Aldo Conca

Algebre di Koszul

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **1** (2008), n.2, p. 429–437.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2008_9_1_2_429_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Bollettino U. M. I.
(9) **I** (2008), 429-437

Algebre di Koszul (*)

ALDO CONCA

Abstract. – *The goal of the talk is to introduce and discuss the notion Koszul algebra in the commutative setting along with the associated notions of G-quadraticity and Koszul filtration. We present some results that appear in the papers [C, CTV, CRV] joint with M.E.Rossi, N.V.Trung and G.Valla. These results concern Koszul and G-quadratic properties of algebras associated with points, curves, cubics and spaces of quadrics of low codimension.*

1. – Introduzione.

In un articolo apparso su Mathematische Annalen nel 1890 Hilbert provò il suo famoso teorema delle sizigie. In termini moderni, questo teorema afferma che ogni modulo finitamente generato sull'anello dei polinomi a coefficenti in un campo ha una risoluzione libera finita. In pratica, significa che ogni modulo su tale anello può essere descritto e compreso mediante una sequenza finita di matrici con coefficenti polinomiali che rappresentano le relazioni fra i generatori del modulo, le relazioni fra le relazioni e cosí via. Il teorema delle sizigie non funziona su anelli piú generali degli anelli di polinomi. Per misurare "quanto falso" sia il teorema delle sizigie in un dato anello, si introducono varie misure di complessità per le risoluzioni ed una di queste porta al concetto di algebra di Koszul.

Sia R una K-algebra graduata standard, cioé una algebra della forma $R = K[x_1, \dots, x_n]/I$ dove $K[x_1, \dots, x_n]$ è l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo K e I è un ideale omogeneo rispetto alla struttura graduata ordinaria. In particolare, si ha una decomposizione $R = \oplus_{i \in \mathbf{N}} R_i$ come spazio vettoriale e $R^+ = \oplus_{i>0} R_i$ è l'unico ideale massimale omogeneo di R. Per costruzione, $\dim_K R_i < \infty$ e la serie formale $H_R(z) = \sum_i \dim_K R_i z^i \in \mathbf{Z}[[z]]$ è detta serie di Hilbert di R. Hilbert stesso provò, come corollario del suo teorema delle sizigie, che $H_R(z)$ è una serie razionale e si può rappresentare come rapporto di polinomi $h(z)/(1-z)^d$ dove d è la dimensione di Krull di R. Sia M un R-modulo graduato e

(*) Conferenza Generale tenuta a Bari il 27 settembre 2007 in occasione del XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

finitamente generato. Consideriamo una risoluzione R-libera

$$F : \ldots \to R^{\beta_i} \to R^{\beta_{i-1}} \to \ldots \to R^{\beta_1} \to R^{\beta_0} \to 0$$

di M. Per definizione, F è un complesso di moduli liberi che è aciclico, cioé con omologia banale tranne nel punto 0, e con 0-esima omologia $H_0(F) \simeq M$. Se inoltre si richiede che la risoluzione sia graduata e minimale (cioé che le matrici che rappresentano gli omomorfismi del complesso abbiano coefficienti che sono omogenei di grado positivo) allora tale risoluzione è essenzialmente unica. In tal caso il rango β_i dell'i-esimo modulo che compare nella risoluzione libera graduata minimale di M è chiamato l'i-esimo *numero di Betti* di M. Possiamo anche tenere conto della struttura graduata della risoluzione. Questo si fa decomponendo i moduli liberi in somma diretta di copie "traslate" di R:

$$R^{\beta_i} = \oplus_j R(-j)^{\beta_{ij}}$$

dove $R(-j)$ denota il modulo libero di rango 1 con generatore in grado j. I numeri β_{ij} sono chiamati i numeri di Betti graduati di M. La risoluzione si dice finita se $\beta_i = 0$ per $i \gg 0$. È difficile in generale stabilire quali moduli hanno una risoluzione libera finita. E quali algebre R hanno la proprietà che ogni R-modulo finitamente generato ha una risoluzione finita? La risposta a questa domanda è data da un famoso e ormai classico risultato di Auslander, Buchsbaum e Serre che nel caso graduato recita cosí:

TEOREMA 1.1 (Auslander-Buchsbaum-Serre). – *Sia R una K-algebra graduata standard. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *Ogni R-modulo graduato e finitamente generato ha una risoluzione R-libera (graduata minimale) finita.*

(2) *Il campo K, pensato come R-modulo attraverso l'identificazione $K = R/R^+$, ha una risoluzione R-libera (graduata minimale) finita.*

(3) *R è regolare, cioé è isomorfo ad un anello di polinomi.*

La *serie di Poincaré* $P_R(z)$ di R è la serie formale che ha come coefficienti i numeri di Betti di K:

$$P_R(z) = \sum_{i \geq 0} \beta_i^R(K) z^i.$$

Serre in [S] pose la questione della razionalità di $P_R(z)$, cioé chiese se esistono polinomi $a(z), b(z) \in \mathbf{Q}[z]$ con $b(0) \neq 0$ e tali che $P_R(z) = a(z)/b(z)$. La risposta affermativa alla domanda di Serre divenne nota come la congettura di Serre. Questa "congettura" fu provata per diverse classi di algebre. Ma nel 1981 Anick [A] scoprí algebre con serie di Poincaré irrazionali come per esempio:

$$\boldsymbol{Q}[x_1, \ldots, x_5]/(x_1^2, x_2^2, x_4^2, x_5^2, x_1x_2, x_4x_5, x_1x_3 + x_3x_4 + x_2x_5) + m^3$$

dove $m = (x_1, \dots, x_5)$. Piú recentemente Roos e Sturmfels mostrarono che serie di Poincaré irrazionali possono anche manifestarsi nel mondo delle algebre toriche, vedi [RS]. La serie di Poincaré tiene conto dei ranghi dei moduli liberi nella risoluzione minimale libera di K. Si possono anche considerare i gradi dei generatori dei moduli liberi. Questo porta all'introduzione di stime che riguardano la crescita dei questi gradi, come la regolarità di Castelnuovo-Mumford relativa oppure l'invariante di Backelin, e alla definizione di algebra di Koszul.

DEFINIZIONE 1.2 (Priddy). – *Sia R una K-algebra graduata standard e sia F la risoluzione minimale graduata R-libera di K. Si dice che R è di Koszul se F_i è generato in grado i per ogni i. Equivalentemente, R è Koszul se i coefficienti non nulli delle matrici che rappresentano le mappe in F sono omogenei di grado* 1.

ESEMPIO 1.3. – *Sia $R = K[x]/(x^n)$ con $n > 1$. Sia $y = \overline{x} \in R$. La risoluzione di K come R-modulo é*

$$\dots \xrightarrow{y^{n-1}} R \xrightarrow{y} R \xrightarrow{y^{n-1}} R \xrightarrow{y} R \to K \to 0$$

Quindi R è di Koszul se e solo se $n = 2$.

Una algebra R è detta:

(1) quadratica se il suo ideale di definizione I è generato da quadriche (polinomi omogenei di grado 2).

(2) G-quadratica se I ha una base di Gröbner di quadriche rispetto a qualche sistema di coordinate e ordinamento sui termini.

(3) LG-quadratica se esiste una algebra G-quadratica S ed una successione regolare $y_1, \dots, y_s$ di elementi di grado 1 di S tali che $S/(y_1, \dots, y_s) \simeq R$.

Le basi di Gröbner sono lo strumento fondamentale dell'Algebra Commutativa Computazionale e nascono come comune generalizzazione dell'algoritmo euclideo per polinomi in una variabile e della riduzione di Guass per sistemi lineari. Dal punto di vista teorico, le basi di Gröbner permettono di controllare processi di deformazione ad un parametro ed è questo l'uso che se ne fa in questo contesto.

In generale si ha:

$$\text{G-quadratica} \Rightarrow \text{LG-quadratica} \Rightarrow \text{Koszul} \Rightarrow \text{quadratica}.$$

La prima e terza implicazione non si possono rovesciare in generale. Non si conoscono invece esempi di algebre di Koszul che non siano LG-quadratiche (anche se probabilmente esistono).

Come conseguenza di un teorema di Tate si ha che ogni intersezione completa di quadriche è di Koszul. Ma non tutte le intersezioni complete di quadriche sono G-quadratiche, si vedano gli esempi forniti da Eisenbud, Reeves e Totaro in

[ERT]. Il piú semplice di tali esempi è dato da 3 quadriche generali in 3 variabili. Il seguente argomento di G. Caviglia mostra che ogni intersezione completa di quadriche è LG-quadratica.

ESEMPIO 1.4. – *Sia* $R = K[x_1, \ldots, x_n]/(q_1, \ldots, q_m)$ *una intersezione completa di quadriche. Si ha* $R = S/(y_1, \ldots, y_m)$ *dove*

$$S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/(y_1^2 + q_1, \ldots, y_m^2 + q_m).$$

Il fatto che $y_1^2 + q_1, \ldots, y_m^2 + q_m$ *sia una base di Gröbner è una facile conseguenza del criterio di Buchberger. Il fatto che* $y_1, \ldots, y_m$ *formino una successione S-regolare segue dal confronto delle serie di Hilbert. Si conclude quindi che* R *è LG-quadratica.*

L'essere di Koszul si caratterizza in termini della serie di Poincaré come segue. Si ha:

$$R \text{ è Koszul} \Leftrightarrow P_R(z)H_R(-z) = 1.$$

In particolare, le algebre di Koszul hanno serie di Poincaré razionali in quando la serie di Hilbert è razionale.

Molte varietà classiche (di Grassmann, di Segre, di Veronese, etc.) hanno anelli delle coordinate che sono algebre di Koszul in quanto sono G-quadratiche nelle coordinate standard. D'altra parte, data una algebra quadratica è difficile stabilire se è o meno di Koszul. Si possono calcolare le prime matrici della risoluzione del campo residuo e controllare se sono lineari. Se non lo sono, R non è di Koszul. Se invece lo sono se ne possono calcolare alcune altre. Ma la taglia delle matrici tende a crescere esponenzialmente e si sa che la prima sizigia non-lineare può apparire in posizione omologica arbitrariamente alta (per algebre con serie di Hilbert fissata). Quindi procedendo in questo modo non si può provare che una algebra è di Koszul. Come spesso succede, un modo piú efficente per affrontare il problema è dato da metodi che fanno uso di filtrazioni di vario genere. Prendendo spunto da idee contenute nei lavori di Eisenbud, Reeves e Totaro [ERT], e di Bruns, Herzog e Vetter [BHV] in [CTV, CRV] sono state introdotte le nozioni che vengono presentate nel prossimo capitolo.

2. – Filtrazioni, punti e curve.

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia* R *una algebra graduata standard e sia* F *una famiglia di ideali di* R*. Diciamo che* F *è una filtrazione di Koszul per* R *se:*

(1) *Ogni ideale in* F *è generato da elementi omogenei di grado* 1.
(2) *L'ideale* 0 *e l'ideale* R^+ *sono in* F.

(3) *Per ogni ideale* $I \in F$ *che sia non-zero, esiste* $J \in F$ *tale che* $J \subset I$*, il quoziente* I/J *è ciclico e l'annullatore* $J : I$ *di* I/J *è in* F*.*

DEFINIZIONE 2.2. – *Sia* R *una algebra graduata standard. Una bandiera di Gröbner per* R *è una filtrazione di Koszul* F *di* R *che consiste in una singola bandiera completa di* R_1*. In altre parole, una bandiera di Gröbner per* R *è un insieme di ideali* $F = \{(0), (V_1), (V_2), \dots, (V_n) = (R_1)\}$ *dove* V_i *è un sottospazio i-dimensionale di* R_1*,* $V_i \subset V_{i+1}$ *e* $(V_i) : (V_{i+1}) = (V_j)$ *per qualche j che dipende da i.*

Come i nomi suggeriscono, si ha:

TEOREMA 2.3.

(1) *Se* R *ha una filtrazione di Koszul allora* R *è di Koszul.*
(2) *Se* R *ha una bandiera di Gröbner allora* R *è G-quadratica.*

ESEMPIO 2.4. – *Sia* $R = K[x_1, \dots, x_n]/I$ *con* I *quadratico e monomiale. L'insieme* F *degli ideali di* R *generati da sottoinsiemi di* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *è una filtrazione di Koszul di* R*. Per verificarlo è sufficente osservare che* $I : (x_i)$ *è generato da variabili modulo* I*.*

L'avere una filtrazione di Koszul è una proprietà strettamente piú forte dell'essere di Koszul come mostra il seguente esempio:

ESEMPIO 2.5. – *Sia* R *una intersezione completa di* 5 *quadriche generiche in* 5 *variabili. Come già detto,* R *è di Koszul. Ma* R *non ha filtrazioni di Koszul in quanto il suo ideale di definizione non contiene quadriche di rango* < 3.

Analogamente, l'avere una bandiera di Gröbner è una proprietà piú forte che l'essere G-quadratica. Per esempio, $R = K[x, y, z]/(x^2, y^2, xz, yz)$ è ovviamente G-quadratica ma si può facilmente vedere che non ha una bandiera di Gröbner.

Comunque molte classi di algebre che sono note essere di Koszul risultano possedere filtrazioni di Koszul e persino bandiere di Gröbner. Per esempio:

TEOREMA 2.6 (Kempf [K]). – *Sia* X *un insieme di* s *punti dello spazio proiettivo* $\mathbf{P}^n$ *e sia* $R(X)$ *l'anello delle coordinate di* X*. Se* $s \leq 2n$ *e i punti sono in posizione lineare generale allora* $R(X)$ *è di Koszul.*

Abbiamo provato in [CTV, CRV] che:

TEOREMA 2.7. – *Nelle ipotesi del teorema precedente, l'anello* $R(X)$ *ha una bandiera di Gröbner.*

Ci si può chiedere se il teorema di Kempf sia vero anche per un numero di punti maggiore di $2n$. Ciò è falso come il seguente esempio, tratto da [CRV], mostra.

ESEMPIO 2.8. – *Esistono* 9 *punti di* $\mathbf{P}^4$ *che sono in posizione lineare generale con anello delle coordinate quadratico e non di Koszul. Questo esempio è ottenuto mediante un sollevamento alla Gröbner dell'ideale numero* (55) *della lista di Roos* [R].

Invece per punti generici si ha:

TEOREMA 2.9. – *Sia X un insieme di punti generici di $\mathbf{P}^n$. Si ha che $R(X)$ è di Koszul se e solo se $|X| \leq 1 + n + (n^2/4)$.*

Sia ora C una curva liscia di genere g definita su complessi. Se C non è iperellitica allora il fascio canonico su C dà una immersione canonica $C \to \mathbf{P}^{g-1}$. L'anello delle coordinate R_C di C in questa immersione si chiama l'anello canonico di C. È noto che R_C è quadratico tranne nel caso in cui C sia trigonale di genere $g \geq 5$ oppure sia una quartica piana. Si ha:

TEOREMA 2.10. – *L'anello canonico R_C è di Koszul nei casi in cui è quadratico.*

Questo risultato è stato provato da Pareschi e Purnaprajna [PP], da Polishchuk [P] e da Vishik e Finkelberg [VF]. Abbiamo provato in [CRV] la seguente generalizzazione di 2.10:

TEOREMA 2.11. – *L'anello canonico R_C ha una bandiera di Gröbner nei casi in cui è quadratico.*

Chiudiamo questo capitolo con un esempio di una famiglia di algebre toriche delle quali non sappiamo dire se sono o meno di Koszul. Dati interi n, d, s la Veronese "bucata" è la K-sottoalgebra $\mathrm{VB}(n, d, s)$ di $K[x_1, \dots, x_n]$ generata dai monomi di grado d con al piú s esponenti diversi da 0.

$$\mathrm{VB}(n, d, s) = K[x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} : \quad \sum a_j = d \quad \text{e} \quad \#\{j : a_j > 0\} \leq s]$$

Non è noto se $\mathrm{VB}(n, d, s)$ è di Koszul (non è neanche chiaro se sia quadratica). G. Caviglia ha provato in [Ca] che la prima Veronese bucata non banale $\mathrm{VB}(3, 3, 2)$ è di Koszul usando una combinazione di argomenti basati su filtrazioni e costruzioni ad hoc.

3. – Algebre di Gorenstein Artiniane associate a cubiche.

Gli anelli canonici associati a curve di cui si è parlato nel capitolo precedente sono domini di Gorenstein di dimensione di Krull uguale a 2 e h-polinomio (numeratore della serie di Hilbert) $1 + nz + nz^2 + z^3$. I risultati discussi nel capitolo precedente assicurano che tali algebre sono di Koszul a patto che siano quadratiche. Ci si può chiedere se tale caratterizzazione continui a valere per algebre di Gorenstein con h-polinomio di $1 + nz + nz^2 + z^3$. Per questo problema non è restrittivo considerare solo le algebre graduate di Gorenstein e Artiniane, cioé di dimensione di Krull uguale a 0. Tali algebre sono descritte attraverso il sistema inverso di Macaulay come ricordiamo di seguito. Sia $S = K[x_1, \dots, x_n]$ con K di caratteristica 0. Dato un polinomio $f \in S$ omogeneo di grado s denotiamo con I_f l'ideale di S formato dai polinomi $g(x_1, \dots, x_n) \in S$ tali che

$$g(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)f = 0.$$

Poniamo $R_f = S/I_f$. È ben noto che R_f è una algebra di Gorenstein Artiniana con zoccolo in grado s. Inoltre ogni algebra con queste caratteristiche è del tipo R_f per qualche f. Per quel che abbiamo detto sopra, il caso $s = 3$ è particolarmente interessante. In tal caso f è una cubica e la serie di Hilbert di R_f è $1 + nz + nz^2 + z^3$. Quindi I_f contiene un "mucchio" di quadriche (se $n > 2$). La questione diventa quindi:

DOMANDA 3.1. – *È vero che R_f è Koszul se e solo se è quadratica? Inoltre, per quali cubiche $f \in S$ è R_f Koszul o G-quadratica o LG-quadratica?*

Per alcune cubiche, per esempio quella di Fermat $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, è immediato verificare che R_f non è quadratica. In questo contesto in [CRV] si prova quanto segue.

TEOREMA 3.2.

(1) *Sia f una cubica generica. Allora R_f ha una filtrazione di Koszul e non è G-quadratica.*

(2) *Sia f una cubica singolare generica. Allora R_f ha una bandiera di Gröbner.*

TEOREMA 3.3. – *Per $n = 3$ o 4 le seguenti condizione sono equivalenti.*

(1) *R_f è quadratica.*
(2) *R_f è Koszul.*
(3) *L'ideale dei minori di ordine 2 della Hessiana di f ha codimensione n.*

Inoltre, per $n = 3$ *le condizioni* (1), (2), (3) *sono equivalenti a:*

(4) f *non è nella chiusura della* $\mathrm{GL}_3(K)$*-orbita della cubica di Fermat* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

4. – Spazi quadriche di bassa codimensione.

Sia V uno spazio vettoriale di quadriche di codimensione c in n variabli, cioé $c = \binom{n+1}{2} - \dim V$. Sia R_V l'algebra quadratica definita dall'ideale generato da V. Un risultato di Backelin [B] asserisce che se $c \leq 2$ allora R_V è Koszul. In [C] si è provato che:

TEOREMA 4.1.

(1) Se $c < n$ allora l'algebra R_V è G-quadratica se V è generico.

(2) *Se* $c \leq 2$ *allora* R_V *è G-quadratica con, essenzialmente, una eccezione data da* $V = \langle x^2, xy, y^2 - xz, yz \rangle$ *in* $K[x, y, z]$.

L'algebra "eccezionale" $K[x, y, z]/(x^2, xy, y^2 + xz, yz)$ ha serie di Hilbert

$$1 + 3z + 2z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \ldots$$

e risulta essere LG-quadratica poiché si può deformare a

$$K[x, y, z, t]/(x^2 + xt, xy + yt, yz + xt, y^2 + xz)$$

che è G-quadratica nelle date coordinate e rispetto a revlex $t > x > y > z$. Segue da 4.1 che ogni algebra quadratica Artiniana R con $\dim R_2 \leq 2$ è G-quadratica.

Una recente congettura di Polishchuk [P2] sulle configurazioni di punti che sono di Koszul suggerisce che le algebre quadratiche con $\dim R_2 = 3$ dovrebbero essere di Koszul. Questo è quello che si è provato in [C1]:

TEOREMA 4.2. – *Sia* V *uno spazio di quadriche di codimensione* $c = 3$. *Allora:*

(1) R_V *è di Koszul.*

(2) R_V *è G-quadratica tranne nel caso in cui sia (a meno di estensioni triviali) una intersezione completa di* 3 *quadriche generiche in* 3 *variabili.*

REFERENCES

[A] D. ANICK, *A counterexample to a conjecture of Serre*, Ann. of Math. (2), **115**, no. 1 (1982), 1-33.

[BHV] W. BRUNS - J. HERZOG - U. VETTER, *Syzygies and walks*, ICTP Proceedings 'Commutative Algebra', Eds. A.Simis, N. V. Trung, G. Valla, World Scientific 1994, 36-57.

[B] J. Backelin, *A distributiveness property of augmented algebras and some related homological results*, Ph.D. thesis, Stockholm University, 1982.

[BF] J. Backelin - R. Fröberg, *Poincarè series of short Artinian rings*. J. Algebra, **96**, no. 2 (1985), 495-498.

[BF1] J. Backelin - R. Fröberg, *Veronese subrings, Koszul algebras and rings with linear resolutions*. Rev. Roum. Pures Appl., **30** (1985), 85-97.

[Ca] G. Caviglia, *The pinched Veronese is Koszul*. preprint 2006, math. AC/0602487.

[C] A. Conca, *Gröbner bases for spaces of quadrics of low codimension*. Adv. in Appl. Math., **24**, no. 2 (2000), 111-124.

[C1] A. Conca, *Gröbner bases for spaces of quadrics of codimension* 3, preprint 2007, arXiv:0709.3917.

[CRV] A. Conca - M. E. Rossi - G. Valla, *Gröbner flags and Gorenstein algebras*. Compositio Math., **129**, no. 1 (2001), 95-121.

[CTV] A. Conca - N. V. Trung - G. Valla, *Koszul property for points in projective spaces*, Math. Scand., **89** no. 2 (2001), 201-216.

[ERT] D. Eisenbud - A. Reeves - B. Totaro, *Initial ideals, Veronese subrings, and rates of algebras*, Adv. Math., **109** (1994), 168-187.

[F] R. Fröberg, *Koszul algebras*, in "Advances in Commutative Ring Theory", Proc. Fez Conf. 1997, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, volume 205, Dekker Eds., 1999.

[HHR] J. Herzog - T. Hibi - G. Restuccia, *Strongly Koszul algebras*, Math. Scand., **86**, no. 2 (2000), 161-178.

[K] G. Kempf, *Syzygies for points in projective space*, J. Algebra, **145** (1992), 219-223.

[PP] G. Pareschi - B. P. Purnaprajna, *Canonical ring of a curve is Koszul: a simple proof*, Illinois J. Math., **41**, no. 2 (1997), 266-271.

[P] A. Polishchuk, *On the Koszul property of the homogeneous coordinate ring of a curve*, J. Algebra, **178**, no. 1 (1995), 122-135.

[P2] A. Polishchuk, *Koszul configurations of points in projective spaces*. J. Algebra, **298**, no. 1 (2006), 273-283.

[R] J. E. Roos, *A description of the homological behaviour of families of quadratic forms in four variables*, in Syzygies and Geometry, Boston 1995, A. Iarrobino, A. Martsinkovsky and J. Weyman eds., pp. 86-95, Northeastern Univ. 1995.

[RS] J. E. Roos - B. Sturmfels, *A toric ring with irrational Poincaré-Betti series*, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math., **326**, no. 2 (1998), 141-146.

[S] J. Paris Serre, *Algèbre locale. Multiplicitès*, Lecture Notes in Mathematics 11, Springer, 1965.

[VF] A. Vishik - M. Finkelberg, *The coordinate ring of general curve of genus $g \geq 5$ is Koszul*, J. Algebra, **162**, no. 2 (1993), 535-539.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova,
Via Dodecaneso 35, I-16146 Genova, Italia
e-mail: conca@dima-unige.it

Received January 7, 2008 and in revised form February 14, 2008