
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MATTEO CERMINARA

Una derivazione semplice delle proprietà di stabilità del "Tipe Top"

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-B
(2007), n.3, p. 895–915.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_3_895_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

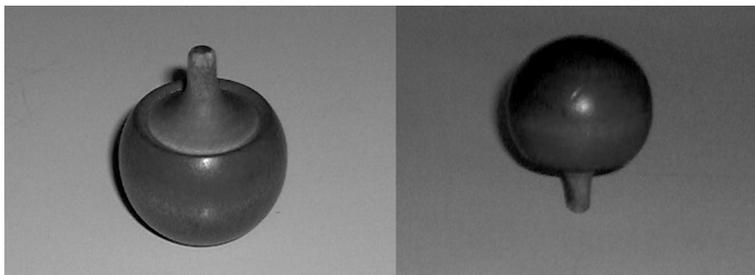
<http://www.bdim.eu/>

Una derivazione semplice delle proprietà di stabilità del “*Tippe Top*”

MATTEO CERMINARA

Sunto. – Si esamina il problema dell’inversione di stabilità in condizioni dinamiche nella trottola giroscopica nota in letteratura come *Tippe Top*. La trottola è di forma sferica, ma col centro distinto dal baricentro. Questo problema è stato affrontato con metodi diversi in vari lavori (qui ci riferiamo in particolare a [2] e [5]). Qui mostreremo che la tecnica usata in [2] può essere notevolmente semplificata per giungere rapidamente alle equazioni che governano l’inversione di stabilità (cioè la transizione dalla configurazione col baricentro più basso del centro a quella opposta) nella forma enunciata in [5]. Il metodo seguito consente di ottenere qualche risultato di stabilità anche in geometrie diverse da quella sferica.

Summary. – We consider the problem of the inversion of stability in the gyroscopic top known in literature as *Tippe Top* taking place in dynamical conditions. Such a top has a spherical shape with the baricenter not coincident with the geometrical center. The same problem has been investigated in many papers using various methods (here we refer in particular to [2] and [5]). We will show that the technique employed in [2] can be simplified, leading in a much simpler way to the conditions implying the stability inversion (i.e. the transition from the configuration in which the baricenter lie below the geometrical center to the opposite one) in the form enunciated in [5]. The method utilized allows to obtain stability result concerning non-spherical tops.



Il *Tippe Top*.



Wolfgang Pauli e Niels Bohr che studiano un *Tippe Top*. La foto è tratta dal sito del nuovo istituto di fisica dell'Università di Lund ed è datata il 31 Maggio 1951. Di Erik Gustafson, AIP Emilio Segre Visual Archives, Margrethe Bohr Collection (www.aip.org/history/esva).

1. – Introduzione.

La trottola divenuta nota in letteratura col nome di “*Tippe Top*” può essere schematizzata in prima battuta come una sfera non omogenea (eventualmente con parti mancanti), la quale possiede una struttura giroscopica, ma col baricentro distinto dal centro geometrico. Questo oggetto è noto da molti anni ed ha suscitato la curiosità di menti illustri, come mostra una simpatica foto del 1951, che ritrae Wolfgang Pauli e Niels Bohr che osservano visibilmente divertiti le evoluzioni di un *Tippe Top*. La versione del dispositivo osservabile nella foto è quella che ancora oggi si trova in commercio, la trottola è ricavata asportando una porzione della sfera, lasciando sporgere un “gambo” lungo l’asse giroscopico, che ha il duplice scopo di poter comunicare con le dita una rotazione allo strumento e di potere sostenere la rotazione sulla sua punta.

Chiaramente in condizioni di riposo su un piano d’appoggio orizzontale lo strumento ha due configurazioni d’equilibrio, entrambe con l’asse giroscopico verticale, una stabile (col baricentro più basso del centro della sfera), l’altra instabile. Le due configurazioni sono generalmente denominate *non invertita* ed *invertita*, rispettivamente. Il comportamento meccanico peculiare dello strumento consiste nella possibilità di scambiare la stabilità delle due configurazioni quando la velocità di rotazione sia abbastanza elevata. Perché ciò si verifichi è però necessario che le proprietà geometrico-materiali del sistema soddisfino opportune condizioni. Quando queste sono soddisfatte, l’oggetto, posto in rotazione nella configurazione staticamente stabile, compie un moto di inversione dell’asse, portandosi in rotazione nella configurazione opposta. Il

fatto è sorprendente perché questo movimento comporta un innalzamento del baricentro.

L'attrito col piano d'appoggio, comunque piccolo, ha un ruolo essenziale nel fenomeno di inversione (ciò era già stato segnalato in [6]). È altrettanto importante che il sistema possa slittare sul piano d'appoggio, cioè che sia un sistema olonomo.

Nonostante i numerosi studi negli anni '50, la prima analisi sistematica della stabilità del *Tippe Top* sembra essere [1], seguita dall'importante articolo [5], dove si utilizza l'energia come funzione di Liapunov, giungendo ad una descrizione completa della stabilità.

Un elemento chiave del lavoro [5] è l'uso dell'integrale di Jelett [7], una utilissima costante del moto riscoperta solo recentemente in [8], proprio per lo studio della trottola. Le informazioni bibliografiche di maggior rilievo sono contenute in [1] e in [5], ed una breve storia è tracciata in [2]. Quest'ultimo lavoro, più recente, affronta il problema da un punto di vista molto generale, studiando la stabilità non lineare e mostrando l'esistenza di una traiettoria eteroclinica che connette le configurazioni *non invertita* ed *invertita*. In [2] viene seguito un metodo diverso per lo studio della stabilità lineare, associando alle equazioni del moto un'equazione del tipo Maxwell-Bloch nel piano complesso, le cui radici caratteristiche vengono analizzate in base al criterio di Hurwitz [3]. Le conclusioni di [2] non coincidono con quelle di [5], perché è diversa la forma utilizzata dell'integrale di Jelett⁽¹⁾.

In questo lavoro vogliamo seguire il metodo di [2] per lo studio della stabilità lineare, mostrando che è possibile semplificare notevolmente l'analisi delle equazioni del tipo Maxwell-Bloch, giungendo ai medesimi risultati di [5] in maniera sorprendentemente semplice. Si presentano pure alcuni risultati numerici.

Al termine del lavoro mostriamo un metodo generale per studiare la stabilità di corpi rigidi a simmetria giroscopica sui quali agiscono la forza peso e la forza d'attrito, applicata in un sol punto. Riportiamo due esempi: la trottola ellittica e quella classica.

2. – Definizione delle variabili.

Con riferimento alla fig. 1 introduciamo le seguenti notazioni (i simboli tra parentesi si riferiscono alle variabili adimensionalizzate).

i*, *j* e *k: versori degli assi del sistema di riferimento solidale con il giroscopio e centrato nel suo baricentro ***B***; con ***k*** indichiamo più precisamente la direzione

⁽¹⁾ Quella usata da [5] è sicuramente corretta.

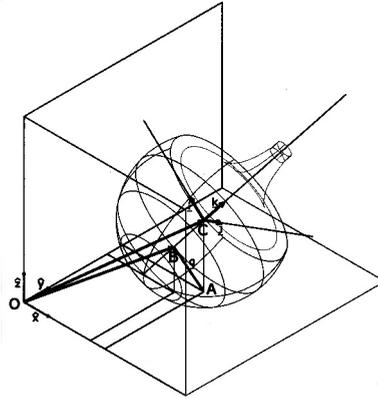


Fig. 1. - Schema dei sistemi di riferimento.

dell'asse giroscopico (questo riferimento è così il sistema degli assi principali centrali d'inerzia), il cui verso va da B a C (più tardi considereremo anche la situazione opposta).

\hat{x} , \hat{y} e \hat{z} : versori degli assi del sistema fisso; \hat{z} individua la direzione verticale ascendente.

s : Parametro adimensionale caratterizzante la posizione di C sull'asse giroscopico; nel sistema di riferimento solidale sopra introdotto, la coordinata di C sull'asse giroscopico è Rs (R raggio della sfera); ($0 \leq s < 1$).

q : vettore posizione del punto di appoggio (A) della sfera sul piano di rotazione rispetto al baricentro:

$$q = A - B = R(sk - \hat{z}).$$

x, y, z : coordinate del baricentro rispetto al sistema di riferimento fisso.

$L, (\lambda)$: Momento angolare rispetto al baricentro.

M : Momento delle forze rispetto al baricentro.

ω : Velocità angolare del sistema.

$I_i = I_j = I, (\theta)$: Momento principale d'inerzia non giroscopico.

$I_k, (\theta_k)$: Momento principale d'inerzia giroscopico.

$$\sigma = 1 - \frac{I}{I_k} = 1 - \frac{\theta}{\theta_k}; \quad (-\infty < \sigma < 1).$$

m : Massa del sistema rigido.

$g, (\gamma)$: Accelerazione di gravità; ($\gamma > 0$).

$a, (a)$: Coefficiente d'attrito viscoso; ($a > 0$).

$\mathcal{N}\mathcal{I}, \mathcal{I}$: I due stati non invertito e invertito, con momento angolare verticale e versore k verticale rispettivamente ascendente o discendente.

3. – Derivazione delle equazioni.

Così come già fatto in [1] si vuole modellizzare il moto del *Tippe Top* scrivendo le equazioni del moto per una sfera non omogenea a simmetria giroscopica che ruoti su un piano con attrito, utilizzando come variabili il momento angolare e il vettore \mathbf{k} , in modo da ottenere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Ci occuperemo dopo del moto del baricentro.

Dobbiamo anzitutto esprimere ω tramite \mathbf{L} , e \mathbf{k} .

Da

$$\mathbf{L} = I\omega_i\mathbf{i} + I\omega_j\mathbf{j} + I_k\omega_k\mathbf{k} = I\omega - I\omega_k\mathbf{k} + I_k\omega_k\mathbf{k}$$

ricaviamo

$$\mathbf{L} = I\omega + \sigma L_k\mathbf{k} \quad (L_k = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k} = I_k\omega_k),$$

da cui segue immediatamente

$$(1) \quad \omega = \frac{1}{I}(\mathbf{L} - \sigma L_k\mathbf{k}).$$

Il versore dell'asse giroscopico è solidale, dunque

$$\dot{\mathbf{k}} = \omega \wedge \mathbf{k},$$

che utilizzando la (1) diventa

$$(2) \quad \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{I}\mathbf{L} \wedge \mathbf{k}.$$

3.1 – Attrito e invariante di Jelett.

Le forze esterne sono equivalenti a un sistema di due forze: la forza peso applicata nel baricentro e la reazione vincolare nel punto di contatto A . Rispettivamente $\mathbf{F}_p = -mg\hat{z}$ e $\Phi = \phi_x\hat{x} + \phi_y\hat{y} + \phi_z\hat{z}$, dove la parte orizzontale della reazione vincolare è interamente causata dall'attrito, forza che tra poco andremo a descrivere.

Bisogna notare subito che abbiamo approssimato l'area di contatto che si viene a creare nel fenomeno reale tra la sfera e il piano di rotazione ad un solo punto, trascurando in questa maniera la coppia d'attrito. Da questa ipotesi discende direttamente (e sorprendentemente) un integrale primo del moto che sopravvive alla presenza dell'attrito nel caso esso agisca su un sol punto.

Scegliendo come centro di riduzione il baricentro, il momento risultante delle forze esterne si riduce a

$$(3) \quad \mathbf{M}^{ext} = \mathbf{q} \wedge \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

La seconda equazione cardinale della dinamica, dunque, ci permette di scrivere

$$\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{q} = 0 = s\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{k} - \dot{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = s \frac{d}{dt}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{k}) - s\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{k}} - \frac{d}{dt}(\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}) = \frac{d}{dt}(sL_k - L_z) - s\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{k}}.$$

Dalla (2) discende subito $\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0$ il che ci porta all'integrale primo:

$$(4) \quad sL_k - L_z = \text{costante} = J,$$

conosciuto come *invariante di Jelett*.

Guardiamo ora il moto verticale del baricentro. La componente verticale della prima equazione cardinale della dinamica si scrive

$$m\ddot{z} = \phi_z - mg.$$

Inoltre notiamo che

$$z = -\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{z}} = R(1 - s\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}})$$

e quindi

$$(5) \quad \dot{z} = -\frac{Rs}{I}(\mathbf{L} \wedge \mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

$$(6) \quad \ddot{z} = -\frac{Rs}{I} \left[\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{I} \mathbf{L} \wedge (\mathbf{L} \wedge \mathbf{k}) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

dove, derivando \mathbf{k} , abbiamo usato la (2). Dunque, per la componente verticale della reazione vincolare, troviamo

$$(7) \quad \phi_z = m(\ddot{z} + g),$$

con \ddot{z} esprimibile tramite la (6).

Abbiamo così il vettore reazione vincolare

$$(8) \quad \Phi = -a\mathbf{v}_S + m(\ddot{z} + g)\hat{\mathbf{z}}$$

dove \mathbf{v}_S è la velocità di slittamento nel punto d'appoggio (orizzontale) mentre la scelta di a dipende dalla forma della forza d'attrito che si intende utilizzare:

$$\begin{cases} a = \text{costante} & \text{attrito viscoso} \\ a \propto \frac{\phi_z}{|\mathbf{v}_S|} & \text{attrito radente} \end{cases}$$

Noi opteremo per il caso di attrito proporzionale alla velocità del punto di appoggio perchè più adatto alla linearizzazione intorno agli stati di equilibrio \mathcal{I} ed \mathcal{NI} .

Considereremo, dunque, a costante.

3.2 – Velocità del punto di appoggio.

Accanto al punto di appoggio A , pensato come punto del piano che *non* è solidale con la trottola, conviene introdurre il punto P_A che occupa la posizione di A istante per istante ma è solidale con la trottola.

Ovviamente

$$(9) \quad \dot{A} = \dot{C}.$$

Il vettore $P_A - B \equiv \mathbf{q}'$ è un vettore istantaneamente solidale che viene costantemente aggiornato in modo che risulti $\mathbf{q}' = \mathbf{q} = R(\mathbf{sk} - \hat{\mathbf{z}})$ per ogni t . La velocità di slittamento \mathbf{v}_S è in ogni istante la velocità assoluta del punto P_A . Dunque

$$\dot{\mathbf{q}}' = \omega \wedge \mathbf{q}' = \omega \wedge R(\mathbf{sk} - \hat{\mathbf{z}})$$

da cui segue, usando la (1)

$$(10) \quad \dot{P}_A = \dot{B} + \frac{R}{I} [\mathbf{L} \wedge (\mathbf{sk} - \hat{\mathbf{z}}) + \sigma L_k (\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{z}})] \equiv \mathbf{v}_S.$$

Si può verificare che $\mathbf{v}_S \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$, come deve essere.

3.3 – Equazioni.

Possiamo infine completare il sistema delle equazioni cardinali aggiungendo quelle per il moto orizzontale del baricentro

$$(11) \quad m\ddot{x} = -a \mathbf{v}_S \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad m\ddot{y} = -a \mathbf{v}_S \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

$$(12) \quad \dot{\mathbf{L}} = -Ra(\mathbf{sk} - \hat{\mathbf{z}}) \wedge \mathbf{v}_S + mRs(g + \ddot{z})\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{z}}$$

$$(13) \quad \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{I} (\mathbf{L} \wedge \mathbf{k})$$

dove si è tenuto conto della (8) e bisogna ricordarsi che \mathbf{v}_S ha l'espressione (10). Le derivate \dot{z} (che compare in \mathbf{v}_S) e \ddot{z} sono ricavabili dalle (5) e (6).

3.4 – Adimensionalizzazione.

Momentaneamente chiamiamo \hat{t} tempo in secondi (utilizzato finora) e introduciamo una frequenza caratteristica w_0 . Mediante questa definiamo il tempo adimensionale $t = w_0 \hat{t}$. Definiamo inoltre le variabili adimensionali:

$$\lambda \equiv \frac{\mathbf{L}}{mR^2 w_0}, \quad \theta \equiv \frac{I}{mR^2}, \quad \xi \equiv \frac{x}{R}, \quad \eta \equiv \frac{y}{R}, \quad \zeta \equiv \frac{z}{R}, \quad \frac{d}{dt} = w_0 \frac{d}{d\hat{t}}$$

e, di conseguenza, anche $a \equiv \frac{a}{m\omega_0}$, $\gamma \equiv \frac{g}{R\omega_0^2}$, $v \equiv \frac{v_S}{R\omega_0}$.

Alla fine le equazioni risultano essere:

$$(14) \quad \ddot{\xi} = -a\bar{v}_x, \quad \ddot{\eta} = -a\bar{v}_y,$$

$$(15) \quad \dot{\lambda} = -a(s\mathbf{k} - \hat{\mathbf{z}}) \wedge v + s(\gamma + \ddot{\zeta})\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{z}},$$

$$(16) \quad \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{\theta}(\lambda \wedge \mathbf{k}),$$

con

$$(17) \quad v = \dot{\zeta}\hat{\mathbf{x}} + \dot{\eta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\zeta}\hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\theta}[\lambda \wedge (s\mathbf{k} - \hat{\mathbf{z}}) + \sigma\lambda_k \mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{z}}],$$

e con

$$(18) \quad \dot{\zeta} = -\frac{s}{\theta}(\lambda \wedge \mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{z}}.$$

L'espressione più conveniente per $\dot{\zeta}$ si ottiene eliminando preliminarmente $\dot{\mathbf{L}}$ fra la (12) e la (6). Riportiamo qui il risultato, già adimensionalizzato.

$$(19) \quad \dot{\zeta} = \frac{-s \left[\frac{1}{\theta} \lambda_k \lambda_z - \frac{1}{\theta} |\lambda|^2 k_z - a(1 - sk_z)v_k + s\gamma(1 - k_z^2) \right]}{\theta + s^2(1 - k_z^2)}.$$

Come si può facilmente verificare nelle (14)-(19) se

$$\mathbf{k} // \lambda // \hat{\mathbf{z}},$$

e se $\dot{\zeta} = \dot{\eta} = 0$ si ritrovano gli stati di equilibrio \mathcal{I} e $\mathcal{N}\mathcal{I}$.

4. – Approssimazione ad asse di rotazione fisso.

Seguendo il suggerimento di [2], per ricavare le condizioni di stabilità intorno agli stati \mathcal{I} ed $\mathcal{N}\mathcal{I}$, trascuriamo il moto orizzontale del baricentro. Numericamente otteniamo conferma per questa approssimazione sia studiando il comportamento energetico che quello dinamico (vedi fig. 2).

Analiticamente basta azzerare nelle nostre equazioni le derivate di ζ ed η per passare da cinque a tre gradi di libertà. Nel riscrivere le componenti orizzontali delle due equazioni vettoriali passeremo (seguito [2]) nel piano complesso.

Per cominciare riscriviamo la parte di momento della forza connessa con la velocità del punto di contatto sostituendo la (17) nella (15).

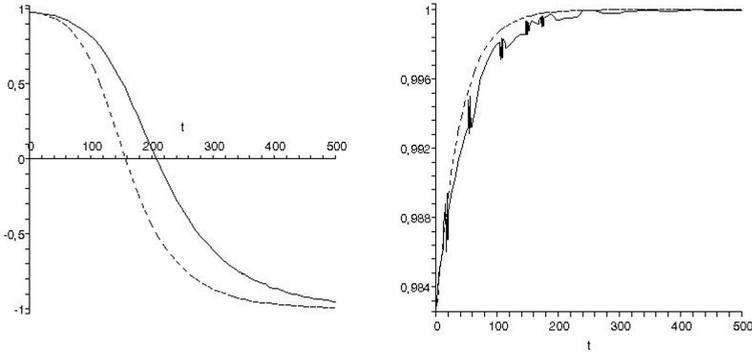


Fig. 2. - (ascisse: tempo; ordinate: k_z) Il modello con l'approssimazione ad asse fisso (linea tratteggiata) e quello senza (linea continua). Nel primo grafico è rappresentato un caso in cui la trottola si ribalta, nel secondo uno in cui non si ribalta.

$$(20) \quad \dot{\lambda} = -\frac{a}{\theta}(1 + s^2 - 2sk_z)\lambda - \frac{a}{\theta}(s\lambda_z - \sigma\lambda_k + s\sigma\lambda_k k_z - s^2\lambda_k)\mathbf{k} + \\ -\frac{a}{\theta}(s\lambda_k - \lambda_z + \sigma\lambda_k k_z - s\sigma\lambda_k)\hat{\mathbf{z}} + s(\gamma + \ddot{\zeta} - a\dot{\zeta})\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{z}}$$

Adesso, moltiplicando scalarmente le (15) e (16) per $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ e passando al piano complesso si ottiene:

$$(21) \quad \dot{A} = -\frac{a}{\theta}(1 + s^2 - 2sk_z)A - \frac{a}{\theta}(s\lambda_z - \sigma\lambda_k + s\sigma\lambda_k k_z - s^2\lambda_k)\mathbf{K} - is(\gamma + \ddot{\zeta} - a\dot{\zeta})\mathbf{K},$$

$$(22) \quad \dot{\mathbf{K}} = \frac{i}{\theta}(\lambda_z\mathbf{K} - k_z A)$$

dove $i = \sqrt{-1}$, $A \equiv \lambda_x + i\lambda_y$, $\mathbf{K} \equiv k_x + ik_y$ e, in $\ddot{\zeta}$, v_k non contiene più $\dot{\zeta}$ ed η .

Per quanto riguarda le parti verticali delle (15) e (16) si può riassuntivamente riscrivere

$$(23) \quad \lambda_z - s\lambda_k = cost = j,$$

$$(24) \quad \dot{k}_z = \frac{1}{2i\theta}(A^*\mathbf{K} - A\mathbf{K}^*)$$

dove $(\cdot)^*$ sta per complesso coniugato e la (23) equivale all'invariante di Jelett.

Andando a confrontare per diversi casi numerici i due modelli (trascurando e non trascurando $\dot{\zeta}$ e η), si vede che l'andamento asintotico (l'aspetto che ci interessa) nei due casi di ribaltamento o non ribaltamento è lo stesso, cosa che giustifica l'uso del sistema di equazioni (21)-(24), meno pesante.

5. – Linearizzazione.

Per studiare la stabilità lineare dei due stati di equilibrio usando il modello ad asse di rotazione fisso, dobbiamo linearizzare intorno agli stati \mathcal{I} ed $\mathcal{N}\mathcal{I}$. Troveremo equazioni lineari del secondo ordine nel piano complesso del tipo $\ddot{r} + iA\dot{r} + B\dot{r} + iCr + Dr = 0$ conosciute come equazioni di Maxwell-Block.

Dimostriamo brevemente il seguente risultato che, come [2] utilizza il criterio di Hurwitz [4], riducendo però il numero di condizioni non banali.

THEOREM 1. – *Perché le soluzioni d'equilibrio delle equazioni del tipo Maxwell-Block ($\ddot{r} + iA\dot{r} + B\dot{r} + iCr + Dr = 0$, dove i coefficienti sono reali ed $r(t)$ è complesso) siano stabili, devono essere verificate le seguenti condizioni:*

$$(25) \quad \begin{cases} B > 0, & CD \neq 0, \\ ABC - C^2 + B^2D > 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.

Alle equazioni di Maxwell-Block scritte nel piano complesso corrisponde un sistema di due equazioni di secondo ordine che generano un polinomio caratteristico di quarto grado:

$$u^4 + 2Bu^3 + (A^2 + B^2 + 2D)u^2 + 2(AC + BD)u + C^2 + D^2$$

In base al criterio di Hurwitz-Routh (vedi [3] e [4]), che permette di scrivere le condizioni per le quali le radici sono tutte con parte reale negativa, si trovano le condizioni di stabilità:

$$\begin{cases} B > 0, \\ ABC - C^2 + B^2D > 0, \\ A^2B + B^3 - AC + BD > 0, \\ C^2 + D^2 > 0. \end{cases}$$

L'ultima condizione è sempre verificata se $CD \neq 0$. La penultima è conseguenza delle prime due:

moltiplichiamo la terza condizione per il numero positivo B ed imponiamo $B^2D > C^2 - ABC$ (ossia la seconda), ottenendo

$$A^2B^2 + B^4 - ACB + B^2D > B^4 + (AB - C)^2 > 0. \quad \square$$

Quest'ultima circostanza semplifica notevolmente l'analisi di stabilità rispetto a quella di [2].

5.1 – *Equilibrio di $\mathcal{N}\mathcal{I}$.*

Nello stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$ è $k_z = 1$. Indichiamo con λ_1 il momento angolare adimensionalizzato nello stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$ e seguiamo la seguente strategia. Supponiamo di partire con le condizioni $k_z \simeq 1$, $\lambda_k \simeq \lambda_z \simeq \lambda_1 = \text{costante}$. Finché il sistema non si discosta da questa situazione otteniamo dalle (21) e (22) l'equazione linearizzata

$$(26) \quad \ddot{A} - i\frac{1}{\theta}\lambda_1\dot{A} + \frac{\alpha}{\theta}(1-s)^2\dot{A} - i\frac{\alpha}{\theta^2}\lambda_1(1-s)(1-\sigma)A + s\frac{\gamma}{\theta}A = 0.$$

Come dicevamo prima ci troviamo di fronte ad un'equazione del tipo Maxwell-Block, con

$$A = -\frac{\dot{\lambda}}{\theta}, \quad B = \frac{\alpha}{\theta}(1-s^2), \quad C = -\frac{\alpha}{\theta^2}(1-s)(1-\sigma), \quad D = s\frac{\gamma}{\theta}.$$

Usiamo il teorema 1. In questo caso ci basta imporre l'unica condizione non ovvia, ossia

$$(27) \quad \mathcal{U} \equiv \gamma\theta s(1-s)^2 + (1-\sigma)\lambda_1^2(\sigma-s) > 0,$$

condizione che non dipende dall'attrito; dunque **la stabilità dello stato non invertito non dipende dall'intensità della forza d'attrito** (purché non sia nulla: $a = 0 \Rightarrow B = 0$).

5.2 – *Equilibrio di \mathcal{I} .*

Mettiamo per ora da parte questa disuguaglianza ed esaminiamo il caso \mathcal{I} dove cioè $k_z = -1$ (indichiamo il momento angolare adimensionalizzato in \mathcal{I} con λ_{-1}). Ora procediamo con la stessa filosofia, ponendo $k_z \simeq -1$ e $\lambda_z \simeq -\lambda_k \simeq \lambda_{-1} = \text{costante}$. Imponendo l'invariante di Jelett nel passare da $\mathcal{N}\mathcal{I}$ ad \mathcal{I} , troviamo che esiste una semplice relazione tra λ_{-1} e λ_1 :

$$(28) \quad j = \lambda_1 - s\lambda_1 = \lambda_{-1} + s\lambda_{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{-1} = \frac{1-s}{1+s}\lambda_1.$$

Linearizziamo di nuovo le (21) e (22), ma intorno ad \mathcal{I} :

$$(29) \quad \ddot{A} - i\frac{(1-s)\lambda_1}{\theta(1+s)}\dot{A} + \frac{\alpha}{\theta}(1+s)^2\dot{A} - i\frac{\alpha}{\theta^2}\lambda_1(1-s)(1-\sigma)A - s\frac{\gamma}{\theta}A = 0.$$

Usando ancora il teorema 1, per la stabilità di \mathcal{I} dovrà essere soddisfatta la disuguaglianza

$$(30) \quad \mathcal{D} \equiv (1-s)^2(1-\sigma)\lambda_1^2(\sigma+s) - \gamma\theta s(1+s)^4 > 0$$

che, come la (27) ma in modo un po' sorprendente, nuovamente non dipende dall'attrito!

Ci troviamo dunque di fronte ad una situazione paradossale: abbiamo appena

scoperto che il tipo di stabilità del *Tippe Top* non dipende dalla forza d'attrito ma sappiamo che se quest'ultima viene a mancare la trottola non si potrà mai ribaltare. L'analisi numerica può rispondere al nostro dubbio: facendo tendere l'attrito a zero ($\alpha \rightarrow 0$) nel caso di ribaltamento le nostre simulazioni rivelano che il tempo di ribaltamento tende all'infinito. È possibile vedere numericamente che anche nel caso in cui il *Tippe Top* non strisci sul piano d'appoggio (attrito infinito e vincolo anolonomo) la trottola ugualmente non si ribalta.

Possiamo riassuntivamente dire che, come verificheremo tra poco, ***al tendere dell'attrito a zero o all'infinito il tempo di ribaltamento tende ad infinito.***

6. – Analisi delle condizioni d'equilibrio.

Le (27) e (30) possono essere riscritte ponendo $\frac{\lambda_1^2}{\gamma\theta} = \beta$:

$$\begin{cases} U = \beta(1 - \sigma)(\sigma - s) + s(1 - s)^2 > 0 \\ D = \beta(1 - \sigma)(\sigma + s)(1 - s)^2 - s(1 + s)^4 > 0 \end{cases}$$

Per avere un'idea del comportamento delle due disequazioni possiamo lasciar variare due parametri contemporaneamente. Si ottiene così una superficie che si deve mantenere sopra lo zero perché lo stato in questione sia stabile. Abbiamo scelto di far variare s e σ e di fissare il parametro β (vedi fig. 3).

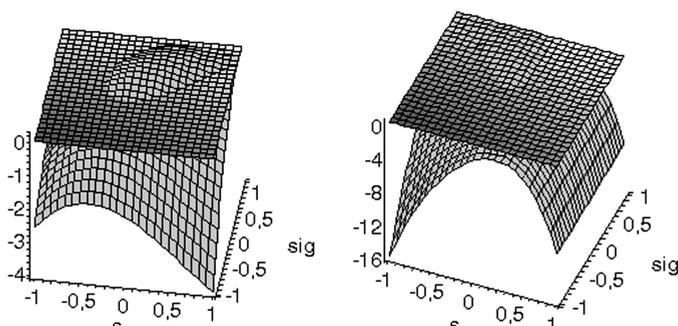


Fig. 3. – Rispettivamente la superficie $z=U$ e $z=D$, scegliendo $\beta = 1.5$.

Come vediamo si formano delle zone con proprietà differenti. Per poterle mettere a confronto nel seguito riporteremo insieme l'intersezione delle due superfici di figura 3 con il piano $z = 0$.

Otteniamo così due curve chiuse; scegliendo un punto (s, σ) interno ad una delle due curve i relativi stati saranno stabili ed in caso contrario saranno in-

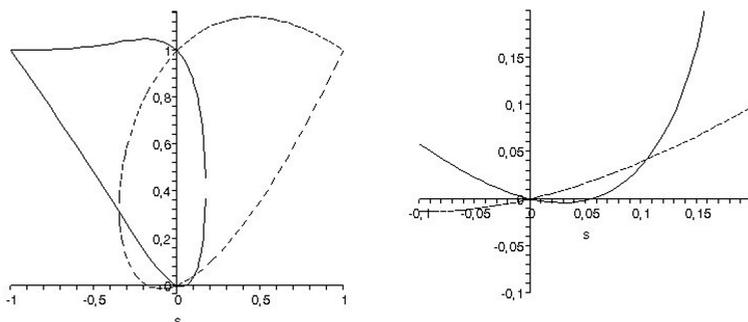


Fig. 4. - Linea tratteggiata: $\mathcal{U} = 0$; Linea continua: $\mathcal{D} = 0$; con la scelta $\beta = 1, 5$.

stabili. Riportiamo in figura 4 quanto appena descritto scegliendo il valore di β in un caso di ribaltamento.

I valori negativi di s (finora esclusi) corrispondono all'inversione di k e conviene prenderli in considerazione per descrivere il caso in cui inizialmente il baricentro ha una quota più alta del centro geometrico. Per tale motivo i valori $s < 0$ sono riportati nelle figure 3 e 4.

Perché la trottola si ribalti lo stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$ deve essere instabile mentre lo stato \mathcal{I} dovrà essere stabile. Nella seconda delle figure 4 si vede ingrandita la zona di valori (s, σ) interessante. Notiamo che, col valore numerico scelto, la zona di ribaltamento è abbastanza ristretta.

In figura 5 si vede come aumentando il valore di β la zona di ribaltamento si espande mentre diminuendolo la zona si restringe fino a scomparire completamente. Il valore limite può essere trovato notando che entrambe le curve passano sempre per il punto $(s = 0, \sigma = 0)$. Condizione sufficiente perché la zona di ribaltamento esista è che la pendenza in $s = 0$ della curva ricavata da \mathcal{U} sia maggiore della pendenza di quella ricavata da \mathcal{D} . Dalle (27) e (30) si scopre che le

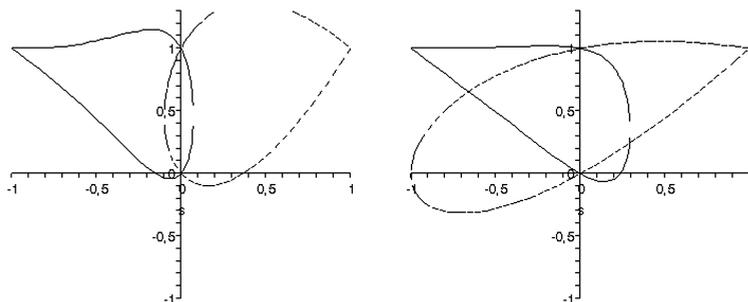


Fig. 5. - Rispettivamente $\beta = 0,4$ e $\beta = 4$

due derivate sono opposte, il loro valore in modulo è:

$$(31) \quad 1 - \frac{1}{\beta}.$$

Perciò la condizione cercata è:

$$(32) \quad \beta > 1 \Leftrightarrow \lambda_1^2 > \gamma\theta$$

che in pratica è un limite inferiore sulla velocità angolare iniziale.

Tornando infatti alle variabili dimensionali essa significa

$$(33) \quad \omega_1^2 > \frac{mgRI}{I_k^2}.$$

Dunque la zona di ribaltamento si espande all'aumentare della velocità angolare iniziale (fissata la geometria del sistema), e con valori di s e σ vicini allo zero la velocità angolare minima che permette il ribaltamento tende alla (33).

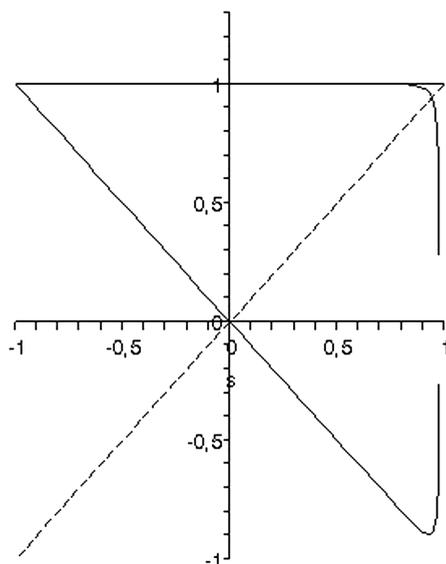
Quest'ultima può essere riscritta convenientemente

$$(34) \quad \omega_1^2 > \frac{\theta}{\theta_k^2} \omega_0^2$$

dove $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, frequenza caratteristica del sistema (potrebbe essere utilizzata ponendo $w_0 = \omega_0$ e quindi $\gamma = 1$). Dunque la zona di ribaltamento si espande



Fig. 6. – I *Tippe Top* costruiti in scala consentono di verificare qualitativamente come opera la condizione (34).

Fig. 7. - $\beta \gg 1$.

anche all'aumentare del raggio della sfera, se la distribuzione di massa rimane la stessa: il ribaltamento è favorito per *Tippe Top* più grandi. L'autore ha verificato sperimentalmente questa circostanza, costruendo una successione di *Tippe Top* sferici in scala (vedi fig. 6).

Proviamo adesso a far tendere β all'infinito: così facendo la (31) tende ad 1 e la zona di ribaltamento graficamente diventa un triangolo (vedi fig. 7), si vengono a formare tre zone distinguibili con semplici condizioni matematiche (consideriamo il caso $s > 0$):

$$\begin{cases} \sigma > s & \text{doppia stabilità} \\ s > |\sigma| & \text{ribaltamento} \\ s < -\sigma & \text{moto complesso dell'asse senza ribaltamento} \end{cases}$$

Dunque se ad esempio costruiamo un *Tippe Top* con $s < -\sigma$ potremmo impartire al sistema una velocità angolare comunque grande, ma la trottola non si ribalterà mai: continuerà a muoversi in maniera complessa (*tumbling*) finché la coppia d'attrito non abbia esaurito completamente l'energia rotazionale iniziale.

Questi risultati coincidono con quelli ottenuti per altra via in [5] e qui dedotti semplificando il metodo seguito da [2]. È dunque possibile ottenere le condizioni di stabilità per gli stati \mathcal{I} ed \mathcal{NI} con un semplice studio lineare.

7. – Equazioni del moto approssimate.

Usando la teoria perturbativa al primo ordine è possibile dare una prima scrittura delle equazioni del moto nel caso di rotazione sostanzialmente verticale ed $s, \sigma \ll 1$.

Cominciamo col porre zero questi due parametri nelle (21)-(24) ottenendo all'ordine zero

$$(35) \quad \begin{cases} \lambda_z^0 = j = \lambda_{z0} \\ \dot{A}^0 = -\frac{a}{\theta} A^0 \\ \dot{\mathbf{K}}^0 = \frac{i}{\theta} (\lambda_z^0 \mathbf{K}^0 - k_z^0 A^0) \\ \dot{k}_z^0 = \frac{1}{2i\theta} (A^{0*} \mathbf{K}^0 - A^0 \mathbf{K}^{0*}) \end{cases}$$

che rappresenta il sistema nel caso di sfera omogenea in rotazione su un piano con attrito nel caso di approssimazione ad asse di rotazione fisso.

Nella sua risoluzione andiamo ad imporre, per coerenza, che il momento angolare iniziale sia completamente verticale ottenendo come soluzione

$$(36) \quad \begin{cases} \lambda_z^0 = \lambda_{z0} \\ A^0 = 0 \quad \text{ponendo } A \text{ iniziale zero} \\ \mathbf{K}^0 = K_0 e^{i\frac{\lambda_{z0}}{\theta} t} \\ k_z^0 = k_{z0} \end{cases}$$

Questa soluzione ci dice semplicemente che la sfera ruota intorno alla verticale e che \mathbf{k} , la cui scelta a questo livello è completamente arbitraria, continua anch'esso a ruotarci intorno.

Passiamo adesso al primo ordine in s e σ , ricordando che sia $\ddot{\zeta}$, sia $\dot{\zeta}$ sono $\mathcal{O}(s)$

$$(37) \quad \begin{cases} \lambda_z^1 = 0 \\ \dot{A}^1 = -\frac{a}{\theta} A^1 - \frac{a}{\theta} \lambda_{z0} (s - \sigma k_{z0}) K_0 e^{i\frac{\lambda_{z0}}{\theta} t} - i s \gamma K_0 e^{i\frac{\lambda_{z0}}{\theta} t} \\ \dot{\mathbf{K}}^1 = \frac{i}{\theta} (\lambda_{z0} \mathbf{K}^1 - k_{z0} A^1) \\ \dot{k}_z^1 = \frac{1}{\theta} \Im(A^{1*} \mathbf{K}^0) \end{cases}$$

(dove $\Im(\cdot)$ sta per parte immaginaria) ottenendo come soluzione

$$(38) \quad \begin{cases} A^1 = a(e^{\frac{\lambda_{z0}t}{\theta}} - e^{-\frac{a}{\theta}t}) \\ K^1 = ik_{z0}a \left[\left(\frac{1}{a + i\lambda_{z0}} - \frac{t}{\theta} \right) e^{\frac{\lambda_{z0}t}{\theta}} - \frac{1}{a + i\lambda_{z0}} e^{-\frac{a}{\theta}t} \right] \end{cases}$$

dove $a = K_0 \frac{a\lambda_{z0}(\sigma k_{z0} - s) - is\gamma\theta}{a + i\lambda_{z0}}$. Infine per la proiezione dell'asse giroscopico lungo la verticale si giunge a

$$(39) \quad k_z(t) = \mu t + q + \left[b \sin\left(\frac{\lambda_{z0}}{\theta} t\right) + c \cos\left(\frac{\lambda_{z0}}{\theta} t\right) \right] e^{-\frac{a}{\theta}t}$$

con

$$(40) \quad \mu = \frac{a}{a^2 + \lambda_{z0}^2} \frac{1 - k_{z0}^2}{\theta} [s\gamma\theta + \lambda_{z0}^2(\sigma k_{z0} - s)]$$

e con

$$(41) \quad \begin{cases} q = k_{z0} + \frac{1 - k_{z0}^2}{(a^2 + \lambda_{z0}^2)^2} \{ [2(s - \sigma k_{z0})\lambda_{z0}^2 - s\gamma\theta] a^2 + \lambda_{z0}^2 s\gamma\theta \} \\ b = -\frac{1 - k_{z0}^2}{(a^2 + \lambda_{z0}^2)^2} [(s - \sigma k_{z0})a^2 + (\sigma k_{z0} - s)\lambda_{z0}^2 + 2s\gamma\theta] a\lambda_{z0} \\ c = -\frac{1 - k_{z0}^2}{(a^2 + \lambda_{z0}^2)^2} \{ [2(s - \sigma k_{z0})\lambda_{z0}^2 - s\gamma\theta] a^2 + \lambda_{z0}^2 s\gamma\theta \} \end{cases}$$

Come si vede in figura 8 la variazione di $k_z(t)$ al primo ordine in s e σ , momento angolare iniziale verticale e velocità iniziale del baricentro piccola, nei primi

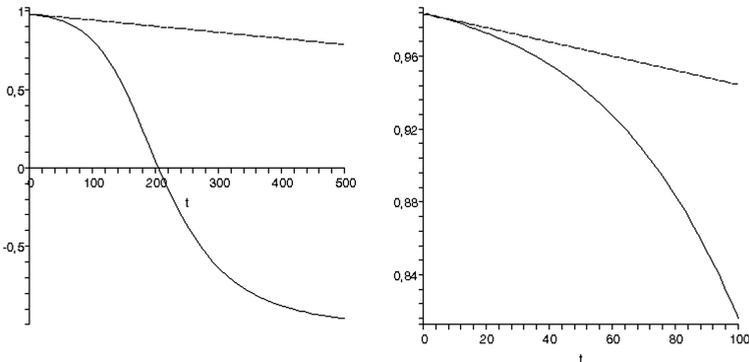


Fig. 8. – Evoluzione di $k_z(t)$ al primo ordine (linea tratteggiata) messa a confronto con il modello ad asse di rotazione fisso.

istanti è approssimabile ad una retta, poi il moto reale si discosta da questa approssimazione. Con le ipotesi date, la (39) afferma che perché $\mathcal{N}\mathcal{T}$ sia instabile deve essere $\mu < 0$.

Dunque con $a \neq 0$ e $k_{z0} \neq 1$ dovrà essere

$$(42) \quad s + \beta(\sigma k_{z0} - s) < 0.$$

Se $k_{z0} \sim 1$ questa disequazione è in accordo con la (27). Usando la (42) è possibile studiare il moto nei primi istanti anche se $k_{z0} \neq 1$.

A conferma dei risultati precedenti si nota che effettivamente per a che tende a zero o ad infinito μ tende sempre a zero e quindi il tempo di ribaltamento tende all'infinito.

8. – Generalizzazione al caso non sferico.

Nel modello creato si può passare facilmente al caso non sferico, a patto di conservare l'ipotesi giroscopica del sistema, modificando la forma del vettore \mathbf{q} . Grazie alla simmetria giroscopica intorno all'asse \mathbf{k} esso avrà in generale questo tipo di forma:

$$(43) \quad \mathbf{q} = c(k_z)\mathbf{k} - b(k_z)\hat{\mathbf{z}}.$$

Visto che l'ipotesi giroscopica non è caduta la (2) resta valida ma l'invariante di Jelett, come tra poco vedremo, non si conserva più.

Anche con il nuovo vettore \mathbf{q} nella (10) deve continuare a valere $\mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$. Questo genera una condizione che deve essere rispettata da $c(k_z)$ e da $b(k_z)$:

$$(44) \quad \dot{c}(k_z(t))k_z(t) = \dot{b}(k_z(t)).$$

Passiamo adesso a $J \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{q}$. Visto che le forze esterne agiscono soltanto sul baricentro e sul punto d'appoggio la seconda equazione cardinale della dinamica ci fornisce l'equazione $\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{q} = 0$; per poter ottenere $\dot{J} = 0$ dobbiamo verificare, come abbiamo fatto nel caso sferico, che sia $\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$.

Usando la (2) con la (43) si ottiene

$$(45) \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \dot{c}L_k - \dot{b}L_z.$$

Se $\dot{c} = \dot{b} = 0$ si torna al caso sferico e J si conserva. Altrimenti per avere un'integrale primo deve essere $\dot{c}L_k = \dot{b}L_z$ che con l'uso della (44) diventa

$$(46) \quad L_x k_x + L_y k_y = 0.$$

Nel moto del *Tippe Top* non sferico questa condizione non è soddisfatta anche se il prodotto scalare delle parti orizzontali di \mathbf{L} e \mathbf{k} si mantiene piccolo rispetto a $|\mathbf{L}|$. J non si conserva anche se varia poco.

Dunque è necessario riscrivere tutto il modello con il nuovo vettore \mathbf{q} senza usare l'invariante di Jelett. Si può, allora, fare l'approssimazione ad asse di rotazione fisso e linearizzare le equazioni come nel caso sferico con l'unica differenza che non è possibile conoscere esattamente λ_{-1} a partire da λ_1 . È comunque possibile scrivere la condizione d'equilibrio stabile per lo stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$:

$$(47) \quad \mathcal{U}_g = \beta^u b^u (1 - \sigma)(b^u \sigma - c^u) + c^u (b^u - c^u)^2 > 0,$$

insieme con quella per lo stato \mathcal{I}

$$(48) \quad \mathcal{D}_g = \beta^d b^d (1 - \sigma)(b^d \sigma + c^d) - c^d (b^d + c^d)^2 > 0,$$

dove $b^u = b(k_z = 1)$, $c^u = c(k_z = 1)$, $b^d = b(k_z = -1)$, $c^d = c(k_z = -1)$, $\beta^u = \frac{\lambda_1^2}{\gamma\theta}$ e $\beta^d = \frac{\lambda_{-1}^2}{\gamma\theta}$.

La (48) non ha la stessa utilità della (30) perché senza l'invarianza di J non siamo in grado di conoscere λ_{-1} a partire da λ_1 . Inoltre non abbiamo più la verifica numerica dell'esistenza di una connessione eteroclinica tra i due stati $\mathcal{N}\mathcal{I}$ e \mathcal{I} come nel caso sferico. In altre parole si può soltanto affermare che, in generale, per avere possibilità di ribaltamento si devono scegliere valori di s e σ all'esterno della curva $\mathcal{U}_g = 0$ (ma il ribaltamento non è garantito).

8.1 – Caso ellittico.

Nel caso di una trottola ellissoidale si trova:

$$(49) \quad \begin{cases} c(k_z) = s + \frac{(1 - e^2)k_z}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)k_z^2}} \\ b(k_z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)k_z^2}} \end{cases}$$

dove e è l'eccentricità, s è la distanza tra l'intersezione degli assi dell'ellisse ed il baricentro divisa per la lunghezza del semiasse non giroscopico (vedi fig. 9) ed è possibile verificare la (44).

Dalla (47) la stabilità dello stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$ dipende dal segno di

$$(50) \quad \mathcal{U}_e = \beta \frac{1}{e} (1 - \sigma) \left(\frac{\sigma}{e} - s + \frac{e^2 - 1}{e} \right) + \left(s + \frac{1 - e^2}{e} \right) (e - s)^2,$$

così come nel caso sferico dipendeva dal segno di \mathcal{U} .

La (49) non differisce molto dalla (27):

in \mathcal{U} la stabilità di $\mathcal{N}\mathcal{I}$ con velocità iniziale nulla richiedeva $s > 0$, qui il caso ellittico richiede $s > \frac{e^2 - 1}{e}$;

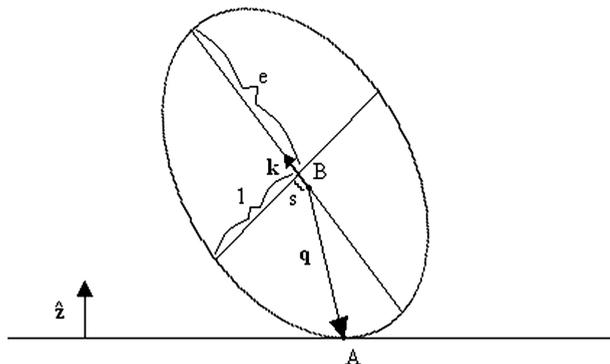


Fig. 9. – Rappresentazione del supporto ellittico.

la condizione (32) diventa

$$(51) \quad \beta > \frac{1}{e};$$

mentre $\mathcal{U} = 0$ passava per ogni β per punti $(s = 0, \sigma = 0)$ e $(s = 1, \sigma = 1)$, adesso $\mathcal{U}_e = 0$ passa per ogni β per i punti $(s = \frac{e^2 - 1}{e}, \sigma = 0)$ e $(s = e, \sigma = 1)$ che diventano i nodi della curva chiusa $\mathcal{U}_e = 0$ al variare di β tra zero ed infinito nel piano s, σ (vedi fig. 10).

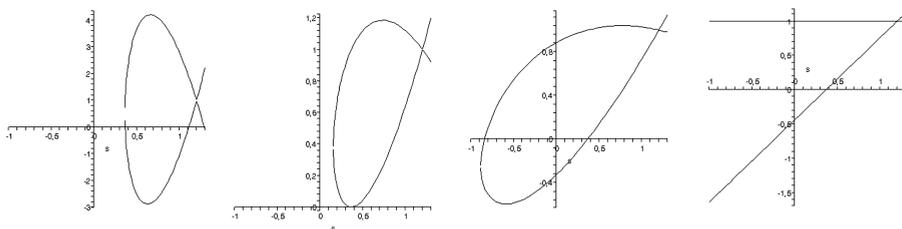


Fig. 10. – La curva $\mathcal{U}_e = 0$ con $e = 1.2$ e β rispettivamente 0.01, $1/e$, 5, 1000.

9. – Trottola classica.

Solitamente, per descrivere le trottolo classiche, si utilizza come modello un cono a contatto con il tavolo tramite la sua punta. Per poter utilizzare la (47) e la (48) e così conoscere la stabilità dei suoi due stati invertito e non invertito dob-

biamo saper scrivere \mathbf{q} :

$$(52) \quad \mathbf{q} = -R\mathbf{k},$$

dove adesso R è la distanza tra il baricentro ed il punto d'appoggio, adimensionalizzando si ottiene $c = -1$ e $b = 0$ per ogni k_z .

In questo caso, dunque, J si conserva e si può sostituire nella (48) $\beta^d = \left(\frac{b^u - c^u}{b^d + c^d}\right)^2 \beta^u$.

Con questi valori la (47) risulta non essere mai soddisfatta mentre la (48) lo è sempre. Dunque il modello in cui la trottola classica poggia su una punta produce un tipo di moto che lentamente, in presenza d'attrito, conduce al ribaltamento del cono.

Supponiamo adesso di "arrotondare" la punta del cono. Questo oggetto rientra nel modello per il *Tippe Top* che abbiamo costruito se analizziamo il suo comportamento con $s < -1$. Si può notare, guardando la figura 7, che, in questo modo, esiste sempre una velocità iniziale che rende lo stato $\mathcal{N}\mathcal{I}$ stabile.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A.C. OR, *The dynamics of a Tippe Top*, *SIAM J. Appl. Math.*, **54** (1994), 597-609.
- [2] J.E. MARSDEN - N.M. BOU-RABEE - L.A. ROMERO: *Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability*, *SIAM J. Appl. Dynamical Systems*, Vol. **3**, No. **3**, 352-377.
- [3] A. HURWITZ, *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt*, *Math. Ann.*, **46** (1895), 273-284.
- [4] F.R. GANTMACHER, *The theory of matrices*, Chelsea, reprint, 1977 (translated from the Russian).
- [5] S. EBENFELD - F. SCHECK, *A new analysis of the tippe top: Asymptotic states and Liapunov stability*, *Ann. Phys.*, **243** (1995), 195-217.
- [6] C.M. BRAAMS, *On the influence of friction on the motion of a top*, *Phys.*, **18** (1952), 503.
- [7] J.H. JELETT, *Teatrise of the theory of friction*, Dublin, 1872.
- [8] LEUTWYLER, *Why some top tip*, *Eur. J. Phys.*, **15** (1994), 59.

Dipartimento di Fisica,
via G.Sansone 1, 50019 Sesto F. Firenze
e-mail: cerminara@studenti.fisica.unifi.it

