Bollettino Unione Matematica Italiana

Patrick Le Barz

Sur Une Formule de Castelnuovo Pour Les Espaces Multisécants

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-B** (2007), n.2, p. 381–387.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_2_381_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
(8) **10**-B (2007), 381-387

Sur Une Formule de Castelnuovo Pour Les Espaces Multisécants.

PATRICK LE BARZ

Sunto. – *Nello spazio proiettivo* $\mathbf{P}^{2k-2}$, *consideriamo il numero* υ_k *dei sottospazi* $(k-2)$*-dimensionali, k-secanti una curva C, di grado n e genere g. Nel 1889, una formula per* υ_k *è stata data da Castelnuovo* [2]*; in* [1] *si trova una dimostrazione moderna.*
In questo lavoro, mi propongo di costruire la funzione generatrice della serie $\sum_{k\geq 0} \upsilon_k t^k \in \mathbf{Z}[[t]]$*, senza usare i risultati di Castelnuovo.*

Summary. – *Let* υ_k *be the number of* $(k-2)$*-dimensional subspaces of* $\mathbf{P}^{2k-2}$ *which are k-secant to a curve C (of degree n and genus g). Castelnuovo (1889) gave a formula for* υ_k *(see* [2]*); one has a modern proof in the monograph* [1].
Here we give explicitly the generating function of the series $\sum_{k\geq 0} \upsilon_k t^k \in \mathbf{Z}[[t]]$*, without using Castelnuovo's results.*

1. – Introduction.

On notera $[d]$ un sous-espace de dimension d d'un espace projectif quelconque $\mathbf{P}^N$. Soit $k \in \mathbf{N}$ et considérons une courbe lisse C de degré n et genre g dans $\mathbf{P}^{2k-2}$. On désigne par υ_k le nombre de sous-espaces $[k-2]$ k-sécants à C. Un décompte des dimensions montre qu'on les attend en nombre *fini*. Il s'agit alors:

i) de donner une formule pour le nombre υ_k;
ii) de trouver la fonction génératrice $\sum_{k\geq 0} \upsilon_k t^k$ dans $\mathbf{Z}[[t]]$.

Castelnuovo ([2]) a répondu à la question i). Une démonstration moderne se trouve dans [1], p. 351.

De notre côté, nous nous proposons de répondre à la question ii) (sans utiliser les résultats de Castelnuovo) par le théorème suivant.

THÉORÈME. – *On note* υ_k *le nombre de* $[k-2]$ *k-sécants à une courbe lisse de degré n et genre g dans* $\mathbf{P}^{2k-2}$*. Alors la fonction génératrice de la série*

$\sum\limits_{k\geq 0} \upsilon_k t^k$ *de* $\mathbf{Z}[[t]]$ *est la fonction:*

$$S(t)=\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^n\left(\frac{-1-4t+(1+2t)\sqrt{1+4t}}{2t^2}\right)^{g-1}.$$

REMARQUES. – i) On notera les développements en série:

$$\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}=1+t-t^2+2t^3-5t^4+14t^5+...$$

et

$$\frac{-1-4t+(1+2t)\sqrt{1+4t}}{2t^2}=1-t^2+4t^3-14t^4+48t^5+...$$

ii) Par convention, on pose $\upsilon_0=1,\upsilon_1=n$; quant à υ_2, c'est le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-g$ de points-doubles d'une projection plane.

Le nombre υ_k de $[k-2]$ k-sécants est défini dans cet article comme le degré d'un 0-cycle dans la grassmannienne $G(k-2,\mathbf{P}^{2k-2})$, ce qui permet de le définir pour *toute* courbe de $\mathbf{P}^{2k-2}$. D'ailleurs dans certains cas dégénérés, le nombre υ_k peut-être négatif. C'est par exemple le cas si la courbe est une droite ou une conique; c'est assez prévisible, vu qu'une droite et une conique sont des courbes très dégénérées du point de vue des espaces multisécants, puisqu'elles en admettent une infinité.

Pour démontrer le théorème, on part de la Note [6] où l'on a une expression du nombre de $[d]$ k-sécants, dans une grassmannienne quelconque $G(d,\mathbf{P}^N)$. Cette expression, à partir des cycles de Schubert spéciaux, se simplifie ici nettement à cause du "lemme utile" du paragraphe 1); on peut remplacer tous les cycles de Schubert spéciaux σ_i par des 1 dans les calculs! On examine d'abord en 2) le cas d'une droite, puis en 3) le cas d'une conique. Enfin, on obtient le cas général au paragraphe 4).

Dans la suite, on peut essayer de généraliser ce qui précède aux surfaces. Dans [3], p. 73, Donaldson pose la question suivante: soit $S\subset\mathbf{P}^{3k-2}$ une surface lisse et soit N_k le nombre de $[k-2]$ k-sécants à S (qu'on attend en nombre fini). Il s'agit de donner N_k en fonction des invariants de la surface (H^2,HK,K^2,χ). Les nombres N_3,N_4,N_5 sont connus: voir [7],[10],[8]. Dans [8], Lehn conjecture même une formule pour la série génératrice $\sum\limits_{k\geq 0} N_k t^k$. Cependant (à la connaissance de l'auteur), sa détermination est encore une question ouverte.

1) Un Lemme utile.

LEMME 1. – *Soit la grassmannienne* $G=G(d,\mathbf{P}^N)$ *des sous-espaces* $[d]$ *dans* $\mathbf{P}^N$ *et soit* $c=N-d$ *leur codimension. Donnons-nous au plus* $d+2$ *cycles de*

Schubert spéciaux $\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_{d+2}}$ *avec* $|i| = i_1 + ... + i_{d+2} = dim(G) = (d+1)c$ et $0 \leq i_a \leq c$. *Alors on a le degré du 0-cycle:*

$$deg(\sigma_{i_1}...\sigma_{i_{d+2}}) = 1.$$

Preuve. – On peut faire une récurrence sur c. Mais une démonstration plus agréable et plus visuelle se fait en suivant [4], (9.4), particulièrement la formule de Pieri, p. 146. Il s'agit de voir de combien de manières on peut carreler un tableau rectangulaire à $d+1$ lignes et c colonnes. Or il n'y a que $d+2$ cycles σ_a à pouvoir utiliser pour cela, c'est-à-dire $d+2$ types de carreaux différents au maximum. Mais la règle impose *de ne pas mettre deux carreaux identiques dans une même colonne*. L'unique solution consiste donc à remplir le tableau ligne à ligne, les carreaux les uns à la suite des autres.

A titre d'exemple, pour $d = 2$ et $c = 7$, on a représenté ci-après l'unique remplissage du tableau concernant le cycle $\sigma_6\sigma_5^3$, ce qui prouve que ce cycle est de degré 1 dans $CH^{21}(G(2, \mathbf{P}^9))$. Les $\spadesuit$ sont pour σ_6 et les $\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit$, pour les trois σ_5 (dans cet ordre).

$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$

On notera que pour $d+3$ cycles, le résultat du lemme est faux. Ainsi dans la grassmannienne $G(1, \mathbf{P}^3)$, on a $deg(\sigma_1^4) = 2$.

2) Cas d'une droite.

Dans toute la suite, on regarde la grassmannienne $G = G(k-2, \mathbf{P}^{2k-2})$; les sous-espaces sont donc de codimension $c = k$ et l'on a $dim(G) = k(k-1)$. On note $CH^\bullet(G)$ l'anneau d'équivalence rationnelle de G. On notera $q^m(p)$ le coefficient de u^p dans l'expression $(1 + \sigma_1 u + ... + \sigma_k u^k)^m$ dans l'anneau des polynômes $CH^\bullet(G)[u]$, où les σ_i désignent les cycles de Schubert spéciaux; on a $q^m(p) \in CH^p(G)$.

On regarde d'abord le cas où la courbe C de $\mathbf{P}^{2k-2}$ est une droite et l'on considère υ_k (défini comme dans [6]), le nombre de $[k-2]$ k-sécants à cette droite. D'après [6], pour $k \geq 3$, on a $\upsilon_k = deg(a_k)$, avec $(-1)^k a_k = \sigma_k^2 q^{k-2}(k^2 - 3k)$.

Dans l'expression $\sigma_k^2(1 + \sigma_1 u + ... + \sigma_k u^k)^{k-2}$, le coefficient de $u^{k(k-3)}$, qui est un 0-cycle sur G, s'exprime à l'aide d'au plus k cycles spéciaux σ_i. D'après le "lemme utile" (avec ici $d = k-2$), le nombre $(-1)^k deg(a_k)$ est égal au coefficient de $u^{k(k-3)}$ dans le polynôme $(1 + u + ... + u^k)$ de $\mathbf{Z}[u]$. On va donc calculer ce coefficient. Il est donné par la remarque suivante.

REMARQUES. – Dans l'expression $(1+u+\ldots+u^k)^m \in \mathbf{Z}[u]$,

a) les coefficients de u^j et u^{mk-j} sont égaux,
b) et pour $0 \leq j \leq k$, ils valent $\binom{m+j-1}{j}$.

En effet, a) résulte de $(1+u+\ldots+u^k)^m = u^{mk}(1+\frac{1}{u}+\ldots+\frac{1}{u^k})^m$ et on prouve b) par récurrence sur m.

Alors dans l'expression $(1+u+\ldots+u^k)^{k-2}$ qui nous occupe, on trouve que le coefficient de $u^{k(k-3)}$ est le même que celui de u^k, à savoir $\binom{2k-3}{k} = \binom{2k-3}{k-3}$.

CONCLUSION. – Pour une *droite*, pour $k \geq 3$, on a $\upsilon_k = (-1)^k \binom{2k-3}{k-3}$. Par ailleurs, on a $\upsilon_0 = 1, \upsilon_1 = 1, \upsilon_2 = 0$. Donc la série $U(t) = \sum_{k\geq 0} \upsilon_k t^k$ est égale à:

$$U(t) = 1 + t + \sum_{k\geq 3} (-1)^k \binom{2k-3}{k-3} t^k.$$

On trouve alors la fonction:

$$U(t) = \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{1+3t}{\sqrt{1+4t}}\right). \tag{1}$$

3) Cas d'une conique.

Comme précédemment, calculons υ_k (pour $k \geq 4$) lorsque la courbe est une conique de $\mathbf{P}^{2k-2}$. Toujours d'après [6], on a $\upsilon_k = deg(a_k)$, où $(-1)^k a_k = \sigma_3^k q^{k-3}(k(k-4))$. Toujours grâce au "lemme utile", $(-1)^k \upsilon_k$ est le coefficient de $u^{k(k-4)}$ dans $(1+u+\ldots+u^k)^{k-3} \in \mathbf{Z}[u]$. D'après la remarque précédente, ce coefficient est le même que le coefficient de u^k, à savoir $\binom{2k-4}{k}$ soit $\binom{2k-4}{k-4}$. Donc pour une *conique*, on a $\upsilon_k = (-1)^k \binom{2k-4}{k-4}$. Par ailleurs, on a $\upsilon_0 = 1, \upsilon_1 = 2, \upsilon_2 = 0$; enfin $\upsilon_3 = 0$ (voir [6]). Donc la série $V(t) = \sum_{k\geq 0} \upsilon_k t^k$ est égale à:

$$V(t) = 1 + 2t + \sum_{k\geq 4} (-1)^k \binom{2k-4}{k-4} t^k.$$

On trouve alors la fonction:

$$V(t) = \frac{1}{2}\left(1 + 2t + \frac{2t^2+4t+1}{\sqrt{1+4t}}\right). \tag{2}$$

4) Le cas général.

Pour C courbe lisse dans $\mathbf{P}^N$, *non nécessairement connexe*, on considère son rang [9], ou plutôt la moitié de son rang (son "*mirang*") qu'on notera f. Si C est connexe de degré n et genre g, on a $f = g + n - 1$. L'invariant f vérifie pour une réunion disjointe de deux courbes lisses: $f(C \sqcup C') = f(C) + f(C')$. D'autre part, f reste le même quand on projette génériquement C en $\hat{C}$ dans un sous-espace de $\mathbf{P}^N$: on a $f(C) = f(\hat{C})$.

Soit alors $C \subset \mathbf{P}^{2k-2}$ une courbe lisse de degré n et "mirang" f. D'après [11], on sait que $\upsilon_k(C)$ est un polynôme $\upsilon_k(n,f)$ en n et f. On va montrer le lemme suivant:

LEMME 2. – *On a*: $\upsilon_k(n+n', f+f') = \sum_{i+j=k} \upsilon_i(n,f).\upsilon_j(n',f')$.

PREUVE. – Les deux membres de l'égalité étant des polynômes en n, f, n', f', il suffit de vérifier l'égalité

$$\upsilon_k(C \sqcup C') = \sum_{i+j=k} \upsilon_i(C)\upsilon_j(C')$$

pour un nombre fini de courbes C et C' disjointes de $\mathbf{P}^{2k-2}$. Ce sera toujours possible si on suppose C et C' génériques. Les $[k-2]$ qui sont k-sécants à $C \sqcup C'$ sont i-sécants à C et j-sécants à C' avec $i + j = k$. Cherchons donc le nombre de V i-sécants à C et j-sécants à C'. Le cas $i = 0$ ou $j = 0$ est évident. Le cas $i = 1$ ou $j = 1$ sera traité plus bas.

Supposons donc $i \geq 2$ et $j \geq 2$. Projetons C sur un sous-espace $\mathbf{P}^{2i-1}$ par un $[2(j-1)]$ en une courbe C_1; et de même projetons C' sur un $\mathbf{P}^{2j-1}$ en une courbe C'_1 par un $[2(i-1)]$. Par ([5], exemple 9.8.3), le nombre de sous-espaces $[k-2]$ k-sécants qui sont i-sécants à C et j-sécants à C' est le même que les sous-espaces i-sécants à C_1 et j-sécants à C'_1. (Car le schéma $Hilb^iC \times Hilb^jC'$ se déforme platement en $Hilb^iC_1 \times Hilb^jC'_1$). Alors si $V \subset \mathbf{P}^{2k-2}$ est un $[k-2]$ i-sécant à C_1 et j-sécant à C'_1, les i points de $C_1 \cap V$ engendrent un $[i-1]$ noté $W \subset V$ dans $\mathbf{P}^{2i-1}$; les j points de $C'_1 \cap V$ engendrent un $[j-1]$ noté $W' \subset V$ dans $\mathbf{P}^{2j-1}$. Notons 0 le point d'intersection de $\mathbf{P}^{2i-1}$ et $\mathbf{P}^{2j-1}$ dans $\mathbf{P}^{2k-2}$ (on a $2k-2 = 2i-1+2j-1$). Comme V est isomorphe à $\mathbf{P}^{k-2}$, les sous-espaces W et W' se coupent en un point de V. Ce point ne peut-être que 0 puisque $W \cap W' \subset \mathbf{P}^{2i-1} \cap \mathbf{P}^{2j-1} = 0$.

Projetons de nouveau C_1 par 0 en C_2 sur un hyperplan H de $\mathbf{P}^{2i-1}$; et projetons C'_1 par 0 en C'_2 sur un hyperplan H' de $\mathbf{P}^{2j-1}$. Les sous-espaces W passant par 0 et coupant C_1 en i points correspondent bijectivement aux $[i-2]$ intersectant C_2 dans $H \simeq \mathbf{P}^{2i-2}$ en i points; leur nombre est donc $\upsilon_i(n,f)$, car C_2 est aussi d'invariants n et f. De même le nombre de sous-espaces W' passant par 0 et coupant C'_1 en j points est le même que le nombre de $[j-2]$ coupant C'_2 en j points dans $H' \simeq \mathbf{P}^{2j-2}$; autrement dit, c'est $\upsilon_j(n',f')$. Or le joint $J(W,W')$ est un sous-espace $[k-2]$ puisque $W \cap W' = 0$. Au total, il y a $\upsilon_i(n,f).\upsilon_j(n',f')$ sous-espaces $V = J(W,W')$ de $\mathbf{P}^{2k-2}$ qui sont i-sécants à C et j-sécants à C'.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas $i = 1$ ou $j = 1$. Supposons par exemple $j = 1$. Comme précédemment, on projette génériquement C en C_1 sur un $\mathbf{P}^{2i-1} = \mathbf{P}^{2k-3}$.

Mais cette fois, on projette C' en C'_3 sur un $\mathbf{P}^2$. Soit L la droite intersection du $\mathbf{P}^{2k-3}$ et du $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^{2k-2}$. Si V est un $[k-2]$ (k-1)-sécant à C_1, il est entièrement déterminé par les $k-1$ points de $V \cap C_1$ dans $V \subset \mathbf{P}^{2k-3}$. Mais si on veut en plus que V coupe C'_3 en un point m, on doit avoir $m \in V \cap \mathbf{P}^2 \subset L$. Or la courbe plane C'_3 coupe L en n' points (où $n' = deg(C')$). On est alors ramené à chercher le nombre de $[k-2]$ (k-1)-sécants à C_1 dans $\mathbf{P}^{2k-3}$ et passant par un point fixe $m \in \mathbf{P}^{2k-2}$. Ce nombre est $\upsilon_{k-1}(n,f)$, comme on le voit en projetant C_1 par m sur un hyperplan de $\mathbf{P}^{2k-3}$. Par suite le nombre cherché de V (k-1)-sécants à C et coupant C' est $n'\upsilon_{k-1}(n,f)$, soit encore $\upsilon_{k-1}(n,f)\upsilon_1(n',f')$.

Le lemme 2 est ainsi totalement démontré.

5) Le théorème.

Notons $S_{n,f}(t)$ la fonction génératrice de $\sum_{k\geq 0} \upsilon_k(n,f)t^k \in \mathbf{Z}[[t]]$ pour des courbes lisses de degré n et "mirang" f. On déduit immédiatement du lemme 2 l'égalité suivante dans $\mathbf{Z}[[t]]$:

$$S_{n+n',f+f'}(t) = S_{n,f}(t).S_{n',f'}(t). \tag{$*$}$$

Mais pour une *droite* ($n = 1, f = 0$), on connaît la fonction $S_{1,0}(t)$: c'est $U(t)$ (voir (1)). Pour une *conique* ($n = 2, f = 1$), on connaît également la fonction $S_{2,1}(t) = V(t)$ (voir (2)). D'après (*), pour une réunion disjointe de p droites ($n = p, f = 0$), on a $S_{p,0}(t) = U(t)^p$. De même, pour la réunion disjointe de q coniques ($n = 2q, f = q$), on a $S_{2q,q}(t) = V(t)^q$.

Maintenant pour des invariants n et f quelconques, deux cas se présentent:

i) $n \geq 2f$, on écrit $(n,f) = (2f,f) + (n-2f,0)$; d'où par (*): $S_{n,f}(t) = V(t)^f.U(t)^{2n-f}$.

ii) $n < 2f$, on écrit $(n,f) + (2f-n,0) = (2f,f)$, d'où $S_{n,f}(t).U(t)^{2f-n} = V(t)^f$.

Dans les deux cas, le résultat est le même, puisque $U(t)$ est inversible dans $\mathbf{Z}[[t]]$: on obtient $S_{n,f}(t) = \frac{V(t)^f}{U(t)^{2f-n}}$.

Or ce qui nous intéresse en pratique c'est le cas des courbes *connexes* de degré n et genre g. Dans ce cas, on a $f = g + n - 1$; l'expression ci-dessus devient alors:

$$S_{n,f}(t) = \frac{V(t)^{g+n-1}}{U(t)^{2g+n-2}} \ .$$

Cette expression se réécrit $S_{n,f}(t) = \left(\frac{U(t)}{V(t)}\right)^n \left(\frac{U(t)}{V^2(t)}\right)^{g-1}$. Or d'après (1) et (2), on obtient immédiatement:

$$\frac{U(t)}{V(t)} = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$$

et

$$\frac{U(t)}{V^2(t)} = \frac{-1-4t+(1+2t)\sqrt{1+4t}}{2t^2}.$$

Et le théorème est démontré.

On a ainsi les formules:

$$v_3 = \binom{n}{3} - 2\binom{n}{2} - n(g-3) + 4(g-1)$$

$$v_4 = \binom{n}{4} - 3\binom{n}{3} + \binom{n}{2}(6-g) + 5n(g-2) + \binom{g}{2} - 15g + 15$$

Etc...etc...

REFERENCES

[1] E. Arbarello - M. Cornalba - P. Griffiths - J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, vol. I, Springer-Verlag (1985).

[2] G. Castelnuovo, *Una applicazione della Geometria Enumerativa alle curve algebriche*, Rendiconti Palermo III (1889), 27-37.

[3] S. Donaldson, *Instantons in Yang-Mills theory, The interface of Mathematics and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford (1990), 59-75.

[4] W. Fulton - Young Tableaux, *London Math. Soc. Student Texts 35*, Cambridge University Press (1997).

[5] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag (1977).

[6] P. Le Barz, *Formules pour les espaces multisécants aux courbes algébriques*, C. R. Ac. Sc. Paris, Ser. I, **340** (2005), 743-746.

[7] P. Le Barz, *Formules pour les trisécantes des surfaces algébriques*, L'Enseignement Mathématique, **33** (1987), 1-66.

[8] M. Lehn, *Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces*, Inv. Math., **136** (1999), 157-207.

[9] J. Semple, L. Roth, *Introduction to Algebraic Geometry*, Clarendon Press, Oxford (1949).

[10] A. Tikhomirov - T. Troshina, *Top Segre class of a standard vector bundle on the Hilbert scheme $Hilb^4 S$ of a surface S, Algebraic geometry and its applications, Yaroslavl'*, Aspects of Maths. vol. E25, Vieweg-Verlag (1994), 205-226.

[11] V. Vassallo, *Justification de la méthode fonctionnelle pour les courbes gauches*, Acta Mat., **172** (1994), 257-297.

Laboratoire Jean Dieudonné, UMR 6621
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France
e-mail: lebarz@unice.fr

Pervenuta in Redazione
6 giugno 2005