait une relation du type $a(x^4.y^4) - \rho.x^4.y^4 \in b.\tilde{\mathcal{A}}.1$ avec $\rho \neq 0$. Ce qui donnerait $a^n(x^4.y^4) - \rho^n.x^4.y^4 \in b.\tilde{\mathcal{A}}.1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $a^n.\tilde{\mathcal{A}}.1 \subset b.\tilde{\mathcal{A}}.1$ pour n assez grand (par régularité), on obtiendrait $x^4.y^4 \in b.\tilde{\mathcal{A}}.1$. ce qui est absurde. Donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et le rang de $\tilde{\mathcal{A}}.1$ est ≥ 4.

Le paragraphe précédent permet alors de conclure grâce au théorème 3.6.1. □

5.2 – *Le cas de* $f := x^n + y^n + z^n + x.y.z$.

On suppose $n \geq 4$, le cas $n = 3$ qui est homogène est immédiat.

LEMMA 5.2.1. – *Pour tout* $p \geq 0$ *on a*

$$\left(a - \frac{3(p+1)}{n}b\right)(x^p.y^p.z^p) = \frac{n-3}{n}x^{p+1}.y^{p+1}.z^{p+1}.$$

PREUVE. – On a

$$b(x^p.y^p.z^p) = (nx^{n-1} + y.z)\frac{x^{p+1}}{p+1}.y^p.z^p = \frac{1}{p+1}[nx^{n+p}.y^p.z^p + x^{p+1}.y^{p+1}.z^{p+1}]$$

ce qui donne $x^{n+p}.y^p.z^p = y^{n+p}.z^p.x^p = etc...$ et donc

$$a(x^p.y^p.z^p) = 3x^{n+p}.y^p.z^p + x^{p+1}.y^{p+1}.z^{p+1}$$

d'où la relation annoncée. □

On notera que l'on a montré au passage que l'on a $x^n = y^n = z^n$ dans le (a,b)-module de Brieskorn de f.

LEMMA 5.2.2. – *On a*

$$(a - 2b)(x^n) = (3 - n)x^n.y^n.$$

PREUVE. – Puisque l'on a $x^n = y^n$, cela donne :

$$b(x^n) = (nx^{n-1} + y.z)y^n.x = nx^n.y^n + x.y^{n+1}.z$$
$$b(x^n) = (nx^{n-1} + y.z)\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}[nx^{2n} + x^{n+1}.y.z]$$

ce qui permet d'obtenir $nx^{2n} = (n+1)b(x^n) - x^{n+1}.y.z$ et donc, en utilisant le fait que $x^n.y^n = x^n.z^n = y^n.z^n := v$ et en posant $x^{n+1}.y.z = x.y^{n+1}.z = x.y.z^{n+1} := u$

$$na(x^n) = (n+1)b(x^n) - u + 2v + u \quad \text{et donc}$$
$$a(x^n) = b(x^n) + 3v + u = 2b(x^n) + (3-n)v$$

puisque $b(x^n) = nv + u$. □

Calculons enfin $b(x^n.y^n)$:

$$b(x^n.y^n) = (nz^{n-1} + x.y)x^n.y^n.z = nx^n.y^n.z^n + x^{n+1}.y^{n+1},z$$
$$= (nx^{n-1} + yz)\frac{x^{n+1}}{n+1}y^n = \frac{1}{n+1}[nx^{2n}.y^n + x^{n+1}.y^{n+1}.z]$$

On en déduit les égalités

$$x^{n+1}.y^{n+1}.z = z^{n+1}.y^{n+1}.z = x^{n+1}.z^{n+1}.y := s$$
$$x^{2n}.y^n = y^{2n}.x^n = \cdots := t$$

En posant $x^n.y^n.z^n := r$ cela donne

$$b(x^n.y^n) = nr + s = \frac{1}{n+1}[nt + s]$$
$$a(x^n.y^n) = t + t + r + s$$

On en déduit la relation

$$(a - 3b)(x^n.y^n) = (3 - n)x^n.y^n.z^n$$

Comme le premier lemme donne

$$\left(\prod_{p=0}^{n-1}\left(a - \frac{3(p+1)}{n}b\right)\right)(1) = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n .x^n.y^n.z^n$$

on obtient que

$$\frac{n^n}{(n-3)^{n-3}} \cdot \left(\prod_{p=0}^{n-1} \left(a - \frac{3(p+1)}{n} b \right) \right) + (a-3b)(a-2b)(a-b)$$

annule 1 dans le module de Brieskorn de f.

On en conclut que le polynôme de Bernstein de $\tilde{\mathcal{A}}.1$ est égal à $(x+1)^3$.

5.3 – *Commentaire final.*

Si on considère un (a,b)-module de la forme $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a^4 + a^5)$ (analogue au cas du paragraphe 5.1), on constate que l'on a une suite exacte

$$0 \to K \to \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a^4 + a^5) \to \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.a^4 \to 0$$

et le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.a^4$ est monogène régulier de rang 4. Mais le noyau est de rang 1 et non régulier : en effet le noyau est $K \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a+1)$ n'est même pas local (donc encore moins régulier).

Quand on tensorise cette suite exacte par le complété $a-$adique $\hat{A}$ de $\tilde{\mathcal{A}}$, on a $K \otimes \hat{A} = 0$ et il ne reste que $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.a^4 \otimes \hat{A} \simeq \hat{A}/\hat{A}.a^4$.

On notera qu'un (a,b)-module local (donc à fortiori s'il est régulier) E vérifie toujours

$$E \simeq \hat{A} \otimes_{\tilde{\mathcal{A}}} E$$

puisqu'il est complet pour la filtration $a-$adique ([11]).

Ceci explique pourquoi dans les exemples précédents le rang ne correspond pas au degré en a des polynômes trouvés.

Mais par exemple $a = -1$ qui correspond au noyau K exprime le fait que l'équation différentielle satisfaite par l'intégrale considérée admet un (autre) point singulier (ici le point -1). Cela suggère de considérer les différentes localisations intéressantes d'un (a,b)-module (algébrique) et d'avoir une théorie “globale” sur $\mathbb{C}$ des équations différentielles algébriques. La localisation au point z signifie que l'on considère sur E les opérateurs $a_z := a + z$ et b et que l'on complète pour la topologie a_z-adique. Cela ressemble fort à la thérie des schemas ! Il est clair que les intégrales de périodes de fonctions algébriques (ou de variétés algébriques) doivent rentrer dans un cadre de ce genre.

([11]) O utilise ici le fait que $\hat{A}$ est un $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche et à droite.

REFERENCES

[A'C.73] N. A'CAMPO, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes*, Inv. Math., **20** (1973), 147-169.

[A-G-V] V. ARNOLD - S. GOUSSEIN-ZADÉ - A. VARCHENKO, *Singularités des applications différentiables*, édition MIR, volume **2** (Moscou, 1985).

[Br.70] E. BRIESKORN, *Die Monodromie der Isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math., **2** (1970), 103-161.

[B. 93] D. BARLET, *Théorie des (a,b)-modules I*, in Complex Analysis and Geometry, Plenum Press, (1993), 1-43.

[B. 95] D. BARLET, *Théorie des (a,b)-modules II. Extensions*, in Complex Analysis and Geometry, Pitman Research Notes in Mathematics Series 366 Longman (1997), 19-59.

[B. 05] D. BARLET, *Module de Brieskorn et forme hermitiennes pour une singularité isolée d'hypersuface*, revue de l'Inst. E. Cartan (Nancy), **18** (2005), 19-46.

[B. II] D. BARLET, *Sur certaines singularités d'hypersurfaces II*, J. Alg. Geom., **17** (2008), 199-254.

[B. 07] D. BARLET, *Sur les fonctions a singularité de dimension 1(version révisée)*, preprint Institut E. Cartan (Nancy), n. 42 (2008), 1-26, arXiv:0709.0459 (math. CV and math. AG) à paraître au Bulletin de la SMF.

[B. 08] D. BARLET, *Two finiteness theorem for regular (a,b)-modules*, preprint Institut E. Cartan (Nancy) n. 5 (2008), 1-38, arXiv:0801.4320 (math. AG and math. CV).

[B.-S. 04] D. BARLET - M. SAITO, *Brieskorn modules and Gauss-Manin systems for non isolated hypersurface singularities,* J. Lond. Math. Soc. (2), **76** n. 1 (2007), 211-224.

[M. 75] B. MALGRANGE, *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, in Lect. Notes in Math., **459** (Springer, 1975), 98-119.

[S. 89] M. SAITO, *On the structure of Brieskorn lattices*, Ann. Inst. Fourier, **39** (1989), 27-72.

[Sc.78] J. SCHERK, *On the Gauss-Manin connectio of an isolated hypersurface singularity*, Math. Ann., **238** (1978), 23-32.

Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

Received May 6, 2009 and in revised form July 31, 2009