Bollettino
Unione Matematica Italiana

Wenchang Chu, Livia De Donno

Identità Binomiali e Numeri Armonici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-B** (2007), n.1, p. 213–235.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_1_213_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
(8) **10**-B (2007), 213-235

Identità Binomiali e Numeri Armonici

WENCHANG CHU - LIVIA DE DONNO

Sunto. – *Numerose identità classiche sui numeri armonici sono mostrate tramite l'operatore di derivazione di Newton ai coefficienti binomiali.*

Summary. – *Several classical identilies on harmonic numbers are demonstrated by means of Newton's derivative operator on binomial coefficients.*

1. – Introduzione e Motivazione.

Introducendo una variabile x definiamo una generalizzazione dei numeri armonici tramite queste posizioni

$$H_0^{\langle m\rangle}(x) \equiv 0 \quad \text{e} \quad H_n^{\langle m\rangle}(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^m} \quad \text{per} \quad m,n = 1,2,\cdots.$$

Quando $x = 0$, è evidente che $H_n^{\langle m\rangle}(0)$ coincide con la definizione classica dei numeri armonici e precisamente

$$H_0^{\langle m\rangle} \equiv 0 \quad \text{e} \quad H_n^{\langle m\rangle} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} \quad \text{per} \quad m,n = 1,2,\cdots.$$

In particolare per $m = 1$, i due simboli $H_n^{\langle 1\rangle}(x)$ e $H_n^{\langle 1\rangle}$ vengono abbreviati con $H_n(x)$ e H_n, rispettivamente.

Esistono numerose identità combinatorie che coinvolgono i numeri armonici, alcune delle quali sono molto significative nello studio interdisciplinare della teoria dei numeri, dell'analisi classica e della fisica teorica. Ci limitiamo a riportare tre casi esemplari per motivare il presente lavoro.

1.1. – *Congettura di Beukers.*

Per un numero naturale n, siano $A(n)$ il numero di Apéry definito da una somma binomiale:

$$A(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

e $\beta(n)$ il coefficiente determinato dalla serie formale di potenze:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta(m) q^m := q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^4 (1-q^{4n})^4 = q - 4q^3 - 2q^5 + 24q^7 + \cdots.$$

Beukers [5] afferma che per ogni primo dispari p vale la seguente congruenza (v. [2 Theorem 7])

$$A\Big(\frac{p-1}{2}\Big) \equiv \beta(p) \pmod{p^2}.$$

Recentemente, Ahlgren ed Ono [2] hanno dimostrato che questa congettura consegue dalla seguente identità binomiale riguardante i numeri armonici:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \{1 + 2kH_{n+k} + 2kH_{n-k} - 4kH_k\} = 0 \tag{1.1}$$

la quale viene confermata con successo da Ahlgren-Ekhad-Ono-Zeilberger [1] via *WZ method* e generalizzata da Chu [7] tramite la decomposizione della frazione parziale.

1.2. – *Congettura di Weideman.*

Una delle sfide più dure nel campo di *computer algebra* è la seguente identità scoperta da Weideman [22, Eq. 20]:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^3 \{3(H_k - H_{n-k})^2 + (H_k^{\langle 2 \rangle} + H_{n-k}^{\langle 2 \rangle})\} = 0. \tag{1.2}$$

Questa identità è stata confermata da Driver-Prodinger-Schneider-Weideman [12, Eq. 16] (cfr. anche [13, Eq. 12]) tramite il programma *Sigma* di computer algebra. Una dimostrazione classica viene trovata da Chu [8, Eq. 0.5], dove la tecnica adottata ci conduce alla soluzione del problema aperto riguardante l'approssimazione di Hermite-Padé per la funzione di logaritmo.

1.3. – *Estimazione entropica.*

Nell'estimazione entropica del processo stazionario, Lyons e Steif [17] si sono imbattuti nel seguente integrale:

$$\Im(m) := \int_0^1 e^{-2m\pi i x} \ln(\sin \pi x/2)\, dx \quad \text{per} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Applicando le due relazioni

$$\ln\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\pi x}{2} = \frac{\ln 2}{-2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n\pi x}{2n}$$

$$\cos^n\pi x = \frac{(e^{\pi i x}+e^{-\pi i x})^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{(2k-n)\pi i x}}{2^n}$$

è facile esprimere l'integrale in questione tramite la doppia somma

$$\mathfrak{S}(m) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1+2n}\binom{1+2n}{k}\frac{2^{-2n}}{(1+2n)(1+2m+2n-2k)}.$$

La cosa sorprendente è che il risultato finale viene espresso in numeri armonici:

$$\mathfrak{I}(m) = \frac{\ln 2}{-2} + \frac{i}{2\pi}\mathfrak{S}(m) \quad \text{dove} \quad \mathfrak{S}(m) = \begin{cases} 0, & m=0; \\ \dfrac{2H_{2|m|}-H_{|m|}}{m}, & m\neq 0. \end{cases}$$

Questo è confermato da Lyons-Paule-Riese [16] mediante computer algebra. Una soluzione alternativa viene fornita da Chu-De Donno [10] per mezzo del calcolo combinatorio.

Finora le identità riguardanti i numeri armonici sono state dimostrate, per lo più, tramite l'algebra combinatoria (cfr. [4]) per la presenza, come vedremo, dei coefficienti binomiali ma anche con metodi algebrici (cfr. [15]). Ma ancora, Andrews e Uchimura [3] hanno dimostrato alcune identità basandosi sull'idea che i numeri armonici possono essere visti come derivata di un prodotto, anche se, come tengono a precisare gli stessi autori, questa intuizione la ebbe per la prima volta Isaac Newton [20]. Lo scopo del presente lavoro è quello di presentare le identità classiche dei numeri armonici, sparse in letteratura, mediante un approccio sistematico basato sulla generalizzazione dell'operatore di derivazione che consente, inoltre, di stabilire alcuni risultati nuovi.

La principale strategia dimostrativa consiste di tre passagi fondamentali: riformulare la nota identità binomiale identificando una opportuna variabile x, calcolare la derivata della identità binomiale rispetto alla variabile x che inserisce numeri armonici nella somma binomiale, e scrivere l'identità finale sui numeri armonici e coefficienti binomiali. Forniamo un esempio chiarificatore della procedura adottata.

Per l'identità binomiale (cfr. [15, Eq. 5.9])

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\gamma+k}{k} = \binom{\gamma+n+1}{n}$$

possiamo riformularla con la sostituzione $y \to m + x$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+m+k}{k} = \binom{x+m+n+1}{n}.$$

Calcolando la derivata rispetto ad x nel punto $x = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} \{H_{m+k} - H_m\} = \binom{m+n+1}{n} \{H_{m+n+1} - H_{m+1}\}$$

e semplicandola, otteniamo una identità sui numeri armonici come segue:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} H_{m+k} = \binom{m+n+1}{n} \left\{ H_{m+n+1} - \frac{1}{m+1} \right\}.$$

Il resto dell'articolo è organizzato nel seguente modo. Nella seconda sezione, dopo aver definito l'operatore di derivazione, vengono provate alcune sue proprietà che costituiscono uno strumento per dimostrare le identità classiche sui numeri armonici presenti nella terza sezione. La quarta sezione è dedicata ad altri risultati che si possono ottenere dalla combinazione dell'operatore di derivazione con le proprietà delle funzioni generatrici. Infine, nell'ultima sezione sono presentati degli esempi interessanti ottenuti dalla derivazione di identità binomiali classiche.

2. – Operatore di Derivazione e Numeri Armonici.

Data una funzione differenziabile $f(x)$ e un numero $\ell \in \mathbb{Z}$, denotiamo tre operatori di derivazione nel seguente modo:

$$\mathcal{D}_x f(x) = \frac{d}{dx} f(x);$$

$$\mathcal{D}_0 f(x) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=0};$$

$$\mathcal{D}_\ell f(x) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=\ell}.$$

Applicando l'operatore $\mathcal{D}_x$ ai coefficienti binomiali si ottiene un'espressione in termini dei numeri armonici e nel seguente lemma sono raccolti i risultati riguardanti tale applicazione.

LEMMA 1. – *Se $m, n \geq 0$, allora valgono*

$$\mathcal{D}_x\binom{x+n}{m} = \begin{cases} \binom{x+n}{m}\{H_n(x) - H_{n-m}(x)\}, & m \leq n \\ \\ \binom{x+n}{m}\left\{\frac{1}{x} + H_n(x) - H_{m-n-1}(-x)\right\}, & m > n; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{D}_0\binom{x+n}{m} = \begin{cases} \binom{n}{m}\{H_n - H_{n-m}\}, & m \leq n \\ \\ \binom{m}{n}^{-1}\frac{(-1)^{n-m}}{n-m}, & m > n; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{D}_\ell\binom{x+n}{m} = \begin{cases} \binom{\ell+n}{m}\{H_{\ell+n} - H_{\ell+n-m}\}, & m \leq \ell+n \\ \\ \binom{\ell+n}{m}\{H_{-\ell-n-1} - H_{m-\ell-n-1}\}, & \ell+n < 0 \\ \\ \binom{m}{\ell+n}^{-1}\frac{(-1)^{\ell+n-m}}{\ell+n-m}, & 0 \leq \ell+n < m. \end{cases} \tag{2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. – Si può facilmente verificare che la derivazione del coefficiente binomiale è data da

$$\mathcal{D}_x\binom{x+n}{m} = \binom{x+n}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x+n-m+k}.$$

Ne segue per $m \leq n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x\binom{x+n}{m} &= \binom{x+n}{m}\sum_{k=n-m+1}^{n}\frac{1}{x+k} \\ &= \binom{x+n}{m}\{H_n(x) - H_{n-m}(x)\}.\end{aligned}$$

Invece se $m > n$, allora si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x\binom{x+n}{m} &= \binom{x+n}{m}\left\{\sum_{j=0}^{m-n-1}\frac{1}{x-j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x+j}\right\} \\ &= \binom{x+n}{m}\left\{\frac{1}{x} + H_n(x) - H_{m-n-1}(-x)\right\}.\end{aligned}$$

Ora, sia $x = 0$ e consideriamo solo il caso $m > n$ in quanto l'altro risulta banale. Dalla definizione di coefficiente binomiale possiamo scrivere

$$\mathcal{D}_0\binom{x+n}{m} = \frac{\mathcal{D}_x}{m!}\prod_{i=0}^{n}(x+i)\prod_{j=1}^{m-n-1}(x-j)\Big|_{x=0} = \binom{m}{n}^{-1}\frac{(-1)^{n-m}}{n-m}.$$

Infine sia $x = \ell$. Il caso $0 \leq \ell + n < m$ è immediata conseguenza di quello precedente dopo aver sostituito n con $n + \ell$. Per $m \leq \ell + n$ abbiamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\ell\binom{x+n}{m} &= \binom{\ell+n}{m}\{H_n(\ell) - H_{n-m}(\ell)\} \\
&= \binom{\ell+n}{m}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell+i} - \sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{\ell+j}\Big\} \\
&= \binom{\ell+n}{m}\{H_{n+\ell} - H_{n-m+\ell}\}.
\end{aligned}$$

Mentre se $\ell + n < 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\ell\binom{x+n}{m} &= \binom{\ell+n}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\ell+n-m+k} \\
&= -\binom{\ell+n}{m}\sum_{j=-\ell-n}^{-\ell-n+m-1}\frac{1}{j} \\
&= \binom{\ell+n}{m}\{H_{-\ell-n-1} - H_{m-\ell-n-1}\}.
\end{aligned}$$

Così la dimostrazione è completa. □

3. – Identità classiche sui numeri armonici.

Applicando l'operatore di derivazione $\mathcal{D}_x$ ad alcune somme binomiali note, si ricavano interessanti identità che coinvolgono i numeri armonici.

Dall'applicazione delle derivate $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_\ell$ (per $\ell > 0$) e $\mathcal{D}_x$ alla convoluzione binomiale di Chu-Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k} = \binom{x+y+n+1}{n}$$

si ottengono, rispettivamente, le identità concernenti numeri armonici generalizzati:

$$\sum_{k=0}^{n} H_k \binom{y+n-k}{n-k} = \binom{y+n+1}{n} \big\{H_{n+1}(y) - H_1(y)\big\}; \tag{3.1a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{k} \binom{y+n-k}{n-k} \big\{H_{\ell+k} - H_\ell\big\} = \binom{\ell+y+n+1}{n} \big\{H_{\ell+n+1}(y) - H_{\ell+1}(y)\big\}; \tag{3.1b}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} \binom{y+n-k}{n-k} H_k(x) = \binom{x+y+n+1}{n} \big\{H_{n+1}(x+y) - H_1(x+y)\big\}. \tag{3.1c}$$

3.1. – Una recente identità dovuta a Mortenson [19, Lemma 2.2] si legge come segue:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \big\{1 + 2k(H_{n+k} - H_k)\big\} = (-1)^n (1+2n). \tag{3.2}$$

Possiamo ottenerla direttamente dall'applicazione dell'operatore $\mathcal{D}_0$ sulla seguente identità binomiale:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x+n+k}{n} (x+2k) = (-1)^n \big\{x + 2n(1+n+x)\big\}. \tag{3.3}$$

Quest'ultima si verifica facilmente da una combinazione lineare della convoluzione di Chu-Vandermonde. Infatti, ricordando la seguente relazione binomiale

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{x+n+k}{n} &= \binom{x+n}{n-k}\binom{x+n+k}{k} \\ &= (-1)^k \binom{x+n}{n-k}\binom{-1-x-n}{k}\end{aligned}$$

possiamo riformulare il primo membro della (3.3) nel seguente modo:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x+n+k}{n} (x+2k) = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n} \binom{x+n}{n-k}\binom{-1-x-n}{k} \big\{2(1+x+n+k) - (2+x+2n)\big\} \\ &\qquad = 2(1+x+n) \sum_{k=0}^{n} \binom{x+n}{n-k}\binom{-2-x-n}{k} \\ &\qquad - (2+x+2n) \sum_{k=0}^{n} \binom{x+n}{n-k}\binom{-1-x-n}{k} =\end{aligned}$$

$$= 2(1+x+n)\binom{-2}{n} - (2+x+2n)\binom{-1}{n}$$

$$= (-1)^n \Big\{ 2(1+n)(1+x+n) - (2+x+2n) \Big\}.$$

Si vede facilmente che l'ultima riga riduce al membro destro della (3.3). □

3.2. – Raccogliamo nei successivi due teoremi alcune identità classiche sui numeri armonici.

TEOREMA 2. – *Siano m, n due interi non negativi con $m < n$. Allora valgono le seguenti identità:*

$$\sum_{k=m}^{n-1} H_k = (m-n) + nH_n - mH_m; \tag{3.4a}$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} \{H_n - H_m\}; \tag{3.4b}$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} \Big\{ H_n - \frac{1}{1+m} \Big\}. \tag{3.4c}$$

DIMOSTRAZIONE. – Richiamiamo l'identità binomiale [15, Eq. 5.9]

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n}{n-1} - \binom{x+m}{m-1}$$

e riscriviamo H_k come derivata in $x = 0$ del coefficiente binomiale $\binom{x+k}{k}$. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} H_k &= \mathcal{D}_0 \sum_{k=m}^{n-1} \binom{x+k}{k} \\ &= \mathcal{D}_0 \Big\{ \binom{x+n}{n-1} - \binom{x+m}{m-1} \Big\} \\ &= n(H_n - 1) - m(H_m - 1). \end{aligned}$$

Così risulta provata la prima identità. Adesso, per dimostrare (3.4b), deduciamo da questa relazione

$$\frac{1}{n-k} = \mathcal{D}_0 \binom{x+n-k-1}{n-k}$$

e dalla convoluzione di Chu-Vandermonde, la seguente espressione

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \mathcal{D}_0 \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \binom{x+n-k-1}{n-k}$$

$$= \mathcal{D}_0 \left\{ \binom{x+n}{n-m} - \binom{n}{m} \right\}$$

$$= \binom{n}{m} \{H_n - H_m\}.$$

Infine, per provare la terza identità, posto dapprima H_k come derivata in $x = 0$ del coefficiente binomiale $\binom{x+k}{k}$ e sostituito, poi, k con $k+m$ nella sommatoria, abbiamo

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \mathcal{D}_0 \sum_{k=0}^{n-m-1} \binom{m+k}{k} \binom{x+k+m}{k+m}.$$

Dalla relazione binomiale

$$\binom{m+k}{k} \binom{x+k+m}{k+m} = \binom{x+m}{m} \binom{x+k+m}{k}$$

segue immediatamente

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \mathcal{D}_0 \binom{x+m}{m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \binom{x+k+m}{k}$$

$$= \mathcal{D}_0 \binom{x+m}{m} \binom{x+n}{n-m-1}$$

$$= \binom{n}{m+1} \left\{ H_n - \frac{1}{1+m} \right\}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo riutilizzato l'identità binomiale richiamata all'inizio della dimostrazione. $\square$

Utilizzando l'operatore $\mathcal{D}_0$ raccogliamo nel seguente teorema altre identità dei numeri armonici che sono una generalizzazione di quelle presenti nel Teorema precedente.

TEOREMA 3. – *Siano m, n numeri naturali con $0 \leq m < n$ e $\ell \in \mathbb{Z}$. Allora* *valgono*

$$\text{(3.5a)}\quad \sum_{k=m}^{n-1}\binom{y+k}{k}H_k=\frac{1}{1+y}\left\{\binom{1+y+m}{m}-\binom{1+y+n}{n}\right\}$$

$$+\binom{y+n}{n-1}H_n-\binom{y+m}{m-1}H_m,\quad (y\neq -1);$$

$$\text{(3.5b)}\quad \sum_{k=m}^{n-1}\binom{\ell+k}{k-m}H_{n-k}=\binom{1+\ell+n}{1+\ell+m}\left\{H_{1+\ell+n}-H_{1+\ell+m}\right\},\quad (1+\ell+m\geq 0);$$

$$\text{(3.5c)}\quad \sum_{k=m}^{n-1}\binom{\ell+k}{k-m}\frac{1}{n-k}=\binom{\ell+n}{\ell+m}\left\{H_{\ell+n}-H_{\ell+m}\right\},\qquad (\ell+m\geq 0).$$

Dimostrazione. – Dall'identità [14. Eq. 4.1], si ha che

$$\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\binom{k+y}{k}}{\binom{k-x}{k}}=\frac{1+y}{1+x+y}\left\{\frac{\binom{n+y}{n-1}}{\binom{n-1-x}{n-1}}-\frac{\binom{m+y}{m-1}}{\binom{m-1-x}{m-1}}\right\}.$$

Tenendo conto che H_k è esprimibile come la derivata dell'inverso del coefficiente binomiale e cioè

$$H_k=\mathcal{D}_0\binom{k-x}{k}^{-1}$$

applichiamo $\mathcal{D}_x$ in $x=0$. In questo modo abbiamo:

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k+y}{k}H_k=\mathcal{D}_0\left\{\frac{\binom{n+y}{n-1}}{\binom{n-1-x}{n-1}}-\frac{\binom{m+y}{m-1}}{\binom{m-1-x}{m-1}}\right\}\frac{1+y}{1+x+y}$$

$$=\frac{1}{1+y}\left\{\binom{m+y}{m-1}-\binom{n+y}{n-1}\right\}$$

$$+\binom{n+y}{n-1}H_{n-1}-\binom{m+y}{m-1}H_{m-1}$$

che è equivalente alla prima formula del teorema.

Applicando, invece, $\mathcal{D}_y$ in $y=0$ abbiamo una nuova e interessante identità:

$$\text{(3.6a)}\quad \sum_{k=m}^{n-1}\frac{H_k}{\binom{k-x}{k}}=\frac{1}{1+x}\left\{\frac{nH_n}{\binom{n-1-x}{n-1}}-\frac{mH_m}{\binom{m-1-x}{m-1}}\right\}$$

$$\text{(3.6b)}\quad -\frac{1}{(1+x)^2}\left\{\frac{n}{\binom{n-1-x}{n-1}}-\frac{m}{\binom{m-1-x}{m-1}}\right\}.$$

Per la seconda identità del Teorema, posto H_{n-k} uguale a $\mathcal{D}_0\binom{x+n-k}{n-k}$ e richiamata la convoluzione di Chu-Vandermonde nella seguente forma:

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{\ell+k}{k-m}\binom{x+n-k}{n-k}=\binom{x+1+\ell+n}{n-m}-\binom{\ell+n}{n-m}$$

abbiamo immediatamente la tesi:

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{\ell+k}{k-m}H_{n-k}=\mathcal{D}_0\left\{\binom{x+1+\ell+n}{n-m}-\binom{\ell+n}{n-m}\right\}$$

$$=\binom{1+\ell+n}{1+\ell+m}\left\{H_{1+\ell+n}-H_{1+\ell+m}\right\}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato (2.2) per $1+\ell+m\geq 0$.

La terza identità del teorema è ottenuta come applicazione di (3.5b). Infatti scrivendo

$$\frac{1}{n-k}=H_{n-k}-H_{n-1-k}$$

e applicando il risultato precedente per $\ell+m\geq 0$, si ha

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{\ell+k}{k-m}\frac{1}{n-k}=\binom{1+\ell+n}{1+\ell+m}\left\{H_{1+\ell+n}-H_{1+\ell+m}\right\}$$

$$-\binom{\ell+n}{1+\ell+m}\left\{H_{\ell+n}-H_{1+\ell+m}\right\}$$

$$=\binom{\ell+n}{\ell+m}\left\{H_{\ell+n}-H_{\ell+m}\right\}.$$

Quindi abbiamo completato la dimostrazione del teorema. □

3.3. – Con questi strumenti a disposizione, possiamo riottenere alcune identità dei numeri armonici viste nell'articolo di Paule-Schneider [21] dove sono state ricavate con l'uso degli algoritmi di Karr e di Zeilberger.

PROPOSIZIONE 4. [Paule-Schneider [21, Eqs. 39-40]). – *Sia n un numero naturale. Allora valgono le seguenti identità:*

$$\text{(3.7a)}\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k=2^nH_n-2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k},\quad n\geq 0;$$

$$\text{(3.7b)}\qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}H_k=\frac{1}{2}\left\{-1+2^n\left(1+nH_n-n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right)\right\},\quad n\geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. – Sostituiamo n con $n-k$ e poi applichiamo (2.2) alla prima somma. Pertanto si ha:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k=\sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}H_n-\mathcal{D}_0\binom{x+n}{k}\right\}$$

$$=2^nH_n-\mathcal{D}_0\sum_{k=0}^{n}\binom{x+n}{k}.$$

Richiamando ora l'identità binomiale [14 Eq. 1.9]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{u}{k}v^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-u}{k}(1+v)^{n-k}(-v)^k \tag{3.8}$$

possiamo procedere nel calcolo come segue:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k=2^nH_n-\mathcal{D}_0\sum_{k=0}^{n}\binom{-x}{k}2^{n-k}(-1)^k$$

$$=2^nH_n-2^n\mathcal{D}_0\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k-1}{k}2^{-k}$$

$$=2^nH_n-2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}$$

che è la prima identità (3.7a). Passiamo, ora, a provare (3.7b). Poiché per $k>0$ vale la seguente identità

$$k\binom{n}{k}H_k=n\binom{n-1}{k-1}H_{k-1}+\binom{n}{k}$$

allora possiamo riscrivere:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}H_k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}H_{k-1}.$$

Applicando (3.7a) alla seconda somma del membro di destra della relazione precedente si ha la tesi. □

Dalla combinazione di (3.7a) e di (3.7b) abbiamo ottenuto un'altra identità [21, Eq. 1]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{1+(n-2k)H_k\}=1. \tag{3.9}$$

PROPOSIZIONE 5. (Paule-Schneider [21, Eqs. 41-42]). – *Sia n un numero* *naturale. Valgono le seguenti identità:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 H_k = \{2H_n - H_{2n}\}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0; \tag{3.10a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_k = \frac{1}{4}\{1 + 4nH_n - 2nH_{2n}\}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 1. \tag{3.10b}$$

DIMOSTRAZIONE. – Cambiando l'indice nella somma di sinistra di (3.10a) e utilizzando l'identità (2.2) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 H_k &= H_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 - \mathcal{D}_0\sum_{k=0}^{n}\binom{x+n}{k}\binom{n}{k}\\ &= \binom{2n}{n}H_n - \mathcal{D}_0\binom{x+2n}{n}.\end{aligned}$$

Eseguendo la derivata nell'ultima riga si ottiene la prima identità.

Per quanto riguarda la dimostrazione della seconda identità, osserviamo per (2.2) vale:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_{n-k} &= H_n\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 - \mathcal{D}_0\sum_{k=0}^{n} k\binom{x+n}{k}\binom{n}{k}\\ &= nH_n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1} - n\mathcal{D}_0\sum_{k=1}^{n}\binom{x+n}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Applicando, poi, la convoluzione di Chu-Vandermonde:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{2n-1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{x+n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{x+2n-1}{n}$$

la formula si riduce alla seguente espressione

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_{n-k} = nH_n\binom{2n-1}{n} - n\mathcal{D}_0\binom{x+2n-1}{n}.$$

Calcolando la derivata in $x = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_{n-k} &= \frac{n}{2}\{H_n - H_{2n-1} + H_{n-1}\}\binom{2n}{n}\\ &= \frac{1}{4}\{-1 + 4nH_n - 2nH_{2n}\}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Effettuando un cambio di indice $k \to n-k$ nella somma di sinistra di (3.10b), possiamo infine scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_k &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 H_k - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 H_{n-k}\\ &= \frac{1}{4}\binom{2n}{n}\big\{1+4nH_n-2nH_{2n}\big\}\end{aligned}$$

che è esattamente il membro destro di (3.10b). □

Dalla combinazione di (3.10a) e di (3.10b) otteniamo un'altra identità [21, Eq. 2]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\big\{1+2(n-2k)H_k\big\}=0. \tag{3.11}$$

4. – Funzioni Generatrici.

Per una serie di potenze $F(y)$ indichiamo con $[y^n]F(y)$ il coefficiente di y^n.

4.1. – Se ad ambo i membri del seguente sviluppo binomiale

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x+k}{k}y^k=\frac{1}{(1-y)^{1+x}}$$

applichiamo l'operatore di derivazione $\mathcal{D}_x$ in $x=0$ otteniamo immediatamente la funzione generatrice ordinaria che ha per coefficiente i numeri armonici:

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k y^k = \frac{-\ln(1-y)}{1-y}. \tag{4.1}$$

È possibile ottenere una nuova identità che coinvolge i numeri armonici sostituendo dapprima x con $x+n$ nello sviluppo binomiale e poi applicando rispetto alla variabile x l'operatore $\mathcal{D}_0$ alla relazione ottenuta. Cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big\{H_{n+k}-H_n\big\}\binom{n+k}{k}y^k=\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{n+1}} \tag{4.2}$$

che contiene (4.1) per $n=0$ come caso particolare. Considerando poi, la funzione generatrice di

$$\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{m+n+2}}=\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{n+1}}\times\frac{1}{(1-y)^{m+1}}$$

abbiamo

$$[y^\ell]\frac{1}{(1-y)^{m+1}}=\binom{\ell+m}{\ell}$$

$$[y^k]\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{n+1}}=\binom{k+n}{k}\big\{H_{n+k}-H_n\big\}.$$

Così alla fine dalla seguente espressione:

$$[y^\ell]\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{m+n+2}}=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+m-k}{m}\binom{n+k}{k}\{H_{n+k}-H_n\}$$

si deduce l'identità equivalente a (3.1b) per $y=m$:

$$\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+m-k}{m}\binom{n+k}{k}\{H_{n+k}-H_n\} \tag{4.3a}$$

$$=\binom{\ell+m+n+1}{\ell}\{H_{\ell+m+n+1}-H_{m+n+1}\}. \tag{4.3b}$$

4.2. – Passiamo a generalizzare la precedente identità. Se teniamo conto che per ogni $k\geq 0$ possiamo scrivere:

$$H_{n+k}-H_n=\sum_{i=n+1}^{n+k}\frac{1}{i}$$

e che, con un cambiamento di parametro $j=i-n$, si legge

$$H_{n+k}-H_n=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+n}$$

allora è lecito sostituire n con la variabile x dato che, nella espressione precedente, l'indice di sommatoria non dipende più da n. In questo modo (4.2) diventa:

$$\sum_{k=0}^{\infty}H_k(x)\binom{x+k}{k}y^k=\frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{x+1}}. \tag{4.4}$$

Applicando due volte $\mathcal{D}_x$ otteniamo la nuova espressione:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{H_k^2(x)-H_k^{(2)}(x)\}\binom{x+k}{k}y^k=\frac{\ln^2(1-y)}{(1-y)^{x+1}} \tag{4.5}$$

dove è stata usata la seguente notazione

$$H_k^{(\ell)}(x):=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i+x)^\ell}\quad\text{per}\quad \ell=1,2,\cdots.$$

Effettuando un cambiamento di parametro $x=1+m+n$, (4.5) diventa:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{H_k^2(1+m+n)-H_k^{(2)}(1+m+n)\}\binom{m+n+k+1}{k}y^k=\frac{\ln^2(1-y)}{(1-y)^{m+n+2}}. \tag{4.6}$$

Per estrarre i coefficienti di $[y^\ell]$ dai due membri di (4.6) è sufficiente trovare un'espressione esplicita per la somma di destra. Poiché vale

$$\frac{\ln^2(1-y)}{(1-y)^{m+n+2}} = \frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{m+1}} \times \frac{-\ln(1-y)}{(1-y)^{n+1}}$$

allora è immediato ricavare

$$[y^\ell]\frac{\ln^2(1-y)}{(1-y)^{m+n+2}} = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{m+i}{i}\binom{n+\ell-i}{\ell-i}(H_{m+i}-H_m)(H_{n+\ell-i}-H_n).$$

Così alla fine abbiamo la seguente identità:

$$\sum_{i=0}^{\ell} \binom{m+i}{i}\binom{n+\ell-i}{\ell-i}(H_{m+i}-H_m)(H_{n+\ell-i}-H_n) \tag{4.7a}$$

$$= \binom{m+n+\ell+1}{\ell}\big\{H_\ell^2(1+m+n) - H_\ell^{(2)}(1+m+n)\big\}. \tag{4.7b}$$

4.3. – Adesso forniamo una nuova dimostrazione delle identità (3.7a) e (3.7b) presenti nella Proposizione 4 che fa uso delle funzioni generatrici. Indichiamo con $F(y)$ la funzione generatrice ordinaria della somma al primo membro di (3.7a), cioè

$$F(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y^n \sum_{k=1}^{n} H_k \binom{n}{k}. \tag{4.8}$$

Vogliamo determinare un'espressione esplicita per $F(y)$. Posto $H_k = \mathcal{D}_0\binom{x+k}{k}$ e scambiato l'ordine delle somme si ha:

$$F(y) = \mathcal{D}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{x+k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} y^n.$$

Cambiato, poi, l'indice della somma più interna con la sostituzione $n \to n+k$ e applicato due volte lo sviluppo binomiale segue che

$$\begin{aligned}
F(y) &= \mathcal{D}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{x+k}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} y^{n+k} \\
&= \mathcal{D}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{x+k}{k} \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}} \\
&= \mathcal{D}_0 \frac{1}{1-y}\left\{\left(1-\frac{y}{1-y}\right)^{-1-x} - 1\right\} \\
&= \mathcal{D}_0 \frac{(1-y)^x}{(1-2y)^{1+x}}.
\end{aligned}$$

Eseguita la derivata rispetto a x e posto $x = 0$ si ha

$$F(y) = \frac{\ln(1-y) - \ln(1-2y)}{1-2y}.$$

Per la proprietà di convoluzione delle funzioni generatrici possiamo determinare il coefficiente di $[y^n]$ nel seguente modo:

$$[y^n]\frac{\ln(1-y)}{1-2y} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{n-j}}{j} \quad \text{e} \quad [y^n]\frac{\ln(1-2y)}{1-2y} = -2^n H_n.$$

Allora otteniamo la tesi in quanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}H_k = [y^n]F(y) &= [y^n]\frac{\ln(1-y)}{1-2y} - [y^n]\frac{\ln(1-2y)}{1-2y}\\ &= 2^n H_n - 2^n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j2^j}.\end{aligned}$$

Ora indichiamo con $G(y)$ la funzione generatrice della somma al primo membro di (3.7b). Pertanto

$$G(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y^n \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}H_k. \tag{4.9}$$

Calcoliamo la forma esplicita per $G(y)$. Poiché $H_k = \mathcal{D}_0\binom{x+k}{k}$ e scambiando gli indici delle somme, ricaviamo

$$G(y) = \mathcal{D}_0\sum_{k=1}^{\infty}\binom{x+k}{k}\sum_{n=k}^{\infty}k\binom{n}{k}y^n.$$

Applicando due volte l'espansione binomiale, procediamo nel calcolo come segue:

$$\begin{aligned}G(y) &= \mathcal{D}_0\sum_{k=1}^{\infty}\binom{x+k}{k}\frac{k}{1-y}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^k\\ &= \mathcal{D}_0\frac{1+x}{1-y}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{x+k}{k-1}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^k\\ &= \mathcal{D}_0\frac{(1+x)y}{(1-y)^2}\Big(\frac{1-y}{1-2y}\Big)^{2+x}\\ &= \frac{y}{(1-2y)^2}\Big\{1 + \ln(1-y) - \ln(1-2y)\Big\}.\end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà delle funzioni generatrici abbiamo

$$[y^n]\frac{y\ln(1-y)}{(1-2y)^2} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{j}2^{n-j}$$

$$[y^n]\frac{-y\ln(1-2y)}{(1-2y)^2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{j}2^{n}.$$

Ne segue che

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}H_k = [y^n]G(y) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n}2^n\frac{n-j}{j} - \sum_{j=1}^{n}2^{n-j}\frac{n-j}{j} + n2^n\right\}$$

$$= 2^{n-1} - \frac{1}{2} + nH_n2^{n-1} - 2^{n-1}n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j2^j}.$$

Così abbiamo fornito una dimostrazione di (3.7b) tramite le funzioni generatrici.

5. – Ulteriori Identità dei Numeri Armonici.

5.1. – *Numeri Euleriani e numeri armonici.*

Nello studio delle identità sui numeri armonici abbiamo trovato un interessante legame fra i numeri euleriani A_{mn} e i numeri armonici, dove per numeri euleriani si intendono i numeri della forma

$$A_{mn} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m+1}{k}(n-k)^m.$$

Se nell'identità di Worpitzky, che lega le potenze ordinarie con i coefficienti binomiali:

$$x^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{x+k-1}{m}A_{mk}$$

sostituiamo x con $x+m+1$, si ha

$$(x+m+1)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{x+k+m}{m}A_{mk}.$$

Applicando infine l'operatore $\mathcal{D}_0$ a quest'ultima identità, si ottiene la relazione

$$m(m+1)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m}\{H_{m+k}-H_k\}\binom{k+m}{m}A_{mk}. \tag{5.1}$$

5.2. – *Numeri di Stirling e numeri armonici* [15, § 6.1].

Per un numero complesso x, definiamo il fattoriale crescente e decrescente rispettivamente come segue:

$$(x)_0 = 1 \quad \text{e} \quad (x)_n := x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \text{ per } n = 1, 2, \cdots$$

$$\langle x\rangle_0 = 1 \quad \text{e} \quad \langle x\rangle_n := x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \text{ per } n = 1, 2, \cdots.$$

In riferimento ai numeri positivi di Stirling di prima specie $s(n,k)$ vale la formula

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k. \tag{5.2}$$

Se $\ell \in \mathbb{N}$ applichiamo l'operatore $\mathcal{D}_x$ in $x = \ell$ e abbiamo la formula

$$(\ell)_n\{H_{n+\ell-1} - H_{\ell-1}\} = \sum_{k=1}^{n} ks(n,k)\ell^{k-1}. \tag{5.3}$$

Anche per $\ell = 1$ il risutato corrispondente non è banale:

$$n!H_n = \sum_{k=1}^{n} ks(n,k). \tag{5.4}$$

Ricordiamo inoltre la definizione dei Numeri di Stirling di seconda specie $\mathrm{S}(n,k)$:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k}\mathrm{S}(n,k)(x)_k. \tag{5.5}$$

Se procediamo come prima applicando $\mathcal{D}_\ell$ per $\ell \in \mathbb{N}$ otteniamo

$$n\ell^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k}\mathrm{S}(n,k)\{H_{k+\ell-1} - H_{\ell-1}\}(\ell)_k \tag{5.6}$$

che è la relazione duale di (5.3) secondo le inversioni di Stirling (cf. [15, Pag. 310]).

5.3. – *Numeri di Lah e numeri armonici.*

Richiamiamo la seguente relazione che lega i numeri di Lah (cfr. [11, Pag. 156]) ai fattoriali:

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n} L_{n,k}\langle x\rangle_k \quad \text{con} \quad L_{n,k} = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}. \tag{5.7}$$

Applicando l'operatore $\mathcal{D}_\ell$ otteniamo una relazione tra i numeri di Lah e i numeri armonici:

$$(\ell)_n\{H_{n+\ell-1} - H_{\ell-1}\} = \sum_{k=1}^{n}\{H_\ell - H_{\ell-k}\}L_{n,k}\langle\ell\rangle_k, \qquad (\ell \geq n). \tag{5.8}$$

5.4. – *Due identità di Le Jen-Shoo.*

Richiamiamo le due identità di Le Jen-Shoo (1867):

$$\begin{cases} \binom{x+m+n}{m}\binom{x+m+n}{n} = \sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{x+m+n+k}{m+n} \\ \\ \binom{y+m}{m}\binom{y+n}{n} = \sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{y+m+n-k}{m+n}. \end{cases}$$

Applicando l'operatore di derivazione $\mathcal{D}_0$ otteniamo rispettivamente dalla prima:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{m+n+k}{k}\{H_{m+n-k} - H_k\} \tag{5.9a}$$

$$= \binom{m+n}{m}^2\{2H_{m+n} - H_n - H_m\} \tag{5.9b}$$

mentre dalla seconda:

$$\sum_{k>0}\frac{(-1)^k}{k}\frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} = H_{m+n} - H_m - H_n. \tag{5.10}$$

5.5. – *Altri Esempi.*

Effettuando delle sostituzioni opportune sui parametri delle identità binomiali presenti nel libro di Gould [14] e applicando ad esse l'operatore $\mathcal{D}_0$, si possono stabilire numerose identità concernenti i numeri armonici. Selezioniamo a tal fine trenta identità esemplari che vengono tabulate, dove la voce "*Note*" si riferisce al numero dell'equazione riportata nel libro di Gould [14].

The harmonic number identities $\sum_{k=0}^{n} A(n,k) = B(n)$:

No	$A(n,k)$	$B(n)$	Nota
1	$(-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} H_{n+k}$	$\frac{H_n}{2} - \frac{1}{4n}$ $\quad (n \geq 1)$	4.30
2	$\binom{2n}{2k}\{2H_{2k} - H_k\}$	$2^{2n-1}H_{2n-1}$ $\quad (n \geq 1)$	3.26
3	$\binom{1+2n}{2k}\{2H_{2k} - H_k\}$	$2^{2n}H_{2n}$	3.27
4	$\binom{2n}{1+2k}\{2H_{1+2k} - H_k\}$	$2^{2n-1}\{H_{2n-1} + \frac{1}{n}\}$ $\quad (n \geq 1)$	3.158
5	$\binom{1+2n}{1+2k}\{2H_{1+2k} - H_k\}$	$2^{2n}\{H_{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\}$	3.149
6	$\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$ $\quad (k \neq 0)$	$2H_n$	3.122
7	$(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{n+k-1}{k}H_k$	$\frac{1}{n}$ $\quad (n \geq 1)$	3.123
8	$(\frac{-1}{2})^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\{2H_{n+k} - H_k\}$	$\begin{cases} \frac{(-1)^m}{4^m}\binom{2m}{m}\{2H_{2m} - H_m\}, & n = 2m; \\ 0, & n - \text{dispari.} \end{cases}$	3.61
9	$2\binom{2n}{2k}^2 H_{2k}$	$\binom{4n}{2n}\{2H_{2n} - H_{4n}\} + \frac{(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}\{H_{2n} + H_n\}$	3.9
10	$2\binom{2n}{1+2k}^2 H_{1+2k}$	$\binom{4n}{2n}\{2H_{2n} - H_{4n}\} - \frac{(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}\{H_n + H_{2n}\}$	3.10
11	$\binom{1+2n}{2k}\binom{1+2n}{1+2k}H_{2k}$	$\frac{1}{2}\binom{2+4n}{2n}\{H_{2n} + H_{2n+1} - H_{4n+2}\}$ $+ \frac{(-1)^n}{4}\binom{1+2n}{n}\{H_n + H_{2n+1}\}$	3.11
12	$2^{2n-2k}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}H_k$	$\binom{4n}{2n}\{3H_{2n} - 2H_{4n}\}$	3.175
13	$2^{1+2n-2k}\binom{1+2n}{2k}\binom{2k}{k}H_k$	$\binom{2+4n}{1+2n}\{3H_{1+2n} - 2H_{2+4n}\}$	3.176
14	$(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}^2\{H_k + H_{2n-k}\}$	$\binom{2n}{n}^2 H_n + \binom{2n}{n}\frac{H_n + H_{2n}}{2}$	3.35
15	$(-2)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\{3H_k - 2H_{2k}\}$	$\begin{cases} \binom{2m}{m}H_m, & n = 2m; \\ 0, & n - \text{dispari.} \end{cases}$	3.62
16	$\binom{2n}{2k}\binom{2n+k-1}{2n-1}\{H_{2n+k-1} - H_{2k}\}$	$\frac{1}{2}\binom{4n}{2n}\{H_{4n-1} - H_{2n}\}$	3.24
17	$\binom{2n}{2k}\binom{2n+k-1}{2n-1}\{H_{2n+k-1} - H_k\}$	$2\binom{4n-1}{2n}\{H_{4n-1} - H_{2n}\}$	3.174
18	$\binom{2n}{2k}\binom{2n+k-1}{2n-1}\{H_{2k} - H_k\}$	$\binom{4n-1}{2n}\{H_{4n-1} - H_{2n}\}$	3.24 3.174
19	$\binom{2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n-1}\{H_{2n+k} - H_{1+2k}\}$	$\binom{4n}{1+2n}\{H_{4n} - H_{2n}\} - \frac{1}{1+2n}$	3.25
20	$\binom{2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n-1}\{H_{2n+k} - H_{k+1}\}$	$2\binom{4n}{2n+1}\{H_{4n} - H_{2n+1}\}$	3.172
21	$\binom{2n}{1+2k}\binom{2n+k-1}{2n-1}\{H_{2n+k-1} - H_k\}$	$2\binom{4n-2}{2n-1}\{H_{4n-2} - H_{2n-1}\}$	3.172
22	$\binom{2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n-1}\{H_{1+2k} - H_{k+1}\}$	$\binom{4n}{2n+1}\{H_{4n} - H_{2n+1}\} + \frac{1}{1+2n}\{1 - \binom{4n}{2n+1}\}$	3.25 3.172

23	$\binom{1+2n}{2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{2n+k}-H_{2k}\}$	$\binom{1+4n}{1+2n}\{H_{1+4n}-H_{1+2n}\}$	3.25
24	$\binom{1+2n}{2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{2n+k}-H_{k}\}$	$2\binom{1+4n}{1+2n}\{H_{1+4n}-H_{1+2n}\}$	3.173
25	$\binom{1+2n}{2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{2k}-H_{k}\}$	$\binom{1+4n}{1+2n}\{H_{1+4n}-H_{1+2n}\}$	3.25 3.173
26	$\binom{1+2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{2n+k}-H_{1+2k}\}$	$\binom{4n}{2n}\{H_{4n}-H_{1+2n}\}$	3.24
27	$\binom{1+2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{2n+k}-H_{k}\}$	$2\binom{4n}{2n}\{H_{4n}-H_{2n}\}$	3.171
28	$\binom{1+2n}{1+2k}\binom{2n+k}{2n}\{H_{1+2k}-H_{k}\}$	$\binom{4n}{2n}\{H_{4n}-H_{2n}+\frac{1}{1+2n}\}$	3.24 3.171
29	$(-1)^k\binom{2m}{k}^3H_k \qquad (n=2m)$	$\frac{(-1)^m}{2}\binom{3m}{m,m,m}\{H_m+2H_{2m}-H_{3m}\}$	6.5
30	$(-1)^k\binom{2n+2k}{n+3k}\binom{n+3k}{2k}\{2H_{2n+2k}-H_{n+k}\}$ $(-1)^k\binom{2n+2k}{1+n+3k}\binom{1+n+3k}{1+2k}\{H_{n+k}-2H_{2n+2k}\}$	$\{2^{1+2n}H_{2n}(-1)^n\}$ $\{2^{2n}H_{2n-1}(-1)^n\}$	3.63

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AHLGREN - S. B. EKHAD - K. ONO - D. ZEILBERGER, *A binomial coefficient identity associated to a conjecture of Beukers*, The Electronic J. Combinatorics, **5** (1998), #R10.

[2] S. AHLGREN - K. ONO, *A Gaussian hypergeometric series evaluation and Apéry number congruences*, J. Reine Angew. Math., **518** (2000), 187-212.

[3] G. E. ANDREWS - K. UCHIMURA, *Identities in combinatorics IV: differentation and harmonic numbers*, Utilitas Mathematica, **28** (1985), 265-269.

[4] A. T. BENJAMIN - G. O. PRESTON - J. J. QUINN, *A Stirling Encounter with Harmonic Numbers*, Mathematics Magazine, **75:2** (2002), 95-103.

[5] F. BEUKERS, *Another congruence for Apéry numbers*, J. Number Theory, **25** (1987), 201-210.

[6] W. CHU, *Binomial convolutions and hypergeometric identities*, Rend. Circolo Mat. Palermo, XLIII (1994, serie II), 333-360.

[7] W. CHU, *A Binomial Coefficient Identity Associated with Beukers' Conjecture on Apéry numbers*, The electronic journal of combinatorics, **11** (2004), #N15.

[8] W. CHU, *Harmonic Number Identities and Hermite-Padé Approximations to the Logarithm Function*, Journal of Approximation Theory, **137:1** (2005), 42-56.

[9] W. CHU - L. DE DONNO, *Hypergeometric Series and Harmonic Number Identities*, Advances in Applied Mathematics, **34:1** (2005), 123-137.

[10] W. CHU - L. DE DONNO, *Transformation on infinite double series and applications to harmonic number Identities*, AAECC: Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **15:5** (2005), 339-348.

[11] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, Dordrecht-Holland, The Netherlands, 1974.

[12] K. DRIVER - H. PRODINGER - C. SCHNEIDER - J. WEIDEMAN, *Padé approximations to the logarithm II: Identities, recurrences and symbolic computation*, To appear in "The Ramanujan Journal".

[13] K. DRIVER - H. PRODINGER - C. SCHNEIDER - J. WEIDEMAN, *Padé approximations to the logarithm III: Alternative methods and additional results*, To appear in "The Ramanujan Journal".
[14] H. W. GOULD, *Combinatorial Identities*, Morgantown, 1972.
[15] R. L. GRAHAM - D. E. KNUTH - O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Massachusetts, 1989.
[16] R. LYONS - P. PAULE - A. RIESE, *A computer proof of a series evaluation in terms of harmonic number*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., **13:4** (2002), 327-333.
[17] R. LYONS - J. STEIF, *Stationary determinantal process: Phase multiplicity, Bernoullicity, entropy and domination*, Duke Math. J., **120:3** (2003), 515-575.
[18] E. MORTENSON, *Supercongruences between truncated* ${}_2F_1$ *hypergeometric functions and their Gaussian analogs*, Trans. Amer. Math. Soc., **355:3** (2002), 987-1007.
[19] E. MORTENSON, *A supercongruence conjecture of Rodriguez-Villegas for a certain truncated hypergeometric function*, J. of Number theory, **99** (2003), 139-147.
[20] ISAAC NEWTON, *Mathematical Papers: Vol. III*, D. T. Whiteside ed., Cambridge Univ. Press, London, 1969.
[21] P. PAULE - C. SCHNEIDER, *Computer proofs of a new family of harmonic number identities*, Adv. in Appl. Math., **31** (2003), 359-378.
[22] J. A. C. WEIDEMAN, *Padé approximations to the logarithm I: Derivation via differential equations*, Quaestiones Mathematicae, **28** (2005), 375-390.

Wenchang Chu - Livia De Donno: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Lecce, Lecce-Arnesano P.O.193, 73100 Lecce, Italia
email: chu.wenchang@unile.it

Pervenuta in Redazione
il 24 maggio 2005 e in forma rivista il 20 gennaio 2006