Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Viola

Gruppi di permutazioni e risultati di irrazionalità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **1** (2008), n.2, p. 375–400.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2008_9_1_2_375_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Bollettino U. M. I.
(9) **I** (2008), 375-400

Gruppi di permutazioni e risultati di irrazionalità (*)

CARLO VIOLA

Abstract. – *We recall some basic concepts in diophantine approximation, in particular the notion of irrationality measure. We describe the main aspects of the permutation group method due to G. Rhin and the author, with some arithmetical applications.*

1. – Introduzione.

Lo scopo di questo articolo è fornire una rassegna di problemi e risultati vecchi e nuovi sull'irrazionalità di alcune costanti notevoli dell'analisi, con particolare riguardo ad un metodo algebrico introdotto e sviluppato da G. Rhin e dall'autore (vedi [12], [13], [14], [15]), basato sulla struttura di gruppi di trasformazioni birazionali e di gruppi di permutazioni. In questo paragrafo richiamiamo alcuni concetti e risultati classici collegati all'irrazionalità.

Poiché i numeri razionali sono i numeri algebrici di grado 1, data una costante reale a algebrica, cioè radice di un polinomio a coefficienti interi, l'irrazionalità di a dipende dal grado del suo polinomio minimo (1) $P(x)$: se $\deg P = \deg a \geq 2$ si ha $a \notin \mathbb{Q}$. La situazione è del tutto diversa se si vuole dimostrare l'irrazionalità di una costante a per la quale non vi siano motivi evidenti che ne garantiscano l'algebricità, e che perciò sia congetturalmente trascendente (2). Ciò avviene molto spesso quando a è definita "analiticamente", per es. come somma di una serie, o limite di una successione, o valore di un integrale definito, ecc. In tal caso la dimostrazione dell'irrazionalità di a può essere un problema assai difficile, o addirittura intrattabile allo stato attuale delle conoscenze. Per esempio, si congettura che la costante

(*) Conferenza Generale tenuta a Bari il 26 settembre 2007 in occasione del XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(1) Il polinomio minimo in $\mathbb{Z}[x]$ di un numero algebrico a è il polinomio $P(x)$ di grado minimo, con coefficienti interi aventi massimo comune divisore 1 e coefficiente direttivo > 0, tale che $P(a) = 0$.

(2) Poiché l'insieme dei numeri algebrici è numerabile, quasi tutti i numeri sono trascendenti.

di Eulero–Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = 0,57721\ldots,$$

o la costante di Catalan:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = 0{,}91596\ldots,$$

siano trascendenti, ma finora non se ne sa dimostrare neppure l'irrazionalità. Di altri numeri congetturalmente trascendenti si sa dimostrare l'irrazionalità, ma non si sa escludere che siano algebrici di grado > 1. È questo il caso, ad esempio, di $\zeta(3)$, dove ζ indica la funzione zeta di Riemann:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = 1{,}20205\ldots$$

Nel 1979 Apéry [2] ha dimostrato che $\zeta(3)$ è irrazionale, ma attualmente non esiste una dimostrazione che escluda ad esempio che $\zeta(3)$ sia un irrazionale quadratico.

Tutte le dimostrazioni di irrazionalità per costanti non evidentemente algebriche sono basate sulla proposizione seguente:

Dato un $a \in \mathbb{R}$, se esistono due successioni di interi (p_n) e (q_n), con $q_n > 0$, tali che

$$0 \neq p_n - q_n a \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1.1}$$

allora $a \notin \mathbb{Q}$.

La dimostrazione di tale criterio è per assurdo: se fosse $a = A/B$ con $A, B \in \mathbb{Z}$, $B > 0$, per l'ipotesi $p_n - q_n a \neq 0$ si avrebbe

$$|p_n - q_n a| = \frac{|p_n B - q_n A|}{B} > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

con p_n, q_n, A, B interi e quindi $|p_n B - q_n A|$ intero > 0. Dunque

$$|p_n - q_n a| = \frac{|p_n B - q_n A|}{B} \geq \frac{1}{B} > 0,$$

contro l'ipotesi $p_n - q_n a \to 0$.

Malgrado la semplicità di questo criterio, la sua applicazione nei casi particolari è solitamente difficile, per la difficoltà di dimostrare l'esistenza di successioni di interi (p_n) e (q_n) soddisfacenti la condizione (1.1). Si osservi che la (1.1), scritta nella forma equivalente

$$0 < q_n \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| \to 0,$$

ovvero

$$0 < \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| = o\Big(\frac{1}{q_n}\Big) \qquad (n \to \infty), \tag{1.2}$$

mostra che nella forma indeterminata $q_n|a - p_n/q_n|$ prevale l'infinitesimo $|a - p_n/q_n|$ rispetto all'infinito q_n. La (1.1) è quindi una tipica condizione diofantea: si chiama approssimazione diofantea quel ramo della teoria dei numeri che, nella sua accezione classica, studia in primis le approssimazioni razionali p/q ad un $a \in \mathbb{R}$ con

(i) distanza $\left| a - \dfrac{p}{q} \right|$ piccola,

(ii) denominatore q non molto grande.

Naturalmente la condizione (ii) equivale ad affermare che anche il numeratore p non è molto grande in valore assoluto, poiché $p \approx qa$ con a fissato, e quindi $|p|$ e q sono essenzialmente proporzionali ([3]).

Se si sceglie *a caso* una successione di razionali $p_n/q_n \to a$ (con $p_n/q_n \neq a$, $q_n > 0$) non ci si può aspettare che valga la (1.1), perché la distanza di $q_n a$ dall'intero piú vicino p_n in generale non è molto piú piccola di $1/2$, e quindi non si otterrà una stima migliore di

$$\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| = O\Big(\frac{1}{q_n}\Big) \qquad (n \to \infty). \tag{1.3}$$

In approssimazione diofantea interessano successioni $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ che migliorino la (1.3) e cioè che verifichino almeno la (1.2), se possibile precisando ulteriormente $o(1/q_n)$ mediante una stima del tipo $O(1/q_n^{\mu})$ per qualche esponente $\mu > 1$.

Le prime ricerche sistematiche in approssimazione diofantea risalgono al

([3]) L'approssimazione diofantea studia anche generalizzazioni naturali del problema di cui sopra, quali ad esempio l'approssimazione simultanea ad m numeri $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, cioè la ricerca di approssimazioni razionali $p_1/q, \ldots, p_m/q$ aventi lo stesso denominatore q e tali che le quantità $|p_j - qa_j|$ $(j = 1, \ldots, m)$ siano simultaneamente piccole, oppure la ricerca di numeri algebrici β appartenenti ad un corpo K che approssimino un numero $a \notin K$, rendendo piccola la distanza $|a - \beta|$ e avendo un'altezza $\mathrm{H}(\beta)$ opportunamente limitata dal di sopra (l'altezza $\mathrm{H}(\beta)$ di un numero algebrico β è il massimo valore assoluto dei coefficienti del polinomio minimo di β in $\mathbb{Z}[x]$).

XVIII secolo, nell'opera di Eulero e di Lagrange. In particolare, è dovuto a Lagrange il celebre teorema seguente: (4)

Per ogni $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *esistono infiniti* $p/q \in \mathbb{Q}$ *tali che*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\,. \tag{1.4}$$

Incidentalmente, questo teorema mostra che il criterio (1.1) non è solo sufficiente per l'irrazionalità di a, ma è anche necessario.

Il teorema di Lagrange è, a meno di costanti moltiplicative, il migliore possibile; vale infatti il seguente teorema di Hurwitz (vedi [8], Teor. 193 e 194):

Per ogni $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *esistono infiniti* $p/q \in \mathbb{Q}$ *tali che*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}\,.$$

Inoltre questo risultato non è migliorabile, poiché esistono opportuni $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *tali che per ogni costante* $c > \sqrt{5}$ *la diseguaglianza*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\,q^2}$$

abbia al piú un numero finito di soluzioni $p/q \in \mathbb{Q}$.

2. – Misure di irrazionalità.

Del criterio (1.1) e di altri risultati di irrazionalità si possono dare opportune versioni quantitative. A questo scopo, si introduce una nozione di misura di irrazionalità nel modo seguente.

Dato un numero $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *si dice che un numero* $\lambda \in \mathbb{R}$ *è una misura di irrazionalità di* a *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $q_0 = q_0(a,\varepsilon) > 0$ *tale che per ogni* $p, q \in \mathbb{Z}$ *con* $q > q_0$ *si abbia*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\lambda+\varepsilon}}\,.$$

Si dice che λ *è una misura di irrazionalità effettiva di* a *se* $q_0(a,\varepsilon)$ *è calcolabile esplicitamente in funzione di* ε.

La piú piccola misura di irrazionalità di a si indica con $\mu(a)$. Dunque $\mu(a)$ è

(4) Per maggiori dettagli su questo e su altri contributi di Lagrange alla teoria dei numeri si veda [7].

l'estremo inferiore degli esponenti μ tali che la diseguaglianza

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}} \tag{2.1}$$

valga al piú per un numero finito di razionali p/q, e quindi è anche l'estremo superiore degli esponenti μ tali che la (2.1) valga per infiniti razionali p/q.

In virtú della diseguaglianza di Lagrange (1.4), per ogni $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ si ha

$$\mu(a) \geq 2.$$

Inoltre si dimostra con metodi elementari che per quasi tutti gli $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ si ha

$$\mu(a) = 2, \tag{2.2}$$

cioè che gli a per cui $\mu(a) > 2$ formano un insieme di misura nulla. D'altra parte, prefissato un qualunque numero reale v con

$$2 \leq v \leq +\infty,$$

utilizzando per es. l'algoritmo delle frazioni continue si costruiscono facilmente opportuni $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ per i quali si abbia esattamente

$$\mu(a) = v$$

(i numeri a tali che $\mu(a) = +\infty$ si dicono numeri di Liouville).

Grazie a questi risultati elementari, se si considera un irrazionale a nella cui definizione non siano imposte specifiche proprietà diofantee si congettura che valga la (2.2), sebbene, quando a è trascendente o congetturalmente tale, non si possa escludere che $\mu(a) > 2$, tranne in pochissimi casi particolari (vedi ad es. la (2.3) qui sotto). Per i numeri algebrici vale invece il seguente celebre teorema di Roth [17]:

Ogni irrazionale algebrico a soddisfa $\mu(a) = 2$.

Il teorema di Roth ha numerose applicazioni alla risoluzione di equazioni diofantee. Dal punto di vista del calcolo delle misure di irrazionalità dei numeri algebrici esso è evidentemente ottimale, ma ha lo svantaggio dell'ineffettività, cioè della non calcolabilità di una costante $q_0(a, \varepsilon)$ tale che

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

per $q > q_0(a, \varepsilon)$.

I risultati dimostrati finora sulle misure di irrazionalità di costanti classiche, trascendenti o congetturalmente tali, sono assai frammentari. Come conseguenza degli sviluppi euleriani in frazione continua di e e di qualche altra costante collegata a valori della funzione esponenziale in opportuni punti razionali (vedi [5]) si sa ad esempio che

$$\mu(e) = \mu(\sqrt{e}) = \mu(\sqrt[3]{e}) = \ldots = 2, \tag{2.3}$$

mentre il migliore risultato noto per la misura d'irrazionalità di π è dovuto a Hata [9]:

$$\mu(\pi) < 8{,}01604\ldots$$

I migliori risultati finora ottenuti per le misure di irrazionalità di $\zeta(2) = \pi^2/6$ e di $\zeta(3)$, e cioè

$$\mu\big(\zeta(2)\big) = \mu\big(\pi^2\big) < 5{,}44124\ldots \tag{2.4}$$

e

$$\mu\big(\zeta(3)\big) < 5{,}51389\ldots, \tag{2.5}$$

sono dovuti a Rhin e all'autore ([12], [13]). Altri risultati ([14]) riguardano misure d'irrazionalità di $\mathrm{Li}_2(r/s)$ per opportuni interi r, s con $1 \le r < s$, dove il dilogaritmo Li_2 è definito dalla serie di Taylor

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

per $|x| < 1$. Tutti questi risultati sono effettivi.

Come accennato all'inizio di questo paragrafo, per ottenere misure di irrazionalità di costanti trascendenti o congetturalmente tali si utilizzano versioni quantitative del criterio di irrazionalità (1.1), come ad esempio la seguente

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $a \in \mathbb{R}$, e siano (p_n) e (q_n) con $q_n > 0$ due successioni di interi tali che*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log |p_n - q_n a| = -R \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log q_n \le S \end{cases}$$

con $R, S > 0$. Allora $a \notin \mathbb{Q}$ e si ha

$$\mu(a) \le \frac{S}{R} + 1. \tag{2.6}$$

Per la dimostrazione di un teorema piú generale, da cui la Proposizione 1 segue come corollario, vedi [22], pp. 310-312.

Seguendo un'osservazione di Siegel [18], talvolta è possibile determinare interi p_n e q_n soddisfacenti le ipotesi della Proposizione 1 ma non primi fra loro, bensì aventi un divisore comune Δ_n esponenzialmente grande, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Delta_n = T > 0.$$

In questo caso si può utilizzare Δ_n sostituendo nella Proposizione 1 a p_n e q_n, rispettivamente, p_n/Δ_n e q_n/Δ_n. La proposizione stessa fornisce allora, rispetto alla (2.6), il miglioramento

$$\mu(a) \leq \frac{S-T}{R+T} + 1.$$

Di solito, nei casi particolari, il divisore Δ_n si costruisce p-adicamente, cioè come prodotto di singoli fattori primi comuni a p_n e q_n.

3. – Integrali euleriani.

In relazione alla funzione gamma euleriana

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \mathrm{d}x \qquad (\mathrm{Re}\, t > 0),$$

introdotta come interpolatrice del fattoriale, Eulero introdusse anche alcuni integrali definiti fra 0 e 1, chiamati da Legendre integrali euleriani. I principali sono la funzione beta:

$$B(t_1, t_2) = \int_0^1 x^{t_1-1}(1-x)^{t_2-1} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}{\Gamma(t_1+t_2)} \tag{3.1}$$

e l'integrale ipergeometrico (con $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\beta > 0$):

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xy)^{a}} \mathrm{d}x = B(\beta, \gamma-\beta)\; {}_2F_1(a, \beta; \gamma; y), \tag{3.2}$$

dove ${}_2F_1$ indica la funzione ipergeometrica, introdotta da Eulero come soluzione, regolare in $y = 0$, dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine:

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2} + \big(\gamma - (a+\beta+1)y\big)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - a\beta z = 0$$

e da lui definita mediante la serie di Taylor

$${}_2F_1(a, \beta; \gamma; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{y^n}{n!} \qquad (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ |y| < 1). \tag{3.3}$$

I simboli di Pochhammer $(\alpha)_n$, $(\beta)_n$ e $(\gamma)_n$ sono definiti da

$$(\xi)_0 = 1, \qquad (\xi)_n = \xi(\xi+1)\dots(\xi+n-1) \qquad (n=1,2,\dots).$$

Dalle (3.1) e (3.2) si ricava la rappresentazione integrale euleriana per la funzione ipergeometrica (3.3):

$$(3.4) \qquad {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xy)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

valida per $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$. Poiché la serie a secondo membro della (3.3) non cambia scambiando α e β, se $\operatorname{Re}\gamma > \max\{\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta\}$ e $\min\{\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta\} > 0$ dalla (3.4) si ottiene la formula di trasformazione integrale

$$(3.5) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xy)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-xy)^{\beta}}\,\mathrm{d}x.$$

Se α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, è facile vedere che l'integrale ipergeometrico (3.5) si esprime razionalmente mediante $\log(1-y)$, e quindi, scegliendo il parametro y razionale o algebrico, dall'integrale (3.5) si possono ricavare risultati aritmetici sui logaritmi di opportuni numeri razionali o algebrici. Inoltre per α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ i fattori gamma a secondo membro della (3.5) sono fattoriali, e la loro valutazione p-adica permette di migliorare ulteriormente i suddetti risultati aritmetici facendo uso del metodo di Siegel accennato alla fine del par. 2. Per questa via sono state ottenute in [19] misure d'irrazionalità di logaritmi di numeri razionali, e in [1], combinando il metodo di Siegel col metodo del punto di sella per integrali curvilinei in $\mathbb{C}$, misure di non appartenenza al corpo $\mathbb{Q}(\eta)$ del logaritmo principale di η, per opportuni numeri algebrici η.

Certi integrali *multipli* di tipo euleriano con esponenti interi sono invece collegati ai valori della funzione zeta di Riemann negli interi >1, e possono perciò essere utilizzati per ricavare alcune conseguenze aritmetiche su

$$(3.6) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (s=2,3,4,\dots).$$

I primi risultati in questa direzione sono stati ottenuti da Beukers [4], che ha dimostrato che, per $n=1,2,3,\dots$, si ha

$$(3.7) \qquad d_n^2\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = p_n - q_n\zeta(2) \qquad (p_n,\ q_n \in \mathbb{Z})$$

e

$$(3.8) \qquad d_n^3\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = p_n' - 2q_n'\zeta(3) \quad (p_n',\ q_n' \in \mathbb{Z}).$$

Qui e nel seguito d_n indica il minimo comune multiplo degli interi $1, 2, \ldots, n$; dal teorema dei numeri primi si ottiene facilmente

$$d_n = e^{n+o(n)} \qquad (n \to \infty). \tag{3.9}$$

Le forme lineari a coefficienti interi in 1 e $\zeta(2)$ o in 1 e $\zeta(3)$ a secondo membro delle (3.7) e (3.8) sono le stesse precedentemente ottenute da Apéry [2] con un metodo del tutto diverso. Stime standard sull'integrale doppio nella (3.7) e sull'integrale triplo nella (3.8), insieme alla formula asintotica (3.9), implicano l'irrazionalità di $\zeta(2)$ e di $\zeta(3)$ in conseguenza della (1.1). Inoltre, applicando la Proposizione 1 alle forme lineari (3.7) e (3.8), si ottengono le misure di irrazionalità

$$\mu\big(\zeta(2)\big) < 11,85078\ldots$$

e

$$\mu\big(\zeta(3)\big) < 13,41782\ldots$$

Questi risultati numerici sono stati successivamente migliorati da vari autori (vedi [20], pp. 562-563), fino ai migliori valori dimostrati finora, e cioè le misure d'irrazionalità (2.4) e (2.5) ottenute da Rhin e dall'autore in [12] e [13].

Concludiamo questo paragrafo citando altri risultati aritmetici sui valori della funzione zeta (3.6) negli interi > 1. Richiamiamo la formula euleriana per i valori della zeta negli interi pari:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{2(2k)!} (2\pi)^{2k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.10}$$

(vedi ad es. [11], formula (9.1)), dove i B_{2k} sono numeri di Bernoulli, definiti dallo sviluppo di Taylor

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{x^h}{h!}.$$

Si ha $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_{2k+1} = 0$ per $k \geq 1$. Con una facile ricorrenza si ottiene inoltre $B_{2k} \in \mathbb{Q}$. Dunque dalla (3.10) si vede che $\zeta(2k)$ è un multiplo razionale di π^{2k} ed è quindi trascendente, in virtú del teorema di Lindemann sulla trascendenza di π.

I risultati aritmetici finora dimostrati sui valori $\zeta(2k+1)$ sono pochi e frammentari. Oltre al teorema di Apéry [2] sull'irrazionalità di $\zeta(3)$, e alla misura d'irrazionalità (2.5), abbiamo il teorema di Rivoal ([3], [16]):

Lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ *generato da*

$$1,\ \zeta(3),\ \zeta(5), \ldots,\ \zeta(2n+1)$$

ha dimensione $>$ (costante) $\log n$. *In particolare, esistono infiniti interi positivi* k *tali che* $\zeta(2k+1) \notin \mathbb{Q}$.

Il metodo di Rivoal non permette di determinare nessun intero $k \geq 2$ tale che $\zeta(2k+1) \notin \mathbb{Q}$. Ad esempio, la congettura $\zeta(5) \notin \mathbb{Q}$ non è dimostrata.

Si ha inoltre il seguente teorema di Zudilin [24]:

Almeno uno fra i quattro numeri $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *è irrazionale.*

4. – Trasformazioni birazionali e gruppi di permutazioni.

In questo paragrafo esponiamo brevemente gli aspetti principali del metodo introdotto da G. Rhin e dall'autore per trattare algebricamente integrali doppi e tripli di tipo euleriano che generalizzano (3.7) e (3.8). Per maggiori dettagli rinviamo ai lavori [12], [13], [14] e [21].

4.1 – *Integrali doppi*

Nel lavoro [12], generalizzando l'integrale (3.7), definiamo

$$I(h,j,k,l,m) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^j\, y^l(1-y)^k}{(1-xy)^{j+k-m}}\, \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}\,, \tag{4.1}$$

dove h, j, k, l, m sono interi ≥ 0 (questa condizione assicura la convergenza dell'integrale (4.1)). Introduciamo la trasformazione birazionale $\tau : (x,y) \mapsto (X,Y)$ definita dalle equazioni

$$\tau : \begin{cases} X = \dfrac{1-x}{1-xy} \\[2mm] Y = 1-xy\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

La trasformazione inversa è data evidentemente da

$$\tau^{-1} : \begin{cases} x = 1-XY \\[2mm] y = \dfrac{1-Y}{1-XY}\,, \end{cases} \tag{4.3}$$

e le (4.2), (4.3) mostrano che τ è una bigezione del quadrato aperto $(0,1)^2$ in sé. Applicando ripetutamente la trasformazione (4.2) si vede facilmente che τ ha periodo 5. Inoltre il determinante jacobiano della (4.2) è

$$\frac{\mathrm{d}(X,Y)}{\mathrm{d}(x,y)} = \frac{x}{1-xy} = \frac{1-XY}{1-xy}\,,$$

e quindi τ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y}{1-XY} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}\,.$$

Pertanto sia il dominio d'integrazione $(0,1)^2$ sia la misura $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/(1-xy)$ nell'integrale (4.1) sono invarianti per l'azione di τ. Applicando a (4.1) il cambiamento di variabili (4.3) si ottiene $I(j,k,l,m,h)$, cioè l'integrale stesso con i cinque parametri h, j, k, l, m permutati ciclicamente. Dunque il valore dell'integrale (4.1) è invariante per l'azione della permutazione ciclica $\boldsymbol{\tau}$ data da

$$\boldsymbol{\tau} = (h\ \ j\ \ k\ \ l\ \ m).$$

Inoltre, sia $\sigma : (x,y) \mapsto (X,Y)$ definita da

$$\sigma : \begin{cases} X = y \\ Y = x. \end{cases}$$

Applicando a (4.1) la trasformazione σ, cioè scambiando le variabili x, y, otteniamo $I(l,k,j,h,m)$. Dunque il valore dell'integrale (4.1) è invariante anche per l'azione della permutazione

$$\boldsymbol{\sigma} = (h\ \ l)(j\ \ k).$$

Si conclude che il valore di (4.1) è invariante per l'azione del gruppo di permutazioni

$$\boldsymbol{T} = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \rangle \tag{4.4}$$

generato da $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, che è chiaramente isomorfo al gruppo diedrale $\mathfrak{D}_5$ di ordine 10.

Oltre agli interi

$$h,\ j,\ k,\ l,\ m \tag{4.5}$$

si considerano i cinque interi ausiliari

$$k+l-h,\quad l+m-j,\quad m+h-k,\quad h+j-l,\quad j+k-m, \tag{4.6}$$

l'ultimo dei quali è l'esponente a denominatore dell'integrale (4.1) e gli altri sono ottenuti applicando ad esso le successive potenze della permutazione ciclica $\boldsymbol{\tau}$. Indichiamo con max, max$'$, max$''$, ... i massimi successivi in una successione finita di numeri reali: se $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ è una successione finita qualsiasi di numeri reali con $n \geq 3$ e $i_1, \dots, i_n$ è un riordinamento di $1, \dots, n$ tale che

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq a_{i_3} \geq \dots \geq a_{i_n},$$

poniamo

$$\max \mathcal{A} = a_{i_1}, \quad \max{}' \mathcal{A} = a_{i_2}, \quad \max{}'' \mathcal{A} = a_{i_3}. \tag{4.7}$$

Detta $\mathcal{S}$ la successione dei cinque interi (4.6), definiamo

$$H = \max \mathcal{S}, \qquad K = \max{}' \mathcal{S}. \tag{4.8}$$

In [12], Teor. 2.2, generalizziamo il risultato aritmetico (3.7) dimostrando che

$$I(h,j,k,l,m) = u - v\zeta(2), \text{ con } v \in \mathbb{Z} \text{ e } d_H d_K u \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

Inoltre ([12], Lemma 2.6) l'intero v è esprimibile come doppio integrale di contorno:

$$v = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_C \oint_{C_x} \frac{x^h(1-x)^j\, y^l(1-y)^k}{(1-xy)^{j+k-m}} \, \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}, \tag{4.10}$$

dove $C = \{x \in \mathbb{C} : |x| = \rho_1\}$ e $C_x = \{y \in \mathbb{C} : |y - 1/x| = \rho_2\}$ per ogni $\rho_1, \rho_2 > 0$. Per dimostrare (4.9) e (4.10) si usa in modo essenziale l'azione del gruppo di permutazioni (4.4).

Poiché sia $\boldsymbol{\tau}$ che $\boldsymbol{\sigma}$ permutano gli interi (4.5) e, separatamente, gli interi (4.6), l'azione del gruppo (4.4) è intransitiva sull'insieme dei dieci interi (4.5)–(4.6). Sotto l'ulteriore ipotesi che, oltre ai (4.5), anche gli interi ausiliari (4.6) siano ≥ 0, possiamo introdurre una nuova permutazione "ipergeometrica" $\boldsymbol{\varphi}$, indotta dalla formula di trasformazione (3.5), che agisce sui dieci interi (4.5)–(4.6) in modo tale che il gruppo generato dalle permutazioni $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ risulti transitivo su (4.5)–(4.6).

Scegliendo

$$a = j+k-m+1, \qquad \beta = h+1, \qquad \gamma = h+j+2,$$

dalla (3.5) abbiamo

$$\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^j}{(1-xy)^{j+k-m+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{h!\,j!}{(j+k-m)!\,(m+h-k)!} \int_0^1 \frac{x^{j+k-m}(1-x)^{m+h-k}}{(1-xy)^{h+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Moltiplicando per $y^l(1-y)^k$ e integrando in $0 \leq y \leq 1$ si ha

$$I(h,j,k,l,m) = \frac{h!\,j!}{(j+k-m)!\,(m+h-k)!}\, I(j+k-m,\, m+h-k,\, k,\, l,\, m),$$

e ne segue

$$\frac{I(h,j,k,l,m)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!} = \frac{I(j+k-m,\, m+h-k,\, k,\, l,\, m)}{(j+k-m)!\,(m+h-k)!\,k!\,l!\,m!}. \tag{4.11}$$

Indichiamo con $\boldsymbol{\varphi}$ la permutazione associata in modo naturale alla formula di trasformazione (4.11), che agli interi h, j, k, l, m fa corrispondere rispettivamente $j+k-m$, $m+h-k$, k, l, m, e che estendiamo per linearità ad una qualunque combinazione lineare di h, j, k, l, m. L'azione di $\boldsymbol{\varphi}$ sui dieci interi

(4.5)–(4.6) è la seguente:

$$\boldsymbol{\varphi} = (h \quad j+k-m)(j \quad m+h-k)(k+l-h \quad l+m-j).$$

In virtú della (4.11) e dell'invarianza dell'integrale (4.1) per le azioni di $\boldsymbol{\tau}$ e di $\boldsymbol{\sigma}$, il valore del quoziente

$$\frac{I(h,j,k,l,m)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!}$$

è invariante per l'azione del gruppo

$$\boldsymbol{\Phi} = \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \rangle \tag{4.12}$$

generato da $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, che è evidentemente transitiva sull'insieme (4.5)–(4.6). Dunque per ogni permutazione $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Phi}$ si ha

$$\frac{I(h,j,k,l,m)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!} = \frac{I\big(\boldsymbol{\rho}(h),\boldsymbol{\rho}(j),\boldsymbol{\rho}(k),\boldsymbol{\rho}(l),\boldsymbol{\rho}(m)\big)}{\boldsymbol{\rho}(h)!\,\boldsymbol{\rho}(j)!\,\boldsymbol{\rho}(k)!\,\boldsymbol{\rho}(l)!\,\boldsymbol{\rho}(m)!}\,, \tag{4.13}$$

e associamo a $\boldsymbol{\rho}$ il quoziente di fattoriali

$$\frac{h!\,j!\,k!\,l!\,m!}{\boldsymbol{\rho}(h)!\,\boldsymbol{\rho}(j)!\,\boldsymbol{\rho}(k)!\,\boldsymbol{\rho}(l)!\,\boldsymbol{\rho}(m)!} \tag{4.14}$$

proveniente dalla formula di trasformazione (4.13) per $I(h,j,k,l,m)$. È facile vedere che se $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho}'$ appartengono alla stessa classe laterale sinistra del sottogruppo $\boldsymbol{T} = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ in $\boldsymbol{\Phi} = \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, il quoziente (4.14) è uguale all'analogo quoziente per $\boldsymbol{\rho}'$. Dunque ad ogni classe laterale sinistra di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{\Phi}$ si può associare il corrispondente quoziente (4.14), dove $\boldsymbol{\rho}$ è un rappresentante qualsiasi della classe laterale considerata.

In [12] si dimostra che il gruppo $\boldsymbol{\Phi}$ è isomorfo al gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_5$ delle permutazioni di 5 elementi; in particolare, l'ordine di $\boldsymbol{\Phi}$ è

$$|\boldsymbol{\Phi}| = 5! = 120.$$

Poiché $|\boldsymbol{T}| = 10$, vi sono 12 classi laterali sinistre di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{\Phi}$; queste forniscono 12 quozienti di fattoriali (4.14) effettivamente distinti.

Sia $\mathcal{T}$ la successione dei dieci interi (4.5)–(4.6), e sia

$$M = \max \mathcal{T}, \qquad N = \max{}' \mathcal{T}.$$

Chiaramente gli H e K definiti in (4.8) soddisfano $H \le M$ e $K \le N$; dunque d_M/d_H e d_N/d_K sono interi. Ne segue che la (4.9) vale a fortiori con M al posto di H e N al posto di K. Piú in generale, poiché $\boldsymbol{\Phi}$ agisce transitivamente su (4.5)–(4.6), per ogni $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Phi}$ otteniamo

$$I\big(\boldsymbol{\rho}(h),\boldsymbol{\rho}(j),\boldsymbol{\rho}(k),\boldsymbol{\rho}(l),\boldsymbol{\rho}(m)\big) = u^{(\boldsymbol{\rho})} - v^{(\boldsymbol{\rho})}\zeta(2), \qquad \text{con } v^{(\boldsymbol{\rho})} \in \mathbb{Z} \text{ e } d_M d_N u^{(\boldsymbol{\rho})} \in \mathbb{Z}\,, \tag{4.15}$$

dove $u^{(\boldsymbol{\rho})}$ e $v^{(\boldsymbol{\rho})}$ dipendono soltanto dalla classe laterale sinistra di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{\Phi}$ contenente $\boldsymbol{\rho}$.

Nell'insieme degli interi (4.5)–(4.6) sostituiamo ad h, j, k, l, m, rispettivamente, hn, jn, kn, ln, mn, con $h, j, k, l, m \geq 0$ interi fissati e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dalle (4.9) e (4.15) abbiamo

$$d_{Mn}d_{Nn}\,I(hn, jn, kn, ln, mn) = U_n - V_n\zeta(2) \qquad (U_n, V_n \in \mathbb{Z}) \tag{4.16}$$

e

$$d_{Mn}d_{Nn}\,I\big(\boldsymbol{\rho}(h)n, \boldsymbol{\rho}(j)n, \boldsymbol{\rho}(k)n, \boldsymbol{\rho}(l)n, \boldsymbol{\rho}(m)n\big) = U_n^{(\boldsymbol{\rho})} - V_n^{(\boldsymbol{\rho})}\zeta(2) \qquad (U_n^{(\boldsymbol{\rho})}, V_n^{(\boldsymbol{\rho})} \in \mathbb{Z}).$$

Dunque per la (4.13) otteniamo

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\rho}(h)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(j)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(k)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(l)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(m)n)!\,\big(U_n - V_n\zeta(2)\big)& \\ = (hn)!\,(jn)!\,(kn)!\,(ln)!\,(mn)!\,\big(U_n^{(\boldsymbol{\rho})} - V_n^{(\boldsymbol{\rho})}\zeta(2)\big)&,\end{aligned}$$

e dall'irrazionalità di $\zeta(2)$ segue

$$(\boldsymbol{\rho}(h)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(j)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(k)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(l)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(m)n)!\,U_n = (hn)!\,(jn)!\,(kn)!\,(ln)!\,(mn)!\,U_n^{(\boldsymbol{\rho})} \tag{4.17}$$

e

$$(\boldsymbol{\rho}(h)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(j)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(k)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(l)n)!\,(\boldsymbol{\rho}(m)n)!\,V_n = (hn)!\,(jn)!\,(kn)!\,(ln)!\,(mn)!\,V_n^{(\boldsymbol{\rho})}. \tag{4.18}$$

Con opportune scelte degli interi $h, j, k, l, m > 0$ nella (4.16), e stimando asintoticamente, per $n \to \infty$, sia l'integrale $I(hn, jn, kn, ln, mn)$ col metodo di Laplace, sia il coefficiente V_n espresso come doppio integrale di contorno mediante la (4.10), la Proposizione 1 del par. 2 applicata alla forma lineare a secondo membro della (4.16) fornisce misure di irrazionalità di $\zeta(2)$. Se, a questo scopo, si utilizza soltanto la forma lineare (4.16), la scelta asintoticamente migliore si ottiene per $h = j = k = l = m$, e fornisce la misura di irrazionalità $\mu\big(\zeta(2)\big) < 11,85078\ldots$ di Apéry–Beukers. Con tale scelta, tuttavia, i dieci interi (4.5)–(4.6) coincidono e quindi, per ogni $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Phi}$, i fattoriali si eliminano dalle formule (4.17) e (4.18), e si ha $U_n = U_n^{(\boldsymbol{\rho})}$ e $V_n = V_n^{(\boldsymbol{\rho})}$. Ciò non permette di determinare un divisore comune di U_n e V_n, e perciò se $h = j = k = l = m$ non è possibile applicare il metodo di Siegel accennato alla fine del par. 2.

Al contrario, scegliendo h, j, k, l, m non tutti uguali, si può trovare un divisore Δ_n esponenzialmente grande comune a U_n e V_n, e quindi migliorare notevolmente il risultato di Apéry–Beukers mediante il metodo di Siegel. Il divisore Δ_n si costruisce utilizzando la valutazione p-adica dei fattoriali nelle formule (4.17) e (4.18) al variare della permutazione $\boldsymbol{\rho}$ in un insieme di rappresentanti delle classi laterali sinistre di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{\Phi}$, e perciò la sua costruzione dipende dall'azione del gruppo $\boldsymbol{\Phi}$. La tecnica che si utilizza a questo scopo è descritta in [12] par. 4, o in [21] par. 2.1.

Con la scelta $h = j = 12$, $k = l = 14$, $m = 13$, il metodo sviluppato in [12] fornisce la misura d'irrazionalità (2.4): $\mu\big(\zeta(2)\big) < 5,44124\ldots$.

4.2 – *Integrali tripli*

L'applicazione del metodo dei gruppi di permutazioni al caso di integrali tripli che generalizzano (3.8) è in linea di massima simile a quella descritta per gli integrali doppi, ma presenta alcune difficoltà supplementari. In [13] consideriamo l'integrale triplo

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l\, y^k(1-y)^s z^j(1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r}}\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}\,, \tag{4.19}$$

dove h, j, k, l, q, r, s sono interi ≥ 0. Dunque l'esponente $q+h-r$ a denominatore non supera la somma $q+h$ degli esponenti di $1-z$ e di x, ed è facile vedere che questa condizione è necessaria per la convergenza dell'integrale (4.19). Chiaramente, a causa della simmetria in x e y del denominatore $1-(1-xy)z$, per la convergenza di (4.19) è anche necessario che $q+h-r$ non superi la somma $q+k$ degli esponenti di $1-z$ e di y. Conviene quindi definire $m=k+r-h$, da cui

$$h+m \;=\; k+r, \tag{4.20}$$

e si vede facilmente che l'integrale (4.19) converge se e solo se gli otto interi h, j, k, l, m, q, r, s sono tutti ≥ 0.

Poniamo

$$I(h,j,k,l,m,q,r,s)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l\, y^k(1-y)^s z^j(1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r}}\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z} \tag{4.21}$$

dove m è un parametro "implicito", definito dalla (4.20). Introduciamo inoltre la trasformazione birazionale $\vartheta:(x,y,z)\mapsto(X,Y,Z)$ definita da

$$\vartheta:\begin{cases} X=(1-y)z\\[2mm] Y=\dfrac{(1-x)(1-z)}{1-(1-xy)z}\\[2mm] Z=\dfrac{y}{1-(1-y)z}\,. \end{cases} \tag{4.22}$$

La trasformazione inversa è data da

$$\vartheta^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{(1-Y)(1-Z)}{1-(1-XY)Z}\\[2mm] y=(1-X)Z\\[2mm] z=\dfrac{X}{1-(1-X)Z}\,, \end{cases} \tag{4.23}$$

e dalle equazioni (4.22) e (4.23) segue che ϑ è una bigezione del cubo aperto $(0,1)^3$ in sé. Inoltre la trasformazione ϑ ha periodo 8 e soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z} = -\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}\,.$$

Perciò, applicando all'integrale (4.21) il cambiamento di variabili (4.23) e poi scrivendo x,y,z al posto di X,Y,Z rispettivamente, si ottiene l'integrale

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{x^j(1-x)^{k+r-h}\,y^l(1-y)^h\,z^k(1-z)^r}{(1-(1-x)z)^{j+q-l-s}\,(1-(1-xy)z)^{r+l-q}}\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}\,. \tag{4.24}$$

Per la (4.20) l'esponente $k+r-h$ di $1-x$ è uguale ad m. Imponendo la condizione

$$j+q = l+s, \tag{4.25}$$

il fattore "parassita" $1-(1-x)z$ scompare dall'integrale (4.24), e l'esponente $r+l-q$ di $1-(1-xy)z$ è uguale a $r+j-s$. Dunque l'integrale (4.24) diviene $I(j,k,l,m,q,r,s,h)$. Si conclude che se gli interi h, j, k, l, m, q, r, $s\geq 0$ soddisfano le condizioni lineari (4.20) e (4.25), il valore dell'integrale (4.21) è invariante per l'azione della permutazione ciclica

$$\boldsymbol{\vartheta} = (h\ \ j\ \ k\ \ l\ \ m\ \ q\ \ r\ \ s).$$

Sia ora $\sigma : (x,y,z)\mapsto(X,Y,Z)$ la trasformazione

$$\sigma:\begin{cases} X=y\\ Y=x\\ Z=z.\end{cases}$$

Applicando σ all'integrale (4.21), cioè scambiando le variabili x,y, in virtú della (4.20) otteniamo $I(k,j,h,s,r,q,m,l)$. Perciò il valore di (4.21) è invariante anche per l'azione della permutazione

$$\boldsymbol{\sigma} = (h\ \ k)(l\ \ s)(m\ \ r).$$

Si noti che la permutazione $\boldsymbol{\vartheta}$ scambia fra loro le condizioni lineari (4.20) e (4.25) mentre $\boldsymbol{\sigma}$ conserva sia la (4.20) che la (4.25); infatti

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\vartheta}(h)+\boldsymbol{\vartheta}(m) &= j+q = l+s = \boldsymbol{\vartheta}(k)+\boldsymbol{\vartheta}(r),\\
\boldsymbol{\vartheta}(j)+\boldsymbol{\vartheta}(q) &= k+r = m+h = \boldsymbol{\vartheta}(l)+\boldsymbol{\vartheta}(s),\\
\boldsymbol{\sigma}(h)+\boldsymbol{\sigma}(m) &= k+r = h+m = \boldsymbol{\sigma}(k)+\boldsymbol{\sigma}(r),\\
\boldsymbol{\sigma}(j)+\boldsymbol{\sigma}(q) &= j+q = s+l = \boldsymbol{\sigma}(l)+\boldsymbol{\sigma}(s).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dunque, sotto le sole condizioni (4.20) e (4.25), il valore dell'integrale (4.21) è invariante per l'azione del gruppo di permutazioni

$$\boldsymbol{\Theta} = \langle\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{\sigma}\rangle$$

generato da $\boldsymbol{\vartheta}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, che è isomorfo al gruppo diedrale $\mathfrak{D}_8$ di ordine 16.

Anche nel caso attuale, oltre agli interi

$$h,\ j,\ k,\ l,\ m,\ q,\ r,\ s \tag{4.27}$$

soddisfacenti le (4.20) e (4.25), è necessario considerare interi ausiliari, e precisamente i seguenti:

$$\begin{aligned}
h' &:= h + l - j = h + q - s,\\
j' &:= j + m - k = j + r - h,\\
k' &:= k + q - l = k + s - j,\\
l' &:= l + r - m = l + h - k,\\
m' &:= m + s - q = m + j - l,\\
q' &:= q + h - r = q + k - m,\\
r' &:= r + j - s = r + l - q,\\
s' &:= s + k - h = s + m - r,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

dove le due espressioni di ciascun intero (4.28) si ottengono applicando o la (4.20) o la (4.25). Si noti che le (4.20) e (4.25) implicano

$$h' + m' = h + m = k + r = k' + r'$$

e

$$j' + q' = j + q = l + s = l' + s'.$$

Analogamente al caso bidimensionale, con la notazione (4.7) definiamo

$$H = \max \mathcal{U}, \qquad K = \max{}' \mathcal{U}, \qquad L = \max{}'' \mathcal{U},$$

dove $\mathcal{U}$ è la successione degli otto interi (4.28). Utilizzando l'azione del gruppo $\boldsymbol{\Theta}$, in [13] dimostriamo che, sotto le condizioni (4.20) e (4.25), si ha

$$I(h,j,k,l,m,q,r,s) = u' - 2v'\zeta(3), \ \text{ con } v' \in \mathbb{Z} \text{ e } d_H d_K d_L u' \in \mathbb{Z}, \tag{4.29}$$

dove l'intero v' è dato dal triplo integrale di contorno

$$v' = -\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^3 \oint_C \oint_{C_x} \oint_{C_{x,y}} \frac{x^h(1-x)^l\, y^k(1-y)^s\, z^j(1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r}} \, \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}$$

con $C = \{x \in \mathbb{C} : |x| = \rho_1\}$, $C_x = \{y \in \mathbb{C} : |y - 1/x| = \rho_2\}$ e $C_{x,y} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1-xy)^{-1}| = \rho_3\}$ per ogni $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$.

Se, oltre agli interi (4.27), anche gli interi ausiliari (4.28) sono ≥ 0, possiamo introdurre due permutazioni "ipergeometriche" $\boldsymbol{\psi}$ e $\boldsymbol{\chi}$ nel modo seguente. Cambiando nella (3.5) y in $-yz/(1-z)$ e scegliendo

$$a = q + h - r + 1, \qquad \beta = h + 1, \qquad \gamma = h + l + 2,$$

otteniamo

$$\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r+1}}\,\mathrm{d}x \;=\; (1-z)^{r-q}\,\frac{h!\,l!}{q'!\,r'!}\int_0^1 \frac{x^{q'}(1-x)^{r'}}{(1-(1-xy)z)^{h+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Moltiplicando per $y^k(1-y)^s\,z^j(1-z)^q$ e integrando in $0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$, si ha

$$I(h,j,k,l,m,q,r,s) \;=\; \frac{h!\,l!}{q'!\,r'!}\,I(q',j,k,r',m,r,q,s),$$

da cui

$$\frac{I(h,j,k,l,m,q,r,s)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!\,q!\,r!\,s!} \;=\; \frac{I(q',j,k,r',m,r,q,s)}{q'!\,j!\,k!\,r'!\,m!\,r!\,q!\,s!}\,. \tag{4.30}$$

Cambiando invece nella (3.5) x in z e y in $1-xy$, e scegliendo

$$a \;=\; q+h-r+1, \qquad \beta \;=\; j+1, \qquad \gamma \;=\; j+q+2,$$

abbiamo

$$\int_0^1 \frac{z^j(1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r+1}}\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{j!\,q!}{q'!\,j'!}\int_0^1 \frac{z^{q'}(1-z)^{j'}}{(1-(1-xy)z)^{j+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Moltiplicando per $x^h(1-x)^l\,y^k(1-y)^s$ e integrando in $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$, si ha

$$I(h,j,k,l,m,q,r,s) \;=\; \frac{j!\,q!}{q'!\,j'!}\,I(h,q',k,l,m,j',r,s),$$

e ne segue

$$\frac{I(h,j,k,l,m,q,r,s)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!\,q!\,r!\,s!} \;=\; \frac{I(h,q',k,l,m,j',r,s)}{h!\,q'!\,k!\,l!\,m!\,j'!\,r!\,s!}\,. \tag{4.31}$$

Analogamente al caso bidimensionale, indichiamo con $\boldsymbol{\psi}$ e $\boldsymbol{\chi}$ le permutazioni dei sedici interi (4.27)–(4.28) associate alle formule di trasformazione (4.30) e (4.31) rispettivamente. Abbiamo

$$\boldsymbol{\psi} \;=\; (h\;\;q')(l\;\;r')(q\;\;r)(m'\;\;s')$$

e

$$\boldsymbol{\chi} \;=\; (j\;\;q')(q\;\;j')(h'\;\;r')(k'\;\;m'),$$

da cui

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}(h)+\boldsymbol{\psi}(m) \;&=\; q'+m \;=\; k+q \;=\; \boldsymbol{\psi}(k)+\boldsymbol{\psi}(r),\\
\boldsymbol{\psi}(j)+\boldsymbol{\psi}(q) \;&=\; j+r \;=\; r'+s \;=\; \boldsymbol{\psi}(l)+\boldsymbol{\psi}(s),\\
\boldsymbol{\chi}(h)+\boldsymbol{\chi}(m) \;&=\; h+m \;=\; k+r \;=\; \boldsymbol{\chi}(k)+\boldsymbol{\chi}(r),\\
\boldsymbol{\chi}(j)+\boldsymbol{\chi}(q) \;&=\; q'+j' \;=\; l+s \;=\; \boldsymbol{\chi}(l)+\boldsymbol{\chi}(s).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Per le (4.26) e (4.32), il gruppo

$$\boldsymbol{\Psi} = \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$$

generato da $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\sigma}$, analogo al gruppo (4.12), agisce transitivamente sugli interi (4.27)–(4.28) sotto le sole condizioni lineari (4.20) e (4.25), e per ogni permutazione $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Psi}$ si ha

$$\frac{I(h,j,k,l,m,q,r,s)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!\,q!\,r!\,s!} = \frac{I\big(\boldsymbol{\rho}(h),\boldsymbol{\rho}(j),\boldsymbol{\rho}(k),\boldsymbol{\rho}(l),\boldsymbol{\rho}(m),\boldsymbol{\rho}(q),\boldsymbol{\rho}(r),\boldsymbol{\rho}(s)\big)}{\boldsymbol{\rho}(h)!\,\boldsymbol{\rho}(j)!\,\boldsymbol{\rho}(k)!\,\boldsymbol{\rho}(l)!\,\boldsymbol{\rho}(m)!\,\boldsymbol{\rho}(q)!\,\boldsymbol{\rho}(r)!\,\boldsymbol{\rho}(s)!}\,.$$

In [13] si dimostra che esiste una successione esatta di gruppi moltiplicativi:

$$1 \to K \hookrightarrow \boldsymbol{\Psi} \to \mathfrak{S}_5 \to 1, \tag{4.33}$$

dove K è isomorfo al gruppo additivo $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ e $\mathfrak{S}_5$ è il gruppo simmetrico delle permutazioni di cinque elementi. Ne segue $|K| = 2^4$, $|\mathfrak{S}_5| = 5!$, e dalla successione esatta (4.33) si ricava l'ordine di $\boldsymbol{\Psi}$:

$$|\boldsymbol{\Psi}| = 2^4 \cdot 5! = 1920.$$

Poiché $|\boldsymbol{\Theta}| = 16$, vi sono 120 classi laterali sinistre del sottogruppo $\boldsymbol{\Theta} = \langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ nel gruppo $\boldsymbol{\Psi} = \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, alle quali corrispondono 120 quozienti distinti

$$\frac{h!\,j!\,k!\,l!\,m!\,q!\,r!\,s!}{\boldsymbol{\rho}(h)!\,\boldsymbol{\rho}(j)!\,\boldsymbol{\rho}(k)!\,\boldsymbol{\rho}(l)!\,\boldsymbol{\rho}(m)!\,\boldsymbol{\rho}(q)!\,\boldsymbol{\rho}(r)!\,\boldsymbol{\rho}(s)!}\,,$$

al variare di $\boldsymbol{\rho}$ in un insieme di rappresentanti delle classi stesse.

Ponendo

$$M = \max \mathcal{V}, \qquad N = \max{}' \mathcal{V}, \qquad Q = \max{}'' \mathcal{V},$$

dove $\mathcal{V}$ è la successione dei sedici interi (4.27)–(4.28), la (4.29) vale a fortiori con M, N, Q al posto di H, K, L rispettivamente, e per ogni $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Psi}$ abbiamo

$$I\big(\boldsymbol{\rho}(h),\boldsymbol{\rho}(j),\boldsymbol{\rho}(k),\boldsymbol{\rho}(l),\boldsymbol{\rho}(m),\boldsymbol{\rho}(q),\boldsymbol{\rho}(r),\boldsymbol{\rho}(s)\big) = u'^{(\boldsymbol{\rho})} - 2v'^{(\boldsymbol{\rho})}\zeta(3),$$

$$\text{con } v'^{(\boldsymbol{\rho})} \in \mathbb{Z} \text{ e } d_M d_N d_Q u'^{(\boldsymbol{\rho})} \in \mathbb{Z}\,.$$

Con un metodo del tutto simile a quello indicato nel caso bidimensionale, cambiando h, j, k, l, m, q, r, s rispettivamente in hn, jn, kn, ln, mn, qn, rn, sn, con h, j, k, l, m, q, r, $s \geq 0$ interi fissati e $n = 1, 2, 3, \ldots$, si ottiene, analogamente alla (4.16),

$$d_{Mn} d_{Nn} d_{Qn}\, I(hn, jn, kn, ln, mn, qn, rn, sn) = U'_n - 2V'_n\zeta(3) \quad (U'_n, V'_n \in \mathbb{Z}), \tag{4.34}$$

e l'azione del gruppo $\boldsymbol{\Psi}$ permette di costruire p-adicamente un divisore Δ_n esponenzialmente grande comune a U'_n e V'_n. Combinando la stima asintotica di Δ_n con quelle dell'integrale e di V'_n nella (4.34) per $n \to \infty$, si ottengono buone misure di irrazionalità di $\zeta(3)$.

Con la scelta

$$h=16,\ \ j=17,\ \ k=19,\ \ l=15,\ \ m=12,\ \ q=11,\ \ r=9,\ \ s=13,$$

soddisfacente le condizioni lineari (4.20) e (4.25), otteniamo in [13] la misura di irrazionalità (2.5): $\mu\big(\zeta(3)\big) < 5,51389\ldots$.

4.3 – *Dilogaritmi*

Un'altra applicazione del metodo dei gruppi di permutazioni dovuto a Rhin e all'autore è data nel lavoro [14], e riguarda lo studio aritmetico di integrali doppi dipendenti da un parametro collegati alla funzione dilogaritmo Li_2. Per ogni intero $k \geq 1$, il polilogaritmo Li_k di ordine k è definito dalla serie di Taylor

$$\mathrm{Li}_k(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \qquad (|x|<1).$$

In particolare si ha

$$\mathrm{Li}_1(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \;=\; -\log(1-x)$$

e

$$\mathrm{Li}_2(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \;=\; -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Per $h, j, k, l, m \geq 0$ interi e $z>1$ reale, in [14] si definiscono gli integrali doppi

$$I_z^{(0)}(h,j,k,l,m) \;=\; z^{-l-m}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{x^j(1-x)^h\,y^k(1-y)^l}{(x(1-y)+yz)^{j+k-m+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.35}$$

$$I_z^{(1)}(h,j,k,l,m) = z^{-l-m}\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\left|y-\frac{x}{x-z}\right|=\rho}\frac{x^j(1-x)^h\,y^k(1-y)^l}{(x(1-y)+yz)^{j+k-m+1}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} &I_z^{(2)}(h,j,k,l,m)\\ &\quad= z^{-l-m}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|x-z|=\sigma}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\left|y-\frac{x}{x-z}\right|=\rho}\frac{x^j(1-x)^h\,y^k(1-y)^l}{(x(1-y)+yz)^{j+k-m+1}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.37}$$

per $\rho,\sigma>0$. Si introduce inoltre l'involuzione $\lambda : y \mapsto Y$ definita dall'equazione

$$\lambda:\ Y \;=\; \frac{x(1-y)}{x(1-y)+yz}\,, \tag{4.38}$$

che soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}Y}{x(1-Y)+Yz} = -\frac{\mathrm{d}y}{x(1-y)+yz}\,.$$

Per ogni x tale che $0 < x < 1$, λ trasforma bigettivamente l'intervallo aperto $0 < y < 1$ in $0 < Y < 1$, e, per ogni $x \in \mathbb{C}$ tale che $x \neq 0$, $x \neq z$, trasforma ogni circonferenza $|y - x/(x-z)| = \rho > 0$ con $y \in \mathbb{C}$ in un'analoga circonferenza $|Y - x/(x-z)| = \rho' > 0$. Perciò, applicando agli integrali (4.35), (4.36) e (4.37) il cambiamento di variabile (4.38), si ottiene facilmente

$$I_z^{(v)}(h,j,k,l,m) = I_z^{(v)}(h,m,l,k,j) \qquad (v = 0,1,2). \tag{4.39}$$

Alla trasformazione λ associamo quindi la permutazione

$$\boldsymbol{\lambda} = (j\ \ m)(k\ \ l),$$

e i valori degli integrali (4.35), (4.36) e (4.37) sono invarianti per l'azione di $\boldsymbol{\lambda}$.

Definiamo inoltre

$$\begin{aligned} H &= \max\,(l+m-j,\ m+h-k,\ h+j-l,\ j+k-m),\\ K &= \max\,(l+m-j,\ \min\,(m+h-k,\ h+j-l),\ j+k-m),\\ \alpha &= \max\,(j+k,\ k+l,\ l+m),\\ \beta &= \max\,(0,\ k+l-h),\\ \delta &= \max\,(h,\ m+h-k,\ h+j-l,\ j+k,\ k+l,\ l+m). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Estendendo per linearità ad ogni combinazione lineare di h, j, k, l, m l'azione della permutazione $\boldsymbol{\lambda}$, si vede facilmente che gli interi H, K, α, β, $\delta \geq 0$ sono invarianti per l'azione di $\boldsymbol{\lambda}$.

L'integrale (4.35) rappresenta una forma contenente $\log z$, $\mathrm{Li}_1(1/z)$ e $\mathrm{Li}_2(1/z)$. Per eliminare i termini indesiderati in cui compaiono $\log z$ e $\mathrm{Li}_1(1/z)$ si definisce

$$I_z(h,j,k,l,m) = I_z^{(0)}(h,j,k,l,m) - (\log z)\, I_z^{(1)}(h,j,k,l,m),$$

da cui, per la (4.39),

$$I_z(h,j,k,l,m) = I_z(h,m,l,k,j).$$

Con le definizioni (4.40) abbiamo allora le seguenti formule di struttura ([14], Teor. 2.1):

$$\begin{aligned} d_H d_K z^\alpha (z-1)^\beta I_z(h,j,k,l,m) &= P(z) - Q(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z),\\ d_H d_K z^\alpha (z-1)^\beta I_z^{(1)}(h,j,k,l,m) &= R(z) - Q(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z),\\ d_H d_K z^\alpha (z-1)^\beta I_z^{(2)}(h,j,k,l,m) &= Q(z), \end{aligned} \tag{4.41}$$

dove

$$P(z),\ Q(z),\ R(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad \max\,(\deg P(z),\ \deg Q(z),\ \deg R(z)) \leq \delta. \tag{4.42}$$

Il polinomio $Q(z)$ è lo stesso nelle tre formule (4.41).

La formula di trasformazione ipergeometrica (3.5) vale anche per integrali di Cauchy su curve chiuse. Applicando la (3.5), in modo analogo a quanto fatto nei par. 4.1 e 4.2, sia ad integrali reali sull'intervallo $(0,1)$ sia ad integrali di contorno, si dimostra che i valori di

$$\frac{I_z^{(\nu)}(h,j,k,l,m)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!} \qquad (\nu = 0,1,2), \tag{4.43}$$

e quindi anche di

$$\frac{I_z(h,j,k,l,m)}{h!\,j!\,k!\,l!\,m!}\,, \tag{4.44}$$

sono invarianti per l'azione della permutazione "ipergeometrica" $\boldsymbol{\omega}$ definita da

$$\boldsymbol{\omega} = (h \quad m+h-k)(j \quad j+k-m)(k \quad m),$$

e quindi per l'azione del gruppo di permutazioni

$$\boldsymbol{\Omega} = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda} \rangle,$$

generato da $\boldsymbol{\lambda}$ e da $\boldsymbol{\omega}$, che agisce sui nove interi

$$h,\ j,\ k,\ l,\ m,\ l+m-j,\ m+h-k,\ h+j-l,\ j+k-m$$

supposti tutti ≥ 0. Si noti che sia $\boldsymbol{\lambda}$ che $\boldsymbol{\omega}$ agiscono identicamente sull'intero $k+l-h$ che interviene nella definizione (4.40) di β. Perciò $k+l-h$ è escluso dall'azione del gruppo $\boldsymbol{\Omega}$, e si può supporre $k+l-h \gtreqless 0$.

In [14] dimostriamo che $\boldsymbol{\Omega}$ è isomorfo al prodotto dei gruppi simmetrici $\mathfrak{S}_2$ e $\mathfrak{S}_3$:

$$\boldsymbol{\Omega} \cong \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3,$$

e quindi l'ordine di $\boldsymbol{\Omega}$ è

$$|\boldsymbol{\Omega}| = 2! \cdot 3! = 12.$$

Anche in questo caso abbiamo formule di trasformazione del tipo (4.13) per i quozienti (4.43) e (4.44), una per ciascuna classe laterale sinistra del sottogruppo $\boldsymbol{\Lambda} = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle$ di ordine 2 nel gruppo $\boldsymbol{\Omega}$ di ordine 12. Otteniamo quindi sei quozienti distinti di fattoriali del tipo (4.14).

Scegliamo il parametro $z > 1$ razionale, $z = s/r$ con $r,s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r < s$, e sostituiamo ad H e K, rispettivamente, gli interi

$$M = \max\,(h,\, j,\, k,\, l,\, m,\ l+m-j,\ m+h-k,\ h+j-l,\ j+k-m)$$

ed

$$N = \max\,(\max{}'(h,\ m+h-k,\ h+j-l),\, j,\, k,\, l,\, m,\ l+m-j,\ j+k-m)$$

che soddisfano $H \leq M$, $K \leq N$, e, come si vede facilmente, sono invarianti per l'azione del gruppo $\boldsymbol{\Omega}$. Poiché anche a, β e δ sono invarianti per l'azione di $\boldsymbol{\Omega}$, per le (4.41)–(4.42) si ha in particolare, per ogni $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$(4.45) \qquad d_M d_N \, r^{\delta-a-\beta} s^a (s-r)^\beta I_{s/r}\big(\boldsymbol{\rho}(h), \boldsymbol{\rho}(j), \boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\rho}(l), \boldsymbol{\rho}(m)\big) = r^\delta P_{\boldsymbol{\rho}}(s/r) - r^\delta Q_{\boldsymbol{\rho}}(s/r) \mathrm{Li}_2(r/s),$$

$$(4.46) \qquad d_M d_N \, r^{\delta-a-\beta} s^a (s-r)^\beta I^{(2)}_{s/r}\big(\boldsymbol{\rho}(h), \boldsymbol{\rho}(j), \boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\rho}(l), \boldsymbol{\rho}(m)\big) = r^\delta Q_{\boldsymbol{\rho}}(s/r),$$

dove i polinomi $P_{\boldsymbol{\rho}}$ e $Q_{\boldsymbol{\rho}}$ dipendono solo dalla classe laterale sinistra di $\boldsymbol{\Lambda}$ in $\boldsymbol{\Omega}$ contenente $\boldsymbol{\rho}$, e dove $r^\delta P_{\boldsymbol{\rho}}(s/r)$ e $r^\delta Q_{\boldsymbol{\rho}}(s/r)$ sono interi.

Cambiando nelle (4.45)–(4.46) h, j, k, l, m in hn, jn, kn, ln, mn rispettivamente, con $h, j, k, l, m \geq 0$ interi fissati e $n = 1, 2, 3, \ldots$, e applicando un metodo analogo a quello descritto alla fine del par. 4.1, si ottengono misure di irrazionalità di $\mathrm{Li}_2(r/s)$ per ogni $r \geq 1$ e per ogni s abbastanza grande rispetto ad r.

Il caso $r = 1$ era stato precedentemente trattato da Hata [10] con un metodo diverso dal nostro. In [10] Hata dimostra l'irrazionalità di $\mathrm{Li}_2(1/s)$ per ogni intero $s \geq 7$, e ottiene misure di irrazionalità di $\mathrm{Li}_2(1/s)$ con $s \geq 7$. In [14], usando il metodo dei gruppi di permutazioni, miglioriamo tutte le misure di irrazionalità di $\mathrm{Li}_2(1/s)$ ottenute da Hata in [10] e dimostriamo inoltre che $\mathrm{Li}_2(1/6) \notin \mathbb{Q}$, con $\mu\big(\mathrm{Li}_2(1/6)\big) < 783{,}29036\ldots$.

5. – Conclusione.

Il metodo dei gruppi di permutazioni descritto nel par. 4 si estende al caso multidimensionale, e fornisce teoremi di struttura aritmetica per integrali multipli di opportune funzioni razionali. Nel lavoro [15] consideriamo una generalizzazione naturale degli integrali (4.1) e (4.21) al caso di dimensione qualsiasi, e precisamente l'integrale

$$(5.1) \qquad \int_{(0,1)^n} \frac{X_1^{a_1}(1-X_1)^{b_1} \ldots X_n^{a_n}(1-X_n)^{b_n}}{(1-(1-X_1 \ldots X_{n-1})X_n)^{b_n+a_1-c_1}} \, \frac{\mathrm{d}X_1 \ldots \mathrm{d}X_n}{1-(1-X_1 \ldots X_{n-1})X_n},$$

dove $a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n;\ c_1$ sono interi ≥ 0. Analogamente alla (4.20), si definiscono successivamente interi $c_2, \ldots, c_{n-1}$ mediante le equazioni

$$\begin{aligned} a_1 + c_2 &= a_2 + c_1, \\ a_2 + c_3 &= a_3 + c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2} + c_{n-1} &= a_{n-1} + c_{n-2}, \end{aligned}$$

ed è facile vedere che l'integrale (5.1) converge se e solo se

$$(5.2) \qquad a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n;\ c_1, \ldots, c_{n-1} \geq 0.$$

Tuttavia nel caso di dimensione $n \geq 4$ non vi sono generalizzazioni naturali né della trasformazione birazionale (4.22) né della condizione lineare (4.25), e quindi non esiste un'azione di gruppo sull'integrale (5.1) che permuti ciclicamente tutti i parametri interi (5.2). Come conseguenza di ciò, contrariamente ai casi di dimensione 2 e 3, per $n \geq 4$ l'integrale (5.1) non è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti razionali soltanto di 1 e di $\zeta(n)$. In [15], Teor. 3.1, dimostriamo che in effetti l'integrale (5.1) è uguale a

$$A_1 + A_2\zeta(2) + A_3\zeta(3) + \ldots + A_{n-1}\zeta(n-1) + A_n(n-1)\zeta(n)$$

con $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in \mathbb{Q}$, $A_n \in \mathbb{Z}$, e che se $a_n + b_n \leq b_1 + \ldots + b_{n-1} + n - 3$ allora $A_2 = 0$. Questo risultato è ottenuto trasformando l'integrale (5.1) *non* in un altro integrale dello stesso tipo, ma in un integrale avente la misura

$$\frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3)\ldots(1-x_1x_2\ldots x_n)}$$

mediante la trasformazione birazionale $\eta_n : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (X_1, \ldots, X_n)$ definita dalle equazioni

$$\eta_n : \begin{cases} X_1 = \dfrac{(1-x_1\ldots x_{n-1})x_n}{1-x_1\ldots x_n} \\ X_2 = \dfrac{(1-x_1\ldots x_{n-2})x_{n-1}}{1-x_1\ldots x_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n-1} = \dfrac{(1-x_1)x_2}{1-x_1x_2} \\ X_n = 1-x_1\ldots x_n \end{cases} \tag{5.3}$$

che è una bigezione dell'ipercubo aperto $(0,1)^n$ in sé e soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \ldots \mathrm{d}X_n}{1-(1-X_1\ldots X_{n-1})X_n} = (-1)^{[n/2]+1} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3)\ldots(1-x_1x_2\ldots x_n)}\,. \tag{5.4}$$

Il problema della ricerca di trasformazioni birazionali che, utilizzate come cambiamento di variabili, trasformino l'uno nell'altro integrali multipli contenenti misure diverse è stato affrontato da Fischler in [6] e dall'autore in [21]. In [6] vengono inoltre studiate da un punto di vista geometrico varietà associate ai gruppi di permutazioni introdotti da Rhin e dall'autore. In [21] si introduce una famiglia di trasformazioni birazionali di dimensione 3 soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z} = \pm\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1-xy)(1-xyz)}\,,$$

e tali trasformazioni sono state recentemente generalizzate dall'autore in [23] al caso di dimensione qualsiasi, ottenendo una famiglia – contenente in particolare la trasformazione η_n definita in (5.3) – di soluzioni della (5.4) o dell'analoga equazione differenziale col segno $(-1)^{[n/2]}$.

Non vi è dubbio che ulteriori importanti progressi nello studio aritmetico di costanti esprimibili come integrali definiti di funzioni razionali possano essere ottenuti mediante una ricerca sistematica di trasformazioni birazionali soluzioni di opportune equazioni alle derivate parziali quali ad esempio la (5.4). Tuttavia la ricerca e la classificazione di trasformazioni birazionali di questo tipo sembra essere un problema assai difficile, che presumibilmente richiede un'applicazione congiunta sia di metodi algebro-geometrici che di metodi analitici.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Amoroso - C. Viola, *Approximation measures for logarithms of algebraic numbers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **30** (2001), 225-249.

[2] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11-13.

[3] K. Ball - T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), 193-207.

[4] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268-272.

[5] L. Euler, *De fractionibus continuis dissertatio*, Commentarii Acad. Sci. Imper. Petropol. **9** (1737), 98-137. Opera omnia, ser. I vol. 14, Teubner, Leipzig–Berlin, 1925, 187-215.

[6] S. Fischler, *Groupes de Rhin-Viola et intégrales multiples*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 479-534.

[7] L. Giacardi - C. S. Roero - C. Viola, *Sui contributi di Lagrange alla teoria dei numeri*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **53** (1995), 151-181.

[8] G. H. Hardy - E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, IV ediz., Oxford Univ. Press, 1960.

[9] M. Hata, *Rational approximations to π and some other numbers*, Acta Arith. **63** (1993), 335-349.

[10] M. Hata, *Rational approximations to the dilogarithm*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 363-387.

[11] H. Rademacher, *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren math. Wiss., Band 169, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1973.

[12] G. Rhin - C. Viola, *On a permutation group related to $\zeta(2)$*, Acta Arith. **77** (1996), 23-56.

[13] G. Rhin - C. Viola, *The group structure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **97** (2001), 269-293.

[14] G. Rhin - C. Viola, *The permutation group method for the dilogarithm*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (5) **4** (2005), 389-437.

[15] G. Rhin - C. Viola, *Multiple integrals and linear forms in zeta-values*, Funct. Approx. Comment. Math. **37** (2007), 429-444.

[16] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **331** (2000), 267-270.

[17] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1-20.

[18] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., 1929, n. 1. Gesammelte Abhandlungen, Band I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1966, 209-266.

[19] C. Viola, *Hypergeometric functions and irrationality measures*, in: Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Math. Soc. Lecture Note Series **247**, Cambridge Univ. Press, 1997, 353-360.

[20] C. Viola, *Birational transformations and values of the Riemann zeta-function*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 561-592.

[21] C. Viola, *The arithmetic of Euler's integrals*, Riv. Mat. Univ. Parma (7) **3*** (2004), 119-149.

[22] C. Viola, *Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità*, Boll. U.M.I. (8) **7-A** (2004), 291-320. *Addendum*, Boll. U.M.I. (8) **8-A** (2005), 179-182.

[23] C. Viola, *On the equivalence of Beukers-type and Sorokin-type multiple integrals*, in: Proceedings of the conference "Diophantine and analytic problems in number theory", Moscow, 29/1 – 2/2/2007 (in corso di pubblicazione).

[24] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 251-291.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Largo B. Pontecorvo 5, 56127 Pisa
e-mail: viola@dm.unipi.it

Received January 28, 2008 and in revised form February 12, 2008