Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Salvatore Coen

Cominciamo Dal Punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria) di Vinicio Villani, Pitagora Editrice, 2006 (PRESENTAZIONE)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.3, p. 603–611.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_3_603_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Dicembre 2007, 603-611

PRESENTAZIONI

Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica **(*Geometria*)** di Vinicio Villani, collana «Complementi di Matematica per l'indirizzo didattico», N. 15. Pitagora Editrice Bologna, 2006, pp. 311, €. 22.

Presentazione di Salvatore Coen

Il volume è la naturale continuazione di *Cominciamo da Zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica* (*Aritmetica ed Algebra*) dello stesso Autore (vedi recensione su questo Bollettino, aprile 2004, 173-183). Anche il volume che stiamo esaminando vuole essere essenzialmente un *libro dei perchè* ed ancora, come nel caso precedente, i titoli dei capitoli sono posti in forma interrogativa e tutta la trattazione è impostata come una serie di risposte a domande scelte tra le più frequenti o tra le più interessanti riguardo all'insegnamento della Geometria nelle scuole secondarie.

Le analogie potrebbero continuare, ma il lettore sa bene che i problemi del buon insegnante di Geometria sono assai diversi da quelli del buon insegnante di Aritmetica ed Algebra. Anzitutto, ovviamente, per la differenza profonda degli argomenti. Vi sono anche ben altri motivi. Uno è la crisi della Geometria intesa come disciplina autonoma. Questa disciplina che per più di duemila anni è stata alla base di quasi tutta la speculazione matematica, ora, quando la visione dei fondamenti è profondamente diversa, sembra spostata, in qualche modo, alla periferia del grande nuovo edificio. Nello stesso tempo, tutti sappiamo che la drastica scelta di evitare l'insegnamento della Geometria nelle scuole secondarie equivarrebbe al suicidio di tutto l'insegnamento matematico perchè porterebbe alla scomparsa dell'intuizione spaziale, alla perdita dell'esercizio al ragionamento rigoroso capace di spiegare, sviluppare e «controllare» l'intuizione. La realtà è che la Geometria è ben viva e vitale ed è parte essenziale del corpo matematico, ma che è profondamente mutata la natura dei suoi fondamenti. Questi presuppongono, ora, conoscenze più avanzate; ciò rende difficile il suo insegnamento. Si tratta di difficoltà alle quali francamente sembra che ancora non si sia riusciti a porre un buon rimedio definitivo. Sia chiaro: questo non è un problema specifico alla scuola italiana; basta un breve sguardo su come viene insegnata la Geometria in paesi diversi per vedere trattazioni assai diversificate, tentativi interessanti, ma tutti soggetti a critiche giustificate. È difficile persino accordarsi su quali argomenti privilegiare ed anche su come trattarli. Lo stesso Autore dopo avere specificato che *la geometria comprende tanti aspetti che è impossibile (e forse anche inutile) stilarne una lista completa* ne illustra una lista (incompleta) di almeno sei diversi aspetti.

Per esaminare il contributo portato al problema dal presente volume, per sua natura abbastanza eclettico, dobbiamo descriverlo approfonditamente, scusandoci con i lettori che potrebbero trovarne motivo di noia. Subito appaiono le differenze con il volume precedente. I capitoli sono 22 contro i precedenti 35; le pagine 311 contro le precedenti 216. Capitoli, quindi, molto più densi.

I primi otto capitoli si rifanno tutti, più o meno direttamente, agli *Elementi* di Euclide, non con lo scopo di descrivere minuziosamente la *Bibbia dei Geometri*, ma con quello di ricordarne i fondamenti e di chiarirne punti oscuri e discuterli dal punto di vista didattico. Titolo indicativo quello del terzo capitolo *Anche nei trattati più rigorosi di Geometria si possono leggere frasi del tipo: «Come si vede dalla figura...». Perchè in alcuni casi questo riferimento all'evidenza visiva viene considerato lecito ed in altri no?* La trattazione dell'assioma delle parallele è assai completa. Sono riprodotte in appendice le assiomatiche di Hilbert (per lo spazio) e quella di Choquet (per il piano) e questi sistemi assiomatici sono ampiamente discussi, anche dal punto di vista didattico.

Alcuni capitoli trattano del problema della misura. Si parte dalla nozione di lunghezza per i segmenti per estendere tale nozione alle curve «sufficientemente regolari» e, poi, pervenire all'area delle superficie ed infine al volume dei solidi. Trattando dei poligoni viene indicata per sommi capi – ma sempre rigorosamente – la teoria della equiscomponibilità ed anche quella dell'equicompletamento, insistendo in ogni caso sui teoremi di addittività delle misure e di invarianza del rapporto delle misure. Questi capitoli permettono una discussione sul numero π e permettono anche una discussione storica dei risultati in argomento, da Archimede a Bonaventura Cavalieri, da Cavalieri al calcolo integrale classico, senza tralasciare le loro difficoltà.

Un'attenzione particolare è dedicata agli angoli. Per gli angoli vengono identificate ben cinque definizioni diverse, non equivalenti e che, spesso confondendosi tra loro nelle trattazioni usuali, complottano a rendere poco intelligibili i risultati. Precisamente si parla di angolo elementare convesso non orientato, di angolo elementare (convesso o concavo) non orientato, di angolo elementare (convesso o concavo) orientato, di angolo generalizzato orientato, di angolo generalizzato non orientato. Basta la domandina (un poco cattivella) proposta a pag. 150: *quali e quanti angoli vedete in questa figura?* per esemplificare.

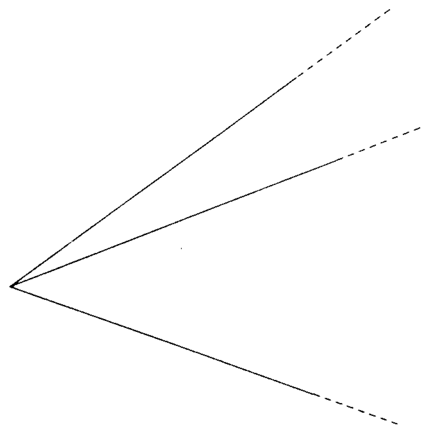

Fig. 1. – Quali e quanti angoli vedete in questa figura? Da V. Villani, *Cominciamo dal punto*, p. 150. Per cortesia Pitagora Editrice.

D'altra parte, l'Autore mostra come queste varie nozioni abbiano tutte una loro utilità in problemi diversi, anche nella pratica di tutti i giorni. Impariamo, tra l'altro, anche un poco di linguaggio marinaresco perchè l'autore ci mostra l'uso della geometria nel definire le *strambate* di una nave che *cambia le mura*.... Dopo avere sviluppato questi varii concetti nel piano, si passa allo studio spaziale degli angoli fra due rette o tra retta e piano o tra piani o semipiani.

Non poteva mancare una trattazione dei metodi analitici che, infatti, vengono introdotti, verso la metà del volume, mediante la domanda: *Quali sono i pregi di una trattazione della geometria per via analitica? E quali gli inconvenienti?* Troviamo subito indicazioni preziose, prime osservazioni sui sistemi di coordinate non necessariamente ortogonali o monometrici e sul mantenimento delle proprietà geometriche al variare di questi sistemi. Seguono due capitoli un poco curiosi. La domanda è se sia possibile *dimostrare i teoremi di Pitagora e di Talete per via analitica*. Le risposte sono originali e completate da dimostrazioni limpide (ma a volte con trucco), certamente assai utili all'insegnante. Il *teorema di Erone* al quale spesso i nostri libri dedicano scarsa importanza, qui risulta ampiamente trattato. È possibile una sorta di teorema di Erone per i quadrilateri? Certo che no, in generale; ma se ci si limita a quadrilateri iscrivibili in una circonferenza, una bella formula «tipo Erone» la si trova. Le implicazioni di queste formule fuori dalla matematica sono molteplici, dall'agrimensura all'ingegneria. Ecco uno dei molti, anzi moltissimi, spunti che V. Villani suggerisce per rinfrescare l'insegnamento della Geometria. Una bella trattazione dei cosiddetti problemi insolubili, come la trisezione dell'angolo o la duplicazione del cubo si trova nel diciassettesimo capitolo. Al solito, questo consente spunti per andare oltre e parlare, questa volta, di strumenti meccanici, più complessi della riga e dell'ordinario compasso, atti a tracciare curve: viene ricordato il teorema di Kempe (1875) secondo il quale mediante sistemi articolati è sempre possibile tracciare (tratti limitati) di qualunque curva algebrica.

La trattazione delle cosiddette *trasformazioni geometriche* nelle scuole secondarie è relativamente recente. Nel libro si parla di affinità, isometrie e similitudini e proiettività. Dopo avere introdotto, mediante le loro caratterizzazioni geometriche, i gruppi delle affinità, delle similitudini e delle isometrie, queste a loro volta vengono classificate. Si mettono, così, in evidenza le classificazioni delle isometrie del piano e dello spazio, le classificazioni e la struttura del gruppo delle similitudini del piano e dello spazio. Nella attuale trattatistica scolastica, l'Autore riconosce almeno tre posizioni diverse: la più moderna è probabilmente quella che privilegia le dimostrazioni basate sull'uso delle simmetrie e delle similitudini rispetto alle dimostrazioni tradizionali. A questo punto è naturale rifarsi al programma di Erlangen e tale richiamo è illustrato con molta chiarezza. Gli esempi spiegano meglio delle parole: la nozione di «quadrato dal lato unitario» è propria della geometria metrica, ma non di quella delle similitudini e quindi non è una nozione affine; la nozione di «quadrato» è propria della geometria delle similitudini e quindi della geometria metrica, ma non della geometria affine; la nozione di «parallelogramma» appartiene alla geometria affine e quindi anche alle altre due. Non è detto che la trattazione della geometria attraverso le trasformazioni geometriche sia, tuttavia, quella da privilegiare. L'Autore elenca minuziosamente i pro ed i contro. L'importante è lavorare con molta prudenza e senso dell'equilibrio *per non andare incontro a delusioni ed insuccessi, come in passato è già avvenuto per altre innovazioni curriculari, introdotte con troppa faciloneria nelle nostre scuole*.

Probabilmente il capitolo più godibile è il diciannovesimo che conclude il discorso sulle trasformazioni geometriche, nonostante che il titolo *Ha senso considerare trasformazioni geometriche fra spazio e piano? E fra due piani distinti?* non sia propriamente entusiasmante. Vi si parla delle *proiezioni centrali e* delle *proiezioni parallele* e lo si fa in termini geometrici, avendo poi cura di esaminarne il lato analitico. Qui il lettore può divertirsi a proiettare figure solide su piani e scriverne le equazioni. Nel secondo paragrafo si classificano le proiezioni t: $\alpha \rightarrow \pi$ ove π è il piano di proiezione ed α è un piano dello spazio, secondo che t sia centrale o parallela e che α, π siano paralleli o non necessariamente tali. In questo modo, meglio si può comprendere il discorso sulle trasformazioni geometriche che ora, finalmente, sono inquadrate sia storicamente che nelle loro applicazioni extra- matematiche. L'Autore ci mostra un «serbatoio» di idee, di metodi e di possibili begli esercizi poco sfruttato nei testi tradizionali e, forse, per nulla sfruttato nell'effettivo insegnamento.

Se la ricerca di una buona definizione veramente «definitiva» ed elementare di angolo aveva avuto un esito negativo, è da presumere che non molto di più si possa ottenere parlando di poligoni. Il lettore esamini la tabella seguente, riportata nel libro, e si domandi quante tra le figure siano rappresentative di poligoni.

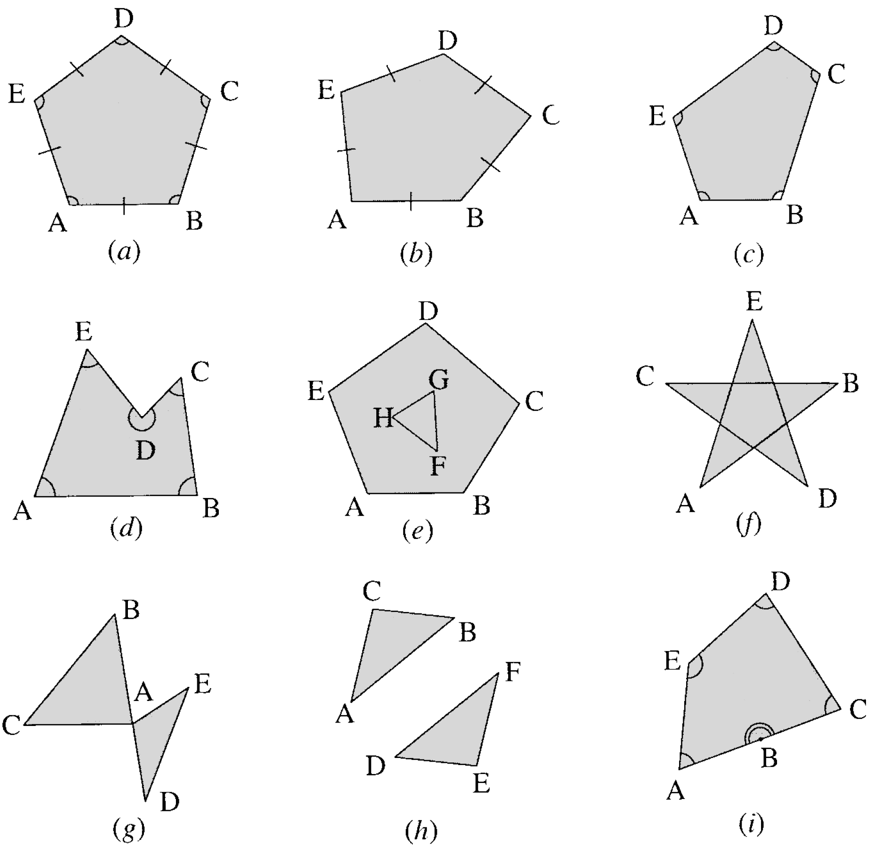

Fig. 2. – Quali tra queste figure rappresentano poligoni? Da V. Villani, *Cominciamo dal punto*, p. 242. Per cortesia Pitagora Editrice.

Anche la definizione di poligono appare, quindi, non scontata. Si possono contare nel volume almeno nove proposte diverse (oltre, s'intende, alle definizioni generalmente accettate come quella di «poligono regolare»). In realtà, l'autore propone per i poligoni un «percorso scolastico» preciso Affrontare le tematiche seguenti: isometrie e simmetrie dei poligoni, tassellazioni del piano mediante poligoni, risultati preparatori alla formula di Eulero. Se poi, di volta in volta, la nozione di poligono che è coinvolta non è sempre la stessa, poco male. Così viene data una classificazione dei quadrilateri convessi P basandosi sulle loro simmetrie assiali e centrali. Ad esempio P è un rombo se e solo se possiede due simmetrie assiali con assi passanti per le coppie di vertici opposti (ed una simmetria centrale). Si dimostra che per ogni poligono semplice P e per ogni sua possibile tassellazione finita in poligoni semplici vale la relazione $F - S + V = 1$ ove F, S, V sono rispettivamente i numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici del poligono. La dimostrazione è chiarissima, ma manca di dettagli «non irrilevanti» e il lettore è invitato a colmare le lacune. Quando si passa alla nozione di poliedro evidentemente i problemi permangono e quindi abbiamo ben altre sette diverse proposte per questa nozione. Anche per i poliedri vengono studiate le loro isometrie e simmetrie. Per i poliedri convessi viene fornita la traccia della dimostrazione della formula di Eulero $F - S + V = 2$. Ancora si tratta di una dimostrazione assai brillante che deve essere, tuttavia, completata nei suoi particolari dal lettore. La formula di Eulero invita alla Topologia algebrica e l'Autore enuncia, infatti, il risultato più generale per cui se un poliedro possiede p buchi, allora si ha $F - S + V = 2 - 2p$.

L'ultimo capitolo è certo il più impegnativo. Da quando si è compreso che esistono geometrie non euclidee, si è sviluppato nei didatti il desiderio di illustrarle ai giovani. Parlare a giovani di geometria ellittica o di geometria iperbolica significa esporsi a molte difficoltà: viene a mancare la «componente intuitiva figurale», mancano «applicazioni a problemi di concreto interesse per la nostra vita normale quotidiana». Di gran lunga meglio evitare *velleitarie fughe in avanti basate su una conoscenza superficiale di brandelli delle geometrie non euclidee*. Molto meglio, invece, sviluppare la geometria sferica (detta anche biellittica). Questa fornisce un esempio ricchissimo di concetti interessanti, un esempio concreto ed anche ricco di applicazioni. In tal modo, si introducono e si studiano i triangoli sferici riuscendo anche a dare un chiaro cenno di dimostrazione al fatto che per la somma σ delle ampiezze α, β, γ degli angoli interni di un triangolo sferico ABC l'eccedenza $\varepsilon = \sigma - \pi > 0$ è proporzionale all'area di ABC; in questo caso si possono caratterizzare le geodetiche, acquisendo ottimi esempi per una comprensione più approfondita in casi più generali. Con una buona, anche se elementare, conoscenza dell'argomento, diventa più facile comprendere anche i problemi concreti dei cartografi.

Abbiamo, così, concluso questa carrellata sul contenuto del volume.

Si sarà notato che il libro tende a trattare insieme, ovvero l'uno di seguito all'altro, argomenti affini di geometria piana e spaziale, come è il caso degli angoli e degli angoloidi, dei poligoni e dei poliedri. Questa non è una scelta «fusionista»; le mode passano, ma quando lasciano qualcosa di buono, questo deve essere sfruttato; effettivamente tale scelta si rivela opportuna. Bisogna anche dire che la trattazione del volume si mantiene molto sensibile alla rappresentazione concreta delle figure. Frequentissime sono le esortazioni a farsi dei modelli con carta, plastica, elastici, legno o altro materiale di ciò che si studia, ovvero a sapere cogliere da oggetti che ci circondano qualche modello interessante oppure anche a lavorare con il computer per rappresentare modelli concreti. Certo, questo non è un libro di software geometrico, ma anche se l'autore si schernisce, la sensibilità mostrata verso i sussidi informatici nell'insegnamento della Geometria è evidente.

Tutta la trattazione è densa di suggerimenti didattici. Di più, alcuni capitoli si concludono con un paragrafo di esplicite *considerazioni didattiche*. L'autore insiste sul fatto che non è opportuno ed è anzi controproducente dimostrare «tutto» ed allora, pur sempre nell'ottica di lasciare le scelte all'insegnante, non si tira mai indietro a concretizzare le sue idee con esempi didattici. Per esempio, con un elenco dei teoremi di geometria euclidea piana, alle cui dimostrazioni egli pensa che non si debba rinunciare (in tutto una quindicina), insieme con dimostrazioni varie. Questo lascia naturalmente ampia scelta al docente per la trattazione del resto della teoria. Assai opportune risultano certe dimostrazioni particolarmente «evidenti» in grado di sostituire alcune dimostrazioni usuali particolarmente pesanti; peccato che le prove evidenti siano errate! È un ottimo metodo per chiarire i punti delicati di certe prove. Quante volte un insegnante non si è posto il dubbio: «Ma perchè farla così lunga con questa dimostrazione; perchè non vedere subito che...»? In vari di questi casi qui si trova la risposta: spesso si tratta di insidiosi problemi logici.

Di fronte alla natura eclettica della geometria attuale; anzi, al fatto che «esistono molteplici geometrie» variamente interconnesse tra loro, l'autore reagisce riuscendo a diminuire il numero dei capitoli rispetto al testo precedente (e il libro non è più solo un libro dei perché). È questo un risultato da non sottovalutare perchè indica un grande sforzo per fornire agli argomenti una visione unitaria e quindi di ampio respiro.

Si tratta di un testo che condensa un'ampia quantità di argomenti, tra loro interconnessi, ma differenti, denso com'è di idee, di metodi, di spunti, trattati con rigore ed insieme con chiarezza. Il testo riassume evidentemente lunga esperienza e lunga maturazione in merito e contiene molte parti del tutto originali. In conclusione: una impostazione originale, una trattazione pure originale nell'ambito della trattatistica seondaria attuale. Si può trovare una ispirazione di questo libro nel famoso Courant Robbins, *Cosa è la Matematica?*, ma completamente rivisitato da esperienza didattica concreta e dai tanti anni di ricerca didattica intercorsi. Lo scopo è aiutare gli insegnanti ed i futuri insegnanti a formare «teste ben fatte piuttosto che ben piene». Il pubblico cui è diretto sono, pertanto, gli insegnanti di Matematica, coloro che vogliono divenire tali (come i corsisti SSIS), studenti delle ultime classi secondarie, studenti universitari dei primi anni di corso di carattere scientifico. Ognuno lo può leggere in modo diverso. Molti di noi anche se non apparteniamo a queste categorie ne potremmo trarre insegnamento. L'indice potrebbe essere più completo. La veste tipografica è buona.

Salvatore Coen,
Dip. di Matematica, Università di Bologna
e-mail: coen@dm.unibo.it