Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Teresa Borgato

Tra teoria ed esperimenti: la deviazione dei gravi e la rotazione della Terra (1789-1805)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.3, p. 497–536.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_3_497_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Dicembre 2007, 497-536

Tra teoria ed esperimenti: la deviazione dei gravi e la rotazione della Terra (1789-1805)

MARIA TERESA BORGATO

In occasione dell'anno internazionale della fisica (2005), è stata avanzata la proposta di riprodurre a Bologna l'esperimento realizzato da Giambattista Guglielmini (1760-1817) più di due secoli fa nella Torre degli Asinelli, che è considerato la prima prova sperimentale della rotazione della Terra, dedotta dagli effetti della rotazione sui corpi terrestri, sessant'anni prima del celebre esperimento di Foucault. Proposto da Guglielmini nel 1789 alla comunità scientifica, esso richiese (1790-1792) anni di studio e di lavoro e la collaborazione di un gruppo di accademici e astronomi bolognesi, in concorrenza con altre sedi, ed il successo, preceduto da molti tentativi falliti, fu possibile per la tenacia e la sagacia del suo autore. In realtà l'esperimento di Guglielmini, basato sulla deviazione di un grave in caduta libera rispetto alla verticale, è molto difficile a realizzarsi per l'esiguità delle deviazioni in rapporto all'altezza di caduta e le molte cause perturbatrici del moto, e anche in questa ultima circostanza è stato sostituito da un pendolo di Foucault eretto nella Chiesa di S. Petronio, per il quale le variazioni del piano di oscillazione si sommano, e possono essere osservate senza difficoltà anche da un profano.

L'esperimento di Guglielmini è stato oggetto di alcuni studi recenti, (1) sembra però opportuno approfondire gli aspetti della teoria matematica della deviazione, e la sua evoluzione nei cruciali

(1) Su Guglielmini, figura emergente nella cultura scientifica bolognese tra la fine del Settecento e il periodo napoleonico, si veda: Tabarroni [1983], Braccesi [1983], Bertoloni Meli [1992], Borgato [1996], Borgato-Pepe [1999], Fiocca [1998], ed inoltre il carteggio scientifico: Guglielmini [1994].

anni tra il 1789 e il 1805. Questo della deviazione dei gravi in effetti è uno degli esempi più notevoli di come ricerca teorica ed esperimenti siano due aspetti complementari: la teoria della deviazione infatti si è sviluppata per successive approssimazioni, parallelamente al progressivo affinamento delle tecniche di sperimentazione. (2)

Le teorie di Laplace e Gauss (1803-1804) e la memoria di Coriolis sul moto relativo (1835) furono precedute da una serie di tentativi incompleti, in cui si tenne progressivamente conto di variabili prima trascurate. Inoltre una certa ambiguità riguardava la definizione di deviazione, inizialmente considerata rispetto al raggio terrestre: questa non era osservabile non essendo possibile individuare il centro della Terra e gli esperimenti potevano solo misurare la deviazione del grave rispetto alla verticale indicata dal filo a piombo. Alla iniziale teoria molto semplificata di Guglielmini, di un campo gravitazionale uniforme, subentrò quindi la considerazione della curvatura terrestre e della deviazione verso sud (Bonati), poi quella della deviazione del filo a piombo e di una terra sferoidale (Guglielmini, Saladini) e quindi di un campo di forze centrale (Tadini). Variò progressivamente anche il modo di considerare la resistenza dell'aria, inizialmente considerata solo in opposizione alla caduta verticale, e poi anche al moto relativo verso est, e gli strumenti matematici, da esclusive considerazioni geometriche e meccaniche, all'uso del calcolo differenziale.

La questione della deviazione e la rotazione della Terra sono state sempre collegate, fin da quando Aristotele nel *De Coelo* ne traeva un argomento per contrastare la teoria pitagorica del moto di rotazione terrestre. Diceva infatti Aristotele che la Terra è immobile perché i corpi scagliati verso l'alto ricadono perpendicolarmente nello stesso punto: un proiettile lanciato verso l'alto e uno lasciato cadere da una certa altezza sono sue aspetti dello stesso fenomeno. L'argomento era stato poi ripreso dagli oppositori del sistema copernicano, come Tycho

(2) Sul problema della caduta dei gravi ricordiamo in particolare: Gilbert [1882], Hagen, [1911-12], Armitage [1947], Acloque [1982], Gapaillard [1988].

Brahe: un proiettile sparato da un cannone sarebbe dovuto ricadere con uno spostamento occidentale, pari allo spazio percorso dal punto di lancio nel tempo della caduta.

Ma certamente questa affermazione è falsa: un proiettile lanciato dalla superficie terrestre subisce uno spostamento occidentale, ma molto inferiore a quello previsto dagli anticopernicani, e un grave che cade subisce uno spostamento orientale, dovuto alla differenza di velocità di rotazione del grave e del piede della perpendicolare, in quanto la velocità di rotazione varia proporzionalmente alla distanza dall'asse. Questo scostamento, trascurabile per piccole altezze, poteva diventare sensibile per altezze di torri, campanili, chiese, pozzi.

L'argomento era ben presente anche a Galilei, che nel *Dialogo* (giornata prima) pur ritenendo inosservabile ogni effetto della rotazione sui fenomeni che avvengono sulla superficie della Terra, ([3]) asserisce che, se per ipotesi una palla cadesse dal 'concavo' della Luna, poiché essa deve partecipare del moto della Terra, assieme a tutto il contenuto di quella sfera, è falso che essa debba restare indietro rispetto alla Terra, dovendo percorrere cadendo cerchi sempre minori, ma piuttosto dovrebbe anticipare la 'vertigine' della Terra.

La deviazione compare poi in modo esplicito nella polemica che oppose Stefano degli Angeli a Giambattista Riccioli da una parte e a Giovanni Alfonso Borelli dall'altra, e, forse a seguito della relazione sulla controversia che James Gregory pubblicò sulle *Philosophical Transactions*, si ritrova nella corrispondenza intercorsa tra Newton e Hooke degli anni 1689-90, che precedette la redazione dei *Principia*. Newton propose a Hooke di eseguire l'esperimento e da questo punto in poi la deviazione diventò piuttosto un argomento a favore, che contro il moto della Terra.

Gli esperimenti di Hooke, del tutto irrilevanti dal punto di vista dei risultati, poiché le modalità di esecuzione, come pure l'altezza di caduta, non potevano fornire una deviazione osservabile, rimasero, come tutta la discussione che ne seguì sulla traiettoria di un grave in

([3]) Tranne le maree.

caduta rispetto allo spazio assoluto, nei manoscritti che furono pubblicati solo alla fine dell'Ottocento.

Ecco allora Giambattista Guglielmini proporre nel 1789 un esperimento per dimostrare il moto di rotazione basato sulla deviazione. La situazione e i tempi erano favorevoli: Guglielmini, che si era addottorato il 6 agosto 1787, era un giovane allievo dell'Accademia delle Scienze di Bologna, la gloriosa istituzione marsiliana che affiancava agli insegnamenti universitari esercitazioni pratiche e propri cicli di lezioni teoriche. Al tempo di Guglielmini erano state rinnovate le attrezzature e riformati gli insegnamenti: la fisica era stata divisa nelle due cattedre di fisica generale e particolare, che comprendeva anche le applicazioni alla astronomia; gli strumenti astronomici e i laboratori di fisica si arricchirono con l'acquisto di tutta la collezione Cowper, comprendente 400 macchine per la sola fisica (1790), altri strumenti astronomici furono commissionati ai Dollond di Londra nel 1788. L'osservatorio, eretto già nel 1726 a Palazzo Poggi, era allora diretto da Petronio Matteucci.

Tra i docenti di Guglielmini all'Università vi furono probabilmente Sebastiano Canterzani, che in quegli anni insegnava ottica e matematica, Petronio Matteucci che insegnava astronomia, e Girolamo Saladini che insegnava geometria analitica. All'Accademia uno dei due insegnamenti di fisica era pure ricoperto da Sebastiano Canterzani, che fu per Guglielmini il principale interlocutore scientifico e punto di riferimento nella fase di avvio alla ricerca.

Gli interessi scientifici di Guglielmini si erano indirizzati quasi subito alla astronomia fisica: la sua tesi di laurea come pure due letture accademiche furono dedicate alla precessione degli equinozi e al fenomeno della nutazione, che era stato annunciato da James Bradley nel 1748.

Anche la questione copernicana aveva avuto una evoluzione a metà del Settecento, quando Benedetto XIV aveva fatto togliere dall'*Indice* il canone generale di condanna di una qualsiasi opera che asserisse il moto della Terra, pur mantenendo la proibizione sul *De revolutionibus* di Copernico, sull'*Epitome* di Keplero e sul *Dialogo* di Galilei.

L'esperimento proposto nel 1789

Nel 1789 Guglielmini pubblicava a Roma un breve opuscolo, (4) suo primo lavoro a stampa, in cui proponeva un esperimento da condursi in S. Pietro, e forniva la previsione teorica del risultato. Perché a Roma?

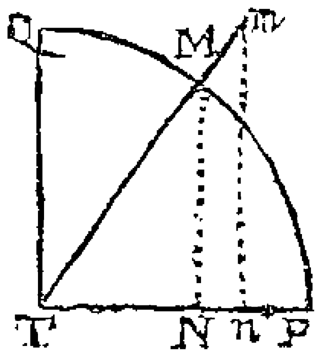
Innanzi tutto il nostro giovane scienziato aveva poche prospettive di carriera in seno all'Università e all'Accademia di Bologna (solo la ristretta cerchia degli accademici benedettini aveva diritto ad una rendita) e non era di famiglia facoltosa. Guglielmini, che aveva preso gli ordini nel 1783, si era perciò trasferito a Roma alla fine di novembre 1788 al seguito del cardinale legato di Bologna Ignazio Boncompagni, divenuto Segretario di Stato, che gli aveva offerto un impiego di tutore di un suo pronipote e di consulente scientifico per i propri studi di matematica, garantendogli tutti i mezzi per poter continuare le indagini scientifiche.

La cupola di S. Pietro, tra l'altezza massima del cupolino e un punto di caduta sotto l'altare, nel sepolcro di S. Pietro, garantiva un dislivello di 380 piedi parigini, ossia circa 123 m. (5) Lo spazio chiuso e il raccoglimento della chiesa avrebbero protetto l'esperimento da fattori esterni.

Nella previsione di Guglielmini viene effettuata una approssimazione grossolana ma abbastanza naturale: in considerazione dello spazio limitato in cui avviene il fenomeno la gravità è supposta costante, la superficie terrestre è considerata una superficie piana, e la traiettoria è quindi approssimata da una parabola. La deviazione viene calcolata allora come lo spazio percorso con velocità uniforme data dalla differenza delle due velocità, del punto di sgancio e del piede della perpendicolare calata da quel punto.

(4) *Riflessioni sopra un nuovo esperimento in prova del diurno moto della Terra*, Roma, 1789.

(5) Un piede parigino corrispondeva a 32,484 cm ed era diviso in 12 pollici; ciascun pollice pari a 2,707 cm era diviso a sua volta in 12 linee.



T = centro della Terra
P = polo
TQ = raggio dell'equatore = r
TP = asse di rotazione
$Q\hat{T}M = q =$ latitudine
$mM = a$
u = velocità di rotazione del punto M
v = velocità di rotazione del punto m
$v - u$ = velocità di deviazione = Δu
t = tempo di caduta nel vuoto

$$(v-u)\,t = \Delta u \cdot t = \frac{a \cdot u}{r}$$

In presenza della resistenza dell'aria la formula della deviazione secondo Guglielmini diventa:

$$\Delta u \cdot (t+T) = \frac{a \cdot u}{r}(t+T)$$

dove il tempo di caduta $t + T$ è da misurarsi sperimentalmente.

Per l'altezza di 340 piedi parigini (110 m circa), corrispondente alla cupola di San Pietro, alla latitudine di S. Pietro in Roma (40°53′50″) risultava una deviazione di 6/5 di pollice (3,3 cm). ([6])

([6]) Guglielmini si basa qui non su misurazioni dirette ma sugli esperimenti condotti e pubblicati da John Theophilus Desaguliers, *Cours de physique expérimentale traduit de l'anglois par le R.P. Pezenas*, Paris, Rollin, Jombert, 1751 (1° ed. inglese 1725-27), vol. I.

L'esperimento in S. Pietro, fornendo la prova evidente della rotazione della Terra, avrebbe risolto definitivamente la controversia, permettendo al sistema copernicano di ritrovare «tra le filosofiche verità un pacifico luogo». Ma il progetto, che pure godeva dell'appoggio del cardinale Boncompagni, non fu portato a termine a Roma. Boncompagni, troppo progressista e soprattutto inviso ai grandi possidenti ed al clero per la sua riforma del catasto, fu sostituito dal cardinale Zelada e morì poco dopo.

Guglielmini tornò dunque a Bologna nel luglio del 1790 per preparare l'esperimento nella Torre degli Asinelli, con l'appoggio dell'Accademia delle Scienze e il finanziamento locale della Assunteria di Studio.

La polemica sulla deviazione meridionale

Nel frattempo però l'opuscolo di Guglielmini aveva avuto una rapida diffusione tra gli scienziati italiani: fu ristampato negli *Opuscoli scelti sulle scienze e sulle arti* (Milano, 1789), presentato all'Accademia delle Scienze di Bologna (3 dicembre 1789) ed ebbe favorevoli recensioni su riviste scientifiche italiane importanti, come il *Giornale de' letterati d'Italia* (Modena, 1790) e le *Effemeridi romane* (Roma, 1789).

La sperimentazione si allargava, come pure la discussione, ed entrava in campo la questione della deviazione meridionale.

Guglielmini stesso, riprendendo un passo di d'Alembert, aveva osservato marginalmente che il grave avrebbe anche deviato sensibilmente verso sud. Il ferrarese Teodoro Bonati (1724-1820), professore di meccanica e idrostatica all'Università, ritenendo che la deviazione orientale fosse troppo esigua per fornire una evidenza sperimentale del moto diurno della Terra, indagò l'entità della deviazione meridionale ed espose le sue conclusioni in una memoria che circolò manoscritta per alcuni mesi prima di essere pubblicata. ([7])

Bonati osservava che il piano del moto non è il piano del parallelo, ma

([7]) *Di un esperimento proposto per iscoprire se realmente la Terra stia quieta oppur si muova,* 1791.

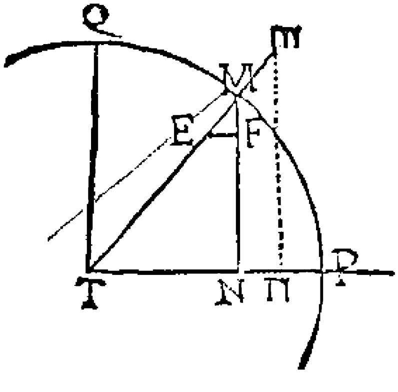
il piano diametrale individuato dalla velocità iniziale e dalla gravità diretta al centro della Terra.

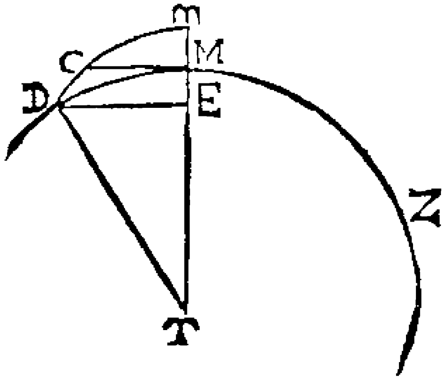
La terra era supposta sferica, la gravità costante per tutta l'altezza di caduta e la traiettoria ellittica del grave era comunque approssimata da una parabola, ma si teneva conto che nel tempo della caduta il piede della torre ruota verso est lungo il suo parallelo, mentre il grave che si muove nel piano diametrale atterra più a sud.

Mentre la deviazione lungo il parallelo era sempre ad est, massima all'equatore e nulla ai poli, la deviazione lungo il meridiano era sempre verso l'equatore, dunque a sud nell'emisfero boreale, mentre diventava nulla all'equatore e ai poli e assumeva valori rilevanti proprio alle nostre latitudini.

Vediamo il calcolo sviluppato da Bonati, in cui abbiamo modernizzato qualche notazione. Nella prima delle due figure seguenti *TQMP* rappresenta il quadrante di meridiano terrestre che taglia il piano dell'equatore in *TQ*; nella seconda figura è rappresentato il piano del moto del grave.

TQMP = quadrante di un meridiano terrestre
mM = altezza della torre
DMZ = cerchio massimo normale al meridiano in *M*
ME = incremento dello spazio percorso verticalmente dal grave, oltre l'altezza della Torre, a causa della curvatura della superficie terrestre
DE = distanza del punto di caduta dal meridiano iniziale





$TM = r$; $Mm = a$; $MC = c$; $MN = r \times \cos q$ (essendo q la latitudine)

α = angolo dell'arco descritto dal piede della Torre nel suo parallelo.

k = tempo per descrivere l'arco αr; g = durata del giorno medio

Posto $ME = x$, per le proprietà della parabola risulta: $DE^2 = c^2 \dfrac{a+x}{a} = 2rx - x^2$.

Trascurando termini dell'ordine di x^2 si ha: $ME = \dfrac{a\,c^2}{2ar - c^2}$ e $DE = c\sqrt{\dfrac{2ar}{2ar - c^2}}$;

dalla legge galileiana della caduta, il tempo per l'arco mD è dato da: $k\sqrt{\dfrac{a+x}{a}}$, pertanto: $\alpha = \dfrac{360°}{g}\,\dfrac{k\sqrt{a+ME}}{\sqrt{a}}$.

La deviazione orientale di Guglielmini viene corretta, calcolandola come differenza delle distanze, del punto di caduta e del piede della verticale, dal primitivo piano meridiano.

deviazione orientale (secondo Bonati):

$$DE - MN\ \sin\alpha = c\sqrt{\frac{2ar}{2ar - c^2}} - r\cos q\ \sin\alpha$$

La deviazione a sud è (approssimativamente) calcolata da Bonati come la distanza del punto di caduta dal piano del parallelo in cui si muove M.

deviazione meridionale (secondo Bonati):

$$EF = ME\sin q = \frac{a\,c^2}{2ar - c^2} \cdot \sin q$$

Alla latitudine di Roma, con gli stessi dati di Gugliemini, Bonati trovava una deviazione orientale leggermente superiore (1 pollice e 2,47 linee invece di 1 pollice e 2,4 linee) e una deviazione meridionale ben più rilevante: 6 pollici e 1/3 (17,144 cm).

Ecco che allora la deviazione meridionale, alle nostre latitudini, poteva fornire una prova ancor più evidente del moto della Terra.

Gli esperimenti di Gugliemini

Alla Torre degli Asinelli, sfruttando il vano interno della scala che portava alla sommità e la torretta sulla cima, Guglielmini poteva disporre di un'altezza di caduta di 240 piedi parigini, pari a m 78. L'esperimento consisteva nel rilasciare dal punto più alto sfere di piombo del diametro di un pollice (cm 2,207), registrando il punto di caduta su un piano rettangolare di cera, orientato secondo le direzioni del meridiano e del parallelo. Fu necessario asportare alcune piattaforme e forare la volta della torre per permettere il passaggio delle sfere. Si trattava di esperimenti molto delicati, poiché la deviazione da misurare era di pochi millimetri su una ottantina di metri di caduta. Molte prove fallirono a causa del vento, che penetrava nella torre dai fori lasciati dalle impalcature di costruzione; furono prese precauzioni per realizzare sfere perfettamente sferiche e omogenee, ma il punto più delicato era quello dello sgancio. Inizialmente le sfere erano appese ad un uncino con un filo di lino, di seta, o di metallo, fatto passare attraverso il foro di una lamina per attenuare le vibrazioni; il filo veniva poi bruciato al di sopra della lamina. Il primo ciclo di esperimenti si svolse nell'agosto 1790, sfruttando solo parte dell'altezza (140 piedi bolognesi pari a 53 m circa): ma le sfere non passarono nemmeno per il foro di un pollice quadrato predisposto nella volta.

Guglielmini si trasferì allora alla torre della Specola di Bologna, che sebbene più bassa era priva di aperture verso l'esterno, per studiare le cause di una così enorme aberrazione. Utilizzando il vano libero di una scala a chiocciola, poteva disporre di un'altezza di 90 piedi parigini pari a 29 m circa. Qui indagò attentamente l'immobilità delle sfere prima dello sgancio, e sperimentò diverse tecniche di troncatura, bruciando il filo di sospensione o corrodendolo con acidi, e altri accorgimenti per evitare le vibrazioni del filo. Questo secondo ciclo di esperimenti si svolse in settembre e in ottobre, con la collaborazione degli astronomi Luigi Zanotti, Petronio Matteucci e Francesco Sacchetti. La deviazione orientale media risultò di due linee circa (4,5 mm) e quella meridionale nulla.

Quindi Guglielmini tornò alla Torre degli Asinelli, aiutato dagli accademici Alamanno Isolani, Alfonso Bonfioli Malvezzi e Petronio Colliva: Guglielmini e Isolani salivano in cima dove uno controllava l'immobilità del filo e l'altro lo bruciava, Malvezzi e Colliva restavano alla base per registrare le impronte lasciate dalle sfere e ripianare la cera dopo ogni lancio. Gli esperimenti si svolgevano a notte inoltrata per evitare le vibrazioni prodotte dal traffico dei carri e delle carrozze. Questo terzo ciclo di esperimenti si svolse tra la fine di dicembre 1790 e i primi di gennaio 1791.

I continui fallimenti e la difficoltà dell'impresa avevano quasi convinto Guglielmini a desistere, quando le notizie di altri esperimenti condotti a Roma, a Torino e in altre città lo stimolarono a proseguire e a studiare una nuova tecnica di sgancio che si mostrò risolutiva. Si trattava di un dispositivo, realizzato da un artigiano specializzato in strumenti di precisione, consistente in una specie di pinza che tratteneva il filo reciso, e lo rilasciava azionando una leva, solo dopo che il filo era tornato immobile. Questa nuova tecnica fu utilizzata per la prima volta alla torre degli Asinelli, nel maggio 1791, da un'altezza ridotta, e quindi per tutta l'altezza disponibile, per una serie di sedici lanci tra il 3 giugno e il 3 settembre che manifestarono una quasi perfetta coincidenza delle tracce lasciate dalle sfere: Luigi Tagliavini prese queste misure, e registrò il tempo di caduta, utilizzando un meccanismo che provocava lo spegnersi di una lampada quando la sfera toccava il suolo.

Da ultimo fu calato il perpendicolo e misurata la posizione del piede della verticale, operazione anche questa assai difficile, in quanto bisognava ottenere l'immobilità di un pendolo lunghissimo e determinare esattamente la posizione del peso. Queste difficoltà protrassero le operazioni fino al 13 febbraio 1792: confrontando i risultati ottenuti Guglielmini ottenne una deviazione orientale media di 8,375 linee (19 mm circa) ed una deviazione meridionale di 5,272 linee (12 mm circa). ([8])

([8]) Gli esperimenti sono descritti da Guglielmini stesso in: *De diurno Terrae motu* [1792].

Altri esperimenti

Nel dibattito sulla deviazione meridionale venne coinvolto l'astronomo romano Giuseppe Calandrelli, al quale Bonati inviò la sua memoria manoscritta nell'autunno del 1789. Calandrelli insegnava matematica al Collegio romano, passato sotto il clero regolare, e dirigeva l'osservatorio che aveva contribuito a progettare e che era stato eretto nel 1787, sopra la chiesa di S. Ignazio. Guglielmini era entrato in contatto con Calandrelli durante il soggiorno romano, mentre la relazione tra Bonati e Calandrelli aveva avuto origine dagli studi di entrambi sull'idraulica del bacino del Velino. ([9])

Calandrelli, che si teneva costantemente in contatto epistolare con entrambi, allestì a sua volta l'esperimento sulla deviazione dei gravi nella torre dell'osservatorio, utilizzando il vano libero della scala interna e con tecniche simili (91 piedi di caduta $\approx$ m 29,5, sfere di una libbra e mezza, bruciatura del fili di sospensione, registrazione del punto di caduta su un piano di sabbia o di gesso...), che egli descrive in una lunga lettera indirizzata a Bonati destinata ad essere stampata (dicembre 1790). Lo scopo di Calandrelli era di appoggiare a solidi risultati sperimentali la teoria della deviazione dei gravi di Bonati e fornire la prova della rotazione della Terra; voleva inoltre, come Guglielmini prima di lui, ottenere dal Papa il permesso di ripetere solennemente l'esperienza in S. Pietro «per così confermare la verità nel sito stesso ove fù primieramente contraddetta» (riferendosi probabilmente al processo a Galilei). L'opuscolo di Bonati con la lettera di Calandrelli doveva essere dedicato al Segretario di Stato card. Zelada, membro del S. Uffizio. Il cardinale però, inizialmente favorevole si irrigidì poi alquanto, arrivando a rifiutare la dedica già stampata. Calandrelli rimase assai amareggiato: «Dio immortale questo[...] è per me un mistero, mentre non mi persuaderò mai che una verità geometrica possa disconvenire ad un Eminentissimo, quando potrebbe convenirne la dedica al sommo Dio come principio, ed origine d'ogni verità».

([9]) Si veda: T. Bonati, *Carteggio scientifico* [1992]. Sugli esperimenti condotti a Roma, Torino, Bergamo e in altre città d'Italia si possono vedere: Borgato [1996], Fiocca [1998].

Le ricerche sulla deviazione, oltre che a Bologna e a Roma, ebbero un'ampia notorietà.

Calandrelli coinvolse altri astronomi e scienziati, scrivendo a Sebastiano Canterzani a Bologna, al famoso astronomo di Brera, Barnaba Oriani che era in corrispondenza con Laplace, a Giuseppe Toaldo, direttore dell'osservatorio di Padova, a Jacques-Dominique Cassini, direttore dell'Observatoire di Parigi.

A sua volta Bonati coinvolse Gianfrancesco Malfatti, suo collega all'università di Ferrara, che scrisse a Teresio Michelotti membro dell'Accademia delle Scienze di Torino. L'Accademia di Torino discusse le teorie di Guglielmini e di Bonati, inviate dagli autori, in varie sedute nel gennaio 1791 e avviò ricerche a sua volta. Ignazio Michelotti ricalcolò la deviazione meridionale e molti esperimenti furono condotti in Piemonte, in particolare da Felix Saint Martin nella Basilica di Superga e da Ignazio Michelotti nel Campanile di S. Gaudenzio a Novara. In una chiesa di Bergamo altri esperimenti venivano condotti da Lorenzo Mascheroni con Giovanni Antonio Tadini, che li riprese poi nel campanile dei Padri Conventuali.

Guglielmini si consultò costantemente col suo maestro, Sebastiano Canterzani, che era segretario dell'Accademia delle Scienze di Bologna e in contatto epistolare con molti scienziati stranieri membri corrispondenti dell'Accademia: tra questi vi era l'astronomo Lalande.

La deviazione del filo a piombo

Dopo una iniziale concordanza con le previsioni dei calcoli di Bonati, gli esperimenti di Calandrelli non diedero più la prevista deviazione meridionale. Si svolse allora una corrispondenza intrecciata (gennaio-maggio 1791) tra il nostro Guglielmini, Bonati e Calandrelli, non priva di punte polemiche. Nuove ipotesi teoriche furono messe in campo e nuovi accorgimenti per rendere gli esperimenti più precisi. Nel maggio 1791 un ciclo di esperimenti fu ripetuto da Calandrelli a Roma, mentre Guglielmini sperimentava col nuovo dispositivo di sgancio dalla torre degli Asinelli. Nel dibattito teorico fu coinvolto anche Girolamo Saladini, consultato da Guglielmini per rispondere alle obiezioni di Bonati.

A fine maggio la questione si risolse: Guglielmini, e anche Saladini per altra via, scoprirono che la deviazione meridionale è inosservabile per una analoga deviazione del filo a piombo, dovuta pure alla rotazione terrestre. Dunque la osservazione di Bonati era giustificata, anzi la deviazione meridionale risultava addirittura maggiore considerando più precisamente l'arco di meridiano invece della distanza tra i paralleli, del punto di caduta e della verticale del punto di gancio. Ma il filo a piombo che viene calato per misurare questa verticale devia pure verso l'equatore per effetto della forza centrifuga, e le due deviazioni si uguagliano quasi esattamente.

Vediamo in breve le teorie di Guglielmini e di Saladini in merito alla deviazione meridionale, che per vie diverse arrivano al medesimo risultato, sia nel vuoto che in presenza dell'aria.

De Diurno Terrae Motu

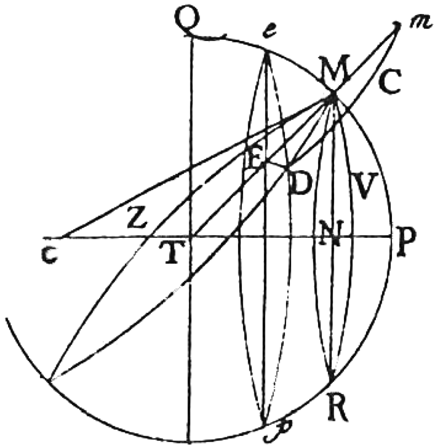
Nel 1792 uscì un nuovo lavoro di Guglielmini, in latino per una migliore diffusione all'estero: una dissertazione molto lunga, quasi una monografia. ([10])

Divisa in più articoli, nel primo Guglielmini ripropone essenzialmente la stessa formula già data per la deviazione orientale, giustificandola col fatto che la correzione di Bonati non era rilevante. Egli risponde inoltre alle obiezioni di Sebastiano Canterzani, che criticava il modo di tenere conto della resistenza dell'aria, in quanto, secondo Canterzani, questa si oppone al moto verticale rallentando la caduta, ma si oppone anche al moto relativo verso est, riducendo l'ampiezza della traiettoria: Guglielmini sosteneva questo secondo effetto trascurabile.

Il secondo articolo affronta la deviazione meridionale del grave e la deviazione del 'pendolo', ossia del filo a piombo, che indica la verticale. Guglielmini calcola separatamente questi due spostamenti, dimostrando che coincidono a meno di infinitesimi di ordine superiore. Il calcolo è piuttosto complesso e il testo risulta di non facile lettura, poiché

([10]) *De diurno Terrae motu,* Bologna, 1792.

Guglielmini non può usare il linguaggio del calcolo vettoriale, tuttavia, riassumendo, egli pone :



MVR = parallelo passante per M
$TDMZ$ = piano del moto del grave
parabola mCD = traiettoria nel vuoto
DMZ = cerchio massimo della Terra nel piano $TDMZ$
eDp = parallelo passante per D
ψ = latitudine
$\varphi = M\widehat{T}D$

Approssimando l'arco con la tangente, la 'aberrazione meridionale' eM risulta espressa da: ([11])

$$eM = \frac{r \sin\psi \ \sin\mathrm{vers}\,\varphi}{\cos\psi}$$

Posto allora:

ω = velocità angolare della Terra, χ = accelerazione 'assifuga' = $\omega^2 r \cos\psi$

([11]) Il seno verso di φ è uguale a $1-\cos\varphi$, r è il raggio terrestre.

$\varepsilon =$ 'vis centrifuga' del punto M rispetto al centro T, ossia la componente di $\vec{\chi}$ lungo TM : $\varepsilon = \chi \cos\psi$

$\beta =$ accelerazione dovuta alla attrazione terrestre

$\Omega = \beta - \varepsilon =$ accelerazione di caduta in direzione radiale

$k =$ tempo di caduta

$mM = a =$ altezza di caduta

$ME =$ spazio percorso nel tempo k per effetto della accelerazione ε

$mE =$ spazio percorso nel tempo k per effetto della accelerazione β

$mM = ME - mE = a$: spazio percorso nel tempo k per effetto della accelerazione $\beta - \varepsilon$

Si ha: $ME = \dfrac{k^2\omega^2\, r\cos^2\psi}{2} = r$ sin vers φ e per la legge galileiana: $k^2 = \dfrac{2a}{\beta - \varepsilon}$

La *aberrazione meridionale del grave* risulta allora espressa da:

$$eM = \frac{a\ \omega^2 r\ \sin\psi\ \cos\psi}{\beta - \omega^2 r\ \cos^2\psi} = \frac{a\,\chi\ \sin\psi}{\beta - \chi\ \cos\psi}$$

Mentre la *deviazione meridionale del pendolo* è espressa da:

$$Md = \frac{a\ \chi\ \sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi\cos\psi + \chi^2}}$$

Sviluppando in serie evidentemente risulta, trascurando i termini di grado ≥ 2 in χ:

$$\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi\cos\psi + \chi^2} = (\beta - \chi\ \cos\ \psi)\sqrt{1 + \frac{\chi^2\sin^2\psi}{(\beta - \chi\ \cos\psi)^2}} =$$

$$= (\beta - \chi\ \cos\psi)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\chi^2\sin^2\psi}{(\beta - \chi\ \cos\psi)^2} + \cdots\right) \cong \beta - \chi\ \cos\psi$$

Dunque $eM - Md$ è trascurabile e la deviazione meridionale del grave, per la deviazione verso sud del filo a piombo, diventa di fatto inosservabile.

Prolungando il tempo di caduta invece, la deviazione meridionale rispetto al filo a piombo che risulta nulla nel vuoto, diventa sensibile, minore di quella indicata da Bonati ma tuttavia non trascurabile, nell'aria:

$$eM - Md = \frac{(\bar{a} - a)\,\chi \sin\psi}{\beta - \chi \cos\psi} = \frac{a\,((k+t)^2 - k^2)\,\chi \cos\psi}{k^2\,(\beta - \chi\cos\psi)}$$

Avendo posto:

$k =$ tempo di caduta nel vuoto, $k + t =$ tempo di caduta nell'atmosfera,

$a = mM =$ altezza di caduta

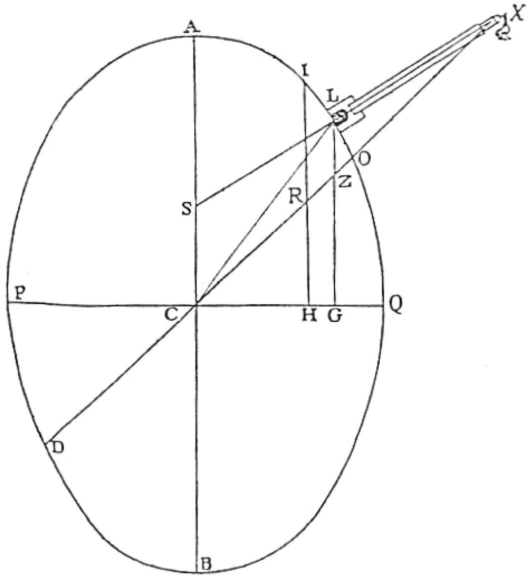
$\bar{a} = \dfrac{a\,(k+t)^2}{k^2} =$ altezza per una caduta nel vuoto di $k + t$ secondi.

La deviazione meridionale su Terra sferoidale: Girolamo Saladini

Girolamo Saladini (1731-1813), autore con Vincenzo Riccati di un celebre trattato di analisi matematica, pubblicò tre memorie tutte sulla deviazione meridionale, ([12]) in cui essenzialmente arrivava, per una via completamente diversa, alle stesse conclusioni di Gugliemini e a formule più maneggevoli ma equivalenti. Anche Gugliemini aveva accennato alla forma sferoidale della Terra, per osservare che nelle formule interveniva solo l'angolo che la normale alla superficie terrestre formava con la verticale del filo a piombo, che risultava sempre di $6'$, sia nel caso di terra sferica che sferoidale, e quindi che le formule erano le stesse.

Saladini, come si può anche osservare da una sua figura qui sotto riportata, tiene conto da subito della forma sferoidale della Terra, ossia dello schiacciamento ai poli, ma fa diverse approssimazioni, in particolare pone la latitudine geografica uguale alla latitudine geocentrica.

([12]) Saladini [1794], [1802], [1805].



Siano:

C = centro della Terra
$APBQ$ = meridiano della torre LX
ACB = diametro dell'equatore
PCQ = asse di rotazione della Terra

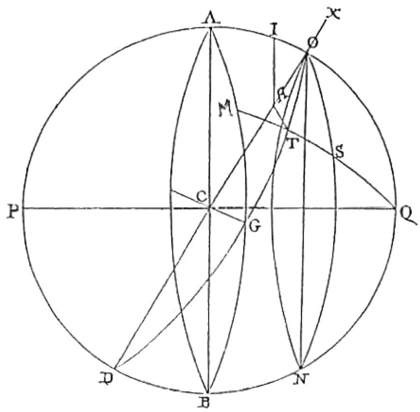
Si suppone:

gravità assoluta in X = gravità assoluta in A (all'equatore)
Forza centrifuga in A = 1/289 gravità assoluta in A
$A\hat{S}L = \lambda \cong A\hat{C}L \cong A\hat{C}O =$ angolo di latitudine

Posto l'angolo in $\hat{X} = \tau$ (angolo di deviazione del pendolo), risulta:

$$\sin\tau = \frac{\cos\lambda\ \sin\lambda}{289}.$$

Allo stesso risultato Saladini arriva, per approssimazione, anche supponendo $A\hat{C}O \neq \lambda$.



Ponendo quindi:

OTD = piano del moto del grave
arco MT = distanza dall'equatore del punto di caduta
arco LA = distanza dall'equatore della base della torre

$a = LX$ = altezza della torre
φ = latitudine = $A\hat{C}O = L\hat{Z}O = I\hat{R}O$
f = forza centrifuga in X

s = velocità tangenziale del vertice X
t = tempo di caduta nel vuoto
t' = tempo di caduta nell'aria

Poiché $LO = a\,\dfrac{f}{g}\,\sin\varphi$ e $OI = \dfrac{s^2\,t'^2\,\tan\varphi}{2\,r}$, nel vuoto risulta $LO = OI$ e dunque $MT = LA$, ma nell'aria si ha una deviazione per il prolungamento del tempo di caduta:

$$D = \frac{s^2\,\tan\varphi}{2\,r}\,(t'^2 - t^2) \cong \frac{1}{2}\omega^2\,r\,\sin\varphi\,\cos\varphi\,(t'^2 - t^2)$$

Un approccio differenziale: Giovanni Antonio Tadini

Giovanni Antonio Tadini (1754-1830) incontrò Guglielmini a Milano nel 1797, durante le sedute del Gran Consiglio della Repubblica

Cisalpina di cui entrambi era stati nominati membri: Tadini era deputato per il Dipartimento del Serio e Guglielmini per il Dipartimento del Reno; ancor prima, come abbiamo visto, Tadini aveva iniziato a sperimentare nel campanile della chiesa di San Giorgio a Bergamo.

Tadini pubblicò nel 1796 una lunga memoria in tre parti, e solo nel 1815 i risultati degli esperimenti che aveva condotto vent'anni prima. ([13])

La memoria dedica un primo articolo alla deviazione orientale, un secondo alla resistenza dell'aria e un terzo alla deviazione meridionale.

La impostazione di Tadini è completamente originale, e i suoi risultati concordano con quelli trovati da Laplace e pubblicati nel 1803. I passaggi delle dimostrazioni non sono tuttavia del tutto giustificati, poiché Tadini usa con grande disinvoltura gli sviluppi in serie.

Tadini considera lo spostamento a est relativo ad uno spostamento verticale pari ad s e trova una espressione analoga a quella di Guglielmini, però questo spostamento è considerato in un tempo infinitesimo.

s = spostamento lungo la verticale relativo al tempo T
R = distanza del punto più alto dal centro della Terra ($= r + a$)
X = arco descritto dalla sommità nel tempo T di caduta

Allora la differenza tra gli spazi percorsi orizzontalmente nel tempo T da due punti a distanza R e $R - s$ dal centro è data da:

$$X - \frac{R-s}{R} X = \frac{s}{R} X$$

Tadini ottiene la 'velocità di deviazione', cioè quella del moto relativo verso est:

$$\frac{d\left(\frac{s}{R} X\right)}{dT}$$

([13]) Tadini [1796], [1815].

e, differenziando, quello che chiama ‘effetto momentaneo della forza acceleratrice di deviazione’:

$$d\,\frac{d\left(\frac{s}{R}X\right)}{dT} = d\left(\frac{X\,ds\ +\ s\,dX}{R\,dT}\right)$$

A questa accelerazione vengono sottratte: la componente orizzontale della accelerazione di gravità, espressa da: $\frac{X}{R}\phi$, e la resistenza dell’aria espressa da: $m\,v^2\phi$, dove m è una costante, e v la velocità di caduta del grave nell’aria.

Secondo Tadini questa è la forma differenziale della accelerazione relativa, cioè l’accelerazione dovuta al moto relativo verso est:

$$d\left(\frac{X\,ds\ +\ s\,dX}{R\,dT}\right) - \frac{X}{R}\phi\ dT - m\,v^2\phi\ \ dT$$

dove s, X sono variabili, R è costante.

Tadini sviluppa la sua teoria ricorrendo sistematicamente agli sviluppi in serie.

La legge del moto verticale è espressa da: $\phi\,dT - mv^2\phi\,dT = dv$.

Egli pone inoltre: $\phi\ dT\ =\ dV$, dove V è velocità di caduta nel vuoto, da cui: $dV = \dfrac{dv}{1-mv^2}$ e quindi integrando: $V = v + \dfrac{mv^3}{3} + \dfrac{m^2v^5}{5} + \cdots$

La serie inversa fornisce la velocità di caduta nell’aria in funzione di quella nel vuoto (a parità di tempo):

$$v = V\ -\ 0{,}3333\ m\ V^3 +\ 0{,}1333\,m^2\,V^5 -\ \ldots$$

e quindi, indicati con S ed s gli spazi percorsi verticalmente dal grave nel tempo T, rispettivamente nel vuoto e nell’aria: $S = \int V\,dT$; $s = \int v\,dT$, sostituendo a v il valore dato dalla precedente serie, e poiché V è proporzionale al tempo T secondo la legge di Galileo: $V = \phi T$ e $S = \dfrac{1}{2}\phi T^2$, egli ricava:

$$s = S\,(1 - 0{,}666\ \ m\,V^2 + 0{,}0444\ m^2V^4 -\ \ldots)$$

Da cui ottiene, tenendo conto che u, t, x sono proporzionali tra loro e a$\sqrt{s}$, come V, T, X lo sono a $\sqrt{S}$, e invertendo la serie:

$$V = u\,(1 + 0{,}0833\ m\,u^2 + 0{,}00208\ m^2u^4 - \ldots),$$
$$T = t\,(1 + 0{,}0833\ m\,u^2 + 0{,}00208\ m^2u^4 - \ldots),$$
$$X = x\,(1 + 0{,}0833\ m\,u^2 + 0{,}00208\ m^2u^4 - \ldots),$$

dove:

u = la velocità di caduta nel vuoto per un'altezza s
t = tempo di caduta nel vuoto per lo spazio s
x = spazio percorso orizzontalmente nel vuoto per effetto della velocità di rotazione, nel tempo t.

Dalla prima di queste può ricavare la velocità di caduta nell'aria in funzione di quella nel vuoto (a parità di spazio):

$$v = u\,(1 - 0{,}25\ m\,u^2 + 0{,}05208\ m^2\,u^4 - \ldots)$$

E sostituendo nella primitiva espressione a: X, dX e dT i valori ricavati dalle serie precedenti, tenendo conto che: $u\,dx = x\,du$; $s\,dx = \dfrac{x\,ds}{2}$; $t\,du = u\,dt$; $u = \dfrac{ds}{dt}$ trova:

$$\frac{X\,ds + s\,dX}{R\,dT} = \frac{x}{R}\,u\,\left(\frac{3}{2} - 0{,}1666\,m\,u^2 + 0{,}0333\ m^2\,u^4 - \ldots\right)$$

E il suo differenziale:

$$d\left(\frac{X\,ds + s\,dX}{R\,dT}\right) = \frac{x}{R}du\,(3 - 0{,}6666\,m\,u^2 + 0{,}2\ m^2\,u^4 - \ldots)$$

Analogamente, tenendo conto che è $du = \phi\,dt$:

$$\frac{X}{R}\phi\ dT = \frac{x}{R}\,du\,(1 + 0{,}3333\,m\,u^2 + 0{,}0333\ m^2\,u^4 - \ldots)$$

E infine:

$$dZ = d\left(\frac{X\,ds + s\,dX}{R\,dT}\right) - \frac{X}{R}\,\phi\,dT = \frac{x}{R}du\,(2 - m\,u^2 + 0{,}1666\ m^2\,u^4 - \ldots)$$

da cui integrando ottiene la *velocità di deviazione* senza l'effetto della resistenza dell'aria in direzione orizzontale:

$$Z = \frac{x}{R} u \; (1 - 0{,}25 \; m\,u^2 + \; 0{,}0277 \; m^2 u^4 - \ldots)$$

e tenendo conto anche del differenziale della resistenza dell'aria alla deviazione verso est:

$$m\,v\,z\phi\,dT = m\,z\,u\,du = \frac{m\,R\,z\,u}{x} dZ \;:\; (2 - mu^2 + \; 0{,}1666\,m^2u^4 + \ldots)$$

ricava la *velocità di deviazione del grave nell'aria*:

$$z = \frac{x}{R}\, u \; (1 - 0{,}5 \; mu^2 + \; 0{,}0277 \; m^2 u^4 \; \ldots)$$

Moltiplicando quest'ultima per

$$dT = dt \; (1 + 0{,}25 \; m\,u^2 + 0{,}0104 \; m^2 u^4 - \; \ldots),$$

e integrando Tadini ottiene la *deviazione orientale nell'aria*:

$$\frac{x}{R}\, ut \cdot \left(\frac{1}{3} \; - \; 0{,}05 \; m\,u^2 - \; 0{,}0124 \; m^2 u^4 \; \ldots \right)$$

che poiché $2s = ut$ assume anche la forma:

$$\frac{2}{3}\frac{x}{R}\, s \; - \; 0{,}1 \; m\,u^2 \frac{x}{R}\, s \; - \; 0{,}0248 \; m^2 u^4 \; \frac{x}{R}\, s \ldots$$

Confrontando le espressioni trovate egli ricava che l'effetto della resistenza dell'aria sulla velocità orizzontale (per un dislivello pari ad s) è dato dalla differenza:

$$z - Z = -\,0{,}25 \; \frac{m\,R\,u}{x}\, Z^2 = -\,0{,}25 \; mu^2 \, \frac{x}{R}\, u$$

e la corrispondente variazione nella deviazione è:

$$-\,0{,}05 \; m\,u^2 \frac{x}{R} u\,t = \; -\,0{,}1 \; m\,u^2 \frac{x}{R}\, s$$

Il prolungamento del tempo di caduta nell'aria avviene secondo la legge:

$$dT = dt + 0{,}25 \; m\,u^2 dt$$

e la riduzione della velocità Z per l'aumento del tempo è:

$$-0{,}25\, m\, u^2\, \frac{x}{R} u$$

Tadini deduce quindi le seguenti conclusioni: l'espressione di Z ha un termine negativo in u cubo che rappresenta il rallentamento della caduta dovuto della resistenza dell'aria al moto verticale, secondo Tadini però questo è completamente compensato dal prolungamento del tempo di caduta. L'effetto della resistenza dell'aria al moto relativo verso est è espresso dalla differenza tra i due valori della velocità, $z - Z$, il cui termine di grado più basso in u cubo interviene solo sul secondo termine della serie che fornisce la deviazione a est, dunque il primo termine, che è i *2/3 di quello trovato da Guglielmini*, è l'effetto della gravità, considerata come forza centrale.

La crescita del tempo nell'aria e la riduzione della velocità si compensano (i termini residui dovuti alla resistenza dell'aria in direzione opposta alla velocità di deviazione sono trascurabili), dunque *la deviazione orientale non è influenzata sensibilmente dalla resistenza dell'aria.*

Analoghe considerazioni Tadini sviluppa per la deviazione meridionale, nel vuoto essa è calcolata con considerazioni geometriche analoghe a quelle di Gugliemini, e nell'aria mediante un procedimento di sviluppi in serie simile a quello utilizzato per la deviazione orientale; analoghe sono le conclusioni: la deviazione meridionale è inosservabile sia nel vuoto che nell'aria.

Precisamente la *deviazione meridionale del grave nel vuoto* (equivalente a quella trovata da Guglielmini) gli risulta espressa da:

$$\frac{t^2 c^2}{2R} \tan \psi$$

dove R è il raggio della Terra, ψ è la latitudine, e c lo spazio percorso in un secondo per la rotazione terrestre alla latitudine ψ.

La *deviazione meridionale del grave nell'aria* è espressa da:

$$\frac{t^2 c^2}{2R} \tan \psi \; (1 \pm \ldots - 0{,}000003\, m^2 u^y \ldots)$$

e la *deviazione del filo a piombo* da:

$$\frac{s\ c^2}{2nR}\tan\psi = \frac{t^2c^2}{2R}\tan\psi$$

essendo n lo spazio percorso in un secondo per effetto della gravità ($n = g/2$). Per cui, a differenza di Guglielmini, può concludere che *la deviazione meridionale del grave è uguale a quella del filo a piombo, sia nel vuoto che nell'aria.*

La teoria di Tadini non è esente da critiche: non solo per l'uso disinvolto degli sviluppi in serie (anche in due variabili) ma anche per alcune assunzioni quali ad esempio che la gravità assoluta sia la stessa che all'equatore, o sul modo di tener conto della resistenza dell'aria.

Nonostante ciò, Tadini intuisce che bisogna operare una correzione che tenga conto che il campo gravitazionale è un campo centrale e non uniforme, e che la deviazione orientale deve risultare dalla somma di tutte le deviazioni rispetto alla verticale istantanea durante la caduta, spingendosi ben oltre quelli che l'avevano preceduto e giungendo, probabilmente anche per una curiosa compensazione di errori, ad un risultato identico a quello di Laplace. ([14])

La teoria analitica di Laplace

Pierre Simon Laplace (1749-1827) fu probabilmente informato degli esperimenti di Guglielmini da Jérôme Lalande, direttore dell'Observatoire di Parigi dal 1795 e socio straniero dell'Accademia delle Scienze di Bologna: Lalande aveva ricevuto le informazioni sugli esperimenti e ne divulgò poi la notizia nel *Magasin Encyclopédique* (1797). Nel 1796 Laplace faceva sapere a Gugliemini, tramite Lalande, che secondo lui la deviazione orientale nel vuoto andava ridotta di un terzo, e che quella meridionale era nulla o quasi, sia nel vuoto che nell'aria. L'anno successivo Guglielmini incontrava Tadini a Milano, il quale giustificava con le sue dimostrazioni tutto quello che affermava Laplace.

([14]) La teoria di Guglielmini meriterebbe di essere analizzata in maggiore dettaglio, ma questo esula dagli scopi del presente lavoro. Ringrazio J. Gapaillard che su questo tema mi ha comunicato alcune sue considerazioni.

La teoria di Laplace sulla deviazione dei gravi fu pubblicata una prima volta in una memoria del 1803 e poi, con poche varianti, nel 1805, nell'ambito della sua opera fondamentale: la *Mécanique céleste*, dove troviamo una generalizzazione del problema ad un moto qualunque di un corpo nello spazio, che poi viene applicata al moto dei proiettili. ([15]) La trattazione di Laplace usa il linguaggio della meccanica analitica e le equazioni differenziali che integrate forniscono le deviazioni orientale e meridionale sono fatte seguire dal principio delle velocità virtuali. L'impostazione è dunque molto generale.

La risoluzione puramente analitica di Laplace è lontanissima dalla visione geometrica di Guglielmini e Saladini, perché basata su un modello matematico più che sulla percezione spaziale del corpo che cade. Pur tenendo conto della forma sferoidale della Terra e della resistenza dell'aria, anche Laplace fa non meno di cinque approssimazioni, in particolare l'aria è supposta di densità uniforme, la resistenza non varia con l'altezza ma proporzionalmente al quadrato della velocità, secondo la legge di Newton, e la gravità è supposta costante per tutta l'altezza di caduta.

Laplace chiama x, y, z le coordinate cartesiane del grave, con l'origine nel centro della Terra e asse x l'asse di rotazione terrestre e chiama X, Y, Z le coordinate cartesiane della sommità della Torre. In termini moderni, questo equivale a considerare un riferimento cartesiano fisso nello spazio, con centro nel centro della Terra e asse x l'asse di rotazione. Le coordinate del punto di lancio sono individuate sia attraverso le coordinate cartesiane che quelle sferiche, così per il punto mobile, ossia il corpo in caduta ($-\alpha s$, αu, αv esprimono la variazione delle coordinate sferiche):

$x, y, z,$ coordinate cartesiane del grave
$X, Y, Z,$ coordinate cartesiane della sommità della torre
$r, \theta, nt + \omega$ coordinate sferiche della sommità della torre
r = raggio condotto dal centro della Terra alla sommità della Torre

([15]) Laplace [1803], [1805], anche in: *Œuvres complètes de Laplace*, vol. XIV pp. 267-277 e vol. IV pp. 303-306. Sulla teoria di Laplace e di Gauss in merito alla deviazione dei gravi si veda anche: Gapaillard [1988].

θ = angolo tra il raggio r e l'asse di rotazione (*colatitudine geocentrica*)
ω = angolo che il piano meridiano del luogo forma con un piano meridiano fisso all'istante iniziale
n = velocità angolare di rotazione della Terra

$$X = r \cos\theta \qquad x = (r - \alpha s) \cos(\theta + \alpha u)$$

$$Y = r \sin\theta \cos(nt + \omega) \qquad y = (r - \alpha s) \sin(\theta + \alpha u) \cos(nt + \omega + \alpha v)$$

$$Z = r \sin\theta \sin(nt + \omega) \qquad z = (r - \alpha s) \sin(\theta + \alpha u) \sin(nt + \omega + \alpha v)$$

Detto V il potenziale gravitazionale, le forze di attrazione che agiscono sul corpo, parallelamente agli assi x, y, z sono espresse da:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

La resistenza dell'aria è espressa dalla funzione: $\varphi\left(\alpha s, \alpha \dfrac{ds}{dt}\right)$; detto K il rapporto $\dfrac{\varphi\left(\alpha s, \alpha \dfrac{ds}{dt}\right)}{\alpha \dfrac{ds}{dt}}$, le componenti della resistenza nelle direzioni di r, θ, ω sono:

$$K \alpha \frac{ds}{dt}, \; - \alpha K \frac{du}{dt}, \; - \alpha K \frac{dv}{dt}$$

Laplace applica quindi il *principio delle velocità virtuali*:

$$0 = \delta x \frac{d^2x}{dt^2} + \delta y \frac{d^2y}{dt^2} + \delta z \frac{d^2z}{dt^2} - \delta x \frac{\partial V}{\partial x} - \delta y \frac{\partial V}{\partial y} - \delta z \frac{\partial V}{\partial z} -$$

$$- K \delta r \alpha \frac{ds}{dt} + K \delta \theta \alpha \frac{du}{dt} + K \delta \omega \alpha \frac{dv}{dt}$$

Sostituisce poi a x, y, z, le loro espressioni in funzione di r, θ, ω, trascurando i termini dell'ordine di α^2, impone la condizione di equilibrio dello strato d'aria, e osserva che $-\dfrac{\partial Q}{\partial r} = g$ essendo g la gravità e Q la somma dei potenziali della gravitazione newtoniana e della forza centrifuga: $Q = V + \dfrac{n^2}{2} [(r - \alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)]$.

Ponendo uguali a zero i coefficienti delle variazioni δr, $\delta\theta$, $\delta\omega$, e prendendo per unità il raggio r, Laplace perviene alle tre equazioni ($r = a + y\ (\theta, \omega, a)$ e a è costante sul medesimo strato):

$$0 = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta + \alpha K\frac{ds}{dt} - g$$

$$0 = \alpha\frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K\frac{du}{dt} - g\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$0 = \alpha\frac{d^2v}{dt}\sin\theta + 2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\omega}$$

Trascurando i termini in $n\frac{dv}{dt}$, e in $n\frac{du}{dt}$, esse si riducono alle seguenti:

1) $0 = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha K\frac{ds}{dt} - g$

2) $0 = \alpha\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha K\frac{du}{dt} - g\frac{\partial y}{\partial\theta}$

3) $0 = \alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\omega}$

di cui la prima riguarda la *discesa verticale*, la seconda la *deviazione a sud*, la terza la *deviazione a est* del grave.

La prima equazione fornisce una soluzione $\alpha s(t)$ in funzione di t. Supposti g e $\frac{\partial y}{\partial\theta}$ costanti durante la caduta, allora la 2) è soddisfatta dalla soluzione:

$$\alpha u = \alpha s\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)$$

che verifica le condizioni iniziali: $u = 0,\ \frac{du}{dt} = 0,\ s = 0,\ \frac{ds}{dt} = 0$.

Ma un filo a piombo, di lunghezza αs, è deviato verso sud del raggio terrestre della quantità:

$$\alpha s\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)$$

Pertanto: *le deviazioni a sud del grave e del filo a piombo risultano uguali*.

Scritta poi la deviazione a est del grave rispetto al filo a piombo come differenza tra le deviazioni del grave e del filo a piombo rispetto alla direzione del raggio terrestre:

$$\alpha v' \;=\; \alpha v \sin\theta \;-\; \frac{\alpha s}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\omega}$$

dalla equazione 3) ottiene:

$$3)\;\; 0 = \alpha\frac{d^2v'}{dt^2} + \alpha K\,\frac{dv'}{dt} - \;2\alpha\, n\,\frac{ds}{dt}\sin\theta$$

E supposta la resistenza dell'aria proporzionale al quadrato della velocità $\left(K = m\alpha\dfrac{ds}{dt}\right)$:

$$0 = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha^2 m\,\frac{ds^2}{dt^2} - \; g$$

Integrando quest'ultima equazione e sviluppando in serie Laplace trova:

$$\alpha s \;=\; \frac{gt^2}{2} \;-\; \frac{m^2g^2t^2}{12} + \frac{m^2g^3t^6}{45} - \;\cdots$$

e quindi, integrando l'equazione differenziale in $\alpha v'$ e sviluppando in serie:

$$\alpha v' \;=\; \frac{n\,g\,t^3 \sin\theta}{3}\left(1 - \;\frac{mgt^2}{4} + \frac{61}{840}\; m^2g^2t^4 - \;\ldots\right)$$

Nel vuoto, ossia per m infinitamente piccolo, ottiene l'espressione *della deviazione orientale*:

$$\alpha v' \;=\; \frac{1}{3}\,n\;g\;t^3\sin\theta \;=\; \frac{2nh}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\sin\theta$$

Dove h è l'altezza di caduta.

La teoria di Gauss e l'accelerazione complementare

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu coinvolto nello studio della caduta dei gravi dall'astronomo Wilhelm Olbers, a sua volta consultato da Johann Friedrich Benzenberg.

Tramite Lalande infatti, la notizia degli esperimenti di Guglielmini si era diffusa anche in Germania e aveva raggiunto Franz Xaver Zach, direttore dell'Osservatorio di Gotha, che ne aveva informato Georg Christoph Lichtenberg, professore di astronomia a Göttingen. Benzenberg venne a conoscenza della questione assistendo alle lezioni di Lichtenberg (1797-98). Nel frattempo sul *Magazin für den neuesten Zustand der Naturkunde* del 1798, Lalande riferiva anche le obiezioni di Laplace. Guglielmini, dopo aver discusso con Tadini a Milano, eseguiva nuovi esperimenti nella torre nel 1797 e scriveva a Lalande dando ragione a Laplace in merito alla deviazione verso sud. ([16])

Fu così che Benzenberg, tra luglio e ottobre 1802, volle riprodurre l'esperimento, utilizzando il campanile della chiesa di S. Michele ad Amburgo. ([17]) Benzenberg cercò di ovviare agli inconvenienti che erano stati imputati all'esperimento di Bologna: utilizzò un dispositivo di sgancio simile a quello di Guglielmini, ma facendo variare la sua orientazione per ogni ciclo di lanci. Inoltre registrò il punto di caduta dopo ogni lancio, mentre negli esperimenti di Guglielmini il piede della verticale era stato misurato (febbraio 1892) molti mesi dopo l'ultimo lancio e la torre degli Asinelli, leggermente pendente, poteva aver fornito in inverno un valore diverso da quello rilevabile in estate. Tuttavia Benzenberg non ottenne il permesso di eseguire gli esperimenti di notte, per il pericolo derivante dalla illuminazione ad olio per le strutture di legno, e dovette eseguirli di giorno e direttamente ad occhio nudo, senza poter controllare adeguatamente l'immobilità del filo prima dello sgancio. Non potendo ovviare al problema delle vibrazioni indotte dal passaggio delle carrozze e dai rintocchi del grande orologio, aumentò il numero delle prove pensando che gli errori si sarebbero mutuamente compensati. Sulla base di una primitiva teoria degli errori, Benzenberg elaborò i risultati e li inviò a Olbers, astronomo di Brema, nell'autunno del 1802, affinché fossero esaminati sulla base della previsione teorica.

([16]) Guglielmini tornò sulla questione nella memoria: *Sulla deviazione meridionale*, letta all'Accademia delle Scienze di Bologna il 18 novembre 1802, e conservata tra i manoscritti dell'Archivio dell'Accademia, Tit. IV Sez I.

([17]) Sugli esperimenti di Guglielmini, Benzenberg, Reich, Hall, Hagen, ecc. per una valutazione tecnica comparativa si può vedere: Acloque [1982].

Olbers sviluppò una teoria della deviazione, analoga a quella che Guglielmini aveva elaborato prima di lui, e che concordava con i dati di Amburgo solo per la deviazione meridionale. A questo punto Gauss fu interpellato da Olbers, e si svolse una corrispondenza intrecciata tra Olbers, Benzenberg e Gauss, nell'ambito della quale, finalmente, la questione teorica apparve chiarita in modo soddisfacente. Gauss inoltre interpretava fisicamente le assunzioni matematiche e analizzava la teoria di Olbers e di Guglielmini, incluse le ultime osservazioni in merito agli effetti della resistenza dell'aria sulla deviazione meridionale. ([18])

Benzemberg sottopose anche a Laplace nel 1802 i risultati delle proprie esperienze, e scrisse anche a Guglielmini per avere chiarimenti sull'ultima serie di lanci del 1797 e sul suo nuovo convincimento in merito alla deviazione a sud. Benzenberg rifece l'esperimento due anni più tardi, in un pozzo di miniera a Schlebusch.

La teoria di Gauss fu pubblicata per la prima volta da Benzenberg, nel libro che descrive le esperienze sulla deviazione. ([19]) Gauss utilizzava anche un sistema di riferimento rotante e metteva in luce quindi un termine che sarà in seguito detto accelerazione complementare o di Coriolis. ([20])

La lettura dei testi di Laplace e di Gauss, che uscirono quasi contemporaneamente, mette in evidenza la chiarezza della soluzione di Gauss, che corrisponde in gran parte alla presentazione classica della teoria della deviazione dei gravi.

([18]) «Il movimento conico dell'aria fa sì che, da che la Terra abbandona la sua prima posizione, la regione dell'atmosfera in cui si trova il corpo si sposti obliquamente attraverso questo piano secondo un angolo che non possiamo trascurare; da ciò avviene che il corpo, al quale l'aria non oppone resistenza secondo questo piano, si sposti da questo verso nord. E io sono sempre dell'opinione che, in questo modo, la deviazione sarà interamente compensata. Mi sembra probabile che questo sia esattamente quello che Guglielmini ha voluto dire e che non ha ottenuto l'approvazione di Olbers solamente perché non si è espresso con sufficiente precisione». (Trad. italiana) Gauss a Benzenberg, 1 marzo 1803, in Gauss, *Werke*, V, p. 497.

([19]) Benzenberg [1804], anche in: Gauss, *Werke,* vol V, pp. 495-503. Benzenberg inserì nel suo volume anche la traduzione in tedesco della lettera di risposta di Guglielmini, e della memoria letta all'Accademia delle Scienze di Bologna nel 1802.

([20]) Coriolis [1835].

Anche nella teoria di Gauss sono fatte diverse approssimazioni, in particolare il peso è supposto costante per tutta l'altezza di caduta e diretto secondo la verticale del filo a piombo. Sono utilizzate due terne di piani mutuamente perpendicolari, una con tre piani fissi e l'altra con tre piani mobili, e la posizione del punto P è individuata attraverso le sue coordinate nei due sistemi di riferimento.

Il primo riferimento $CXYZ$ è fisso nello spazio con l'asse CZ coincidente con l'asse della Terra orientato verso nord (C è un punto dell'asse non necessariamente il centro della Terra) e il piano $Y = 0$ contenente il corpo all'istante iniziale. Il secondo riferimento $Oxyz$ è solidale con la Terra e dunque in rotazione rispetto al primo, con l'origine O nella posizione del corpo all'istante iniziale $t = 0$. Gli assi Ox, Oy, Oz sono orientati rispettivamente verso sud, verso est, e secondo la verticale (indicata dal filo a piombo) ascendente; θ è l'angolo descritto dalla Terra nel tempo t e φ è la latitudine geografica.

$$
\begin{aligned}
X &= (x-a)\ \sin\varphi\ \cos\theta\ - y\ \sin\theta\ + (z+c)\ \cos\varphi\ \cos\theta \\
Y &= (x-a)\ \sin\varphi\ \sin\theta\ + y\ \cos\theta\ + (z+c)\ \cos\varphi\ \sin\theta \\
Z &= (x-a)\ \cos\varphi\ + (z+c)\ \sin\varphi
\end{aligned}
$$

Le velocità relative del corpo nelle tre direzioni ortogonali sono:

$$
\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} = \xi = \\
= \sin\phi\ \cos\theta\frac{dx}{dt} - \sin\theta\frac{dy}{dt} + \cos\varphi\ \cos\theta\frac{dz}{dt}
$$

$$
\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} = \eta = \\
= \sin\varphi\ \sin\theta\frac{dx}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt} + \cos\ \varphi\ \sin\theta\frac{dz}{dt}
$$

$$
\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} = \zeta = \ -\cos\varphi\frac{dx}{dt} + \ \sin\varphi\frac{dz}{dt}
$$

Detta u la velocità relativa:

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

E posta la resistenza dell'aria, secondo la legge di Newton, $= Mu^2$, che si decompone in: $Mu\xi$, $Mu\eta$, $Mu\zeta$, indicato con p il peso e posto $r^2 = X^2 + Y^2 + (Z-q)^2$, per la legge fondamentale della dinamica, le equazioni del movimento nel sistema $CXYZ$ sono:

$$0 = \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{pX}{r} + Mu\xi$$

$$0 = \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{py}{r} + Mu\eta$$

$$0 = \frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{p(Z-q)}{r} + Mu\zeta$$

Sostituendo a $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$, e a ξ, η, ζ, le loro espressioni e ponendo la velocità angolare terrestre $n = \frac{d\theta}{dt}$, dopo alcune manipolazioni Gauss perviene alle equazioni:

$$0 = \frac{dx^2}{dt^2} - 2n \sin\varphi \frac{dy}{dt} + (x-a)\left(\frac{p}{r} - n^2\right) + \cos\varphi\left(\frac{pq}{r} - n^2 Z\right) + Mu\,\frac{dx}{dt}$$

$$(*) \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\,\sin\varphi\frac{dx}{dt} + 2n\,\cos\varphi\frac{dz}{dt} + y\left(\frac{p}{r} - n^2\right) + Mu\,\frac{dy}{dt}$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} - 2n\cos\varphi\frac{dy}{dt} + (z+c)\left(\frac{p}{r} - n^2\right) - \sin\varphi\left(\frac{pq}{r} - n^2 Z\right) + Mu\,\frac{dz}{dt}$$

Se il corpo è in quiete rispetto al riferimento mobile ($dx = dy = dz = 0$), il corpo è sollecitato dalla forza di componenti, rispetto ai piani x, y, z:

$$(**)\qquad (x-a)\Big(\frac{p}{r}-n^2\Big)+\cos\varphi\left(\frac{pq}{r}-n^2Z\right),\ y\left(\frac{p}{r}-n^2\right),$$

$$(z+c)\left(\frac{p}{r}-n^2\right)-\sin\varphi\left(\frac{pq}{r}-n^2Z\right)$$

invece se il corpo è in movimento, alla resistenza dell'aria, che agisce secondo le forze:

$$Mu\,\frac{dx}{dt},\ Mu\,\frac{dy}{dt},\ Mu\,\frac{dz}{dt}$$

si devono aggiungere, secondo le medesime direzioni, le tre forze che sono responsabili della deviazione del grave dal filo a piombo:

$$-2n\ \sin\varphi\,\frac{dy}{dt},\ 2n\ \sin\phi\frac{dx}{dt}+2n\ \cos\phi\frac{dz}{dt},\ \ -2n\ \cos\varphi\,\frac{dy}{dt}$$

A questo punto Gauss introduce delle approssimazioni: il peso apparente agente sul corpo a riposo è supposto costante per tutta l'altezza di caduta e di direzione sempre parallela alla verticale, cioè all'asse z. Pertanto alle componenti (**) della prima forza Gauss sostituisce rispettivamente 0, 0, g.

Pertanto le tre equazioni fondamentali (*) diventano:

$$0=\frac{dx^2}{dt^2}-2n\ \sin\varphi\,\frac{dy}{dt}+Mu\,\frac{dx}{dt}$$

$$0=\frac{d^2y}{dt^2}+2n\ \sin\varphi\,\frac{dx}{dt}+2n\ \cos\varphi\,\frac{dz}{dt}+Mu\,\frac{dy}{dt}$$

$$0=\frac{d^2z}{dt^2}-2n\ \cos\varphi\,\frac{dy}{dt}+\ g\ +Mu\,\frac{dz}{dt}$$

Gauss ottiene così un sistema differenziale facile da risolvere per la caduta nel vuoto: posto cioè $M=0$, e imposte le condizioni iniziali, in particolare che il corpo non ha alcuna velocità iniziale relativa trova:

$$x = \frac{g}{2n} \cos\varphi \ \sin\varphi \ \left(nt^2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \ \cos 2nt \right)$$

$$y = \frac{g}{2n} \ \cos\varphi \ \left(t - \frac{1}{2n} \ \sin 2nt \right)$$

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 + \frac{g}{2n} \ \cos^2\varphi \ \left(nt^2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \ \cos 2nt \right)$$

e sviluppando le funzioni trigonometriche in serie:

$$x = \frac{1}{6} \ \cos\varphi \ \sin\varphi \ g \, n^2 \, t^4 \ \ldots$$

$$y = \frac{1}{3} \ \cos\varphi \ g \ n \ t^3 \ \ldots$$

$$z = -\ \frac{1}{2} \, g \, t^2 + \frac{1}{6} \ \cos^2\varphi \ g \ n^2 \, t^4 \ \ldots$$

dove la prima formula fornisce la *deviazione meridionale*, la seconda quella *orientale* e la terza la legge della *caduta verticale*. Anche se formalmente diversa, la seconda espressione è equivalente alla formula data da Laplace per la deviazione orientale nel vuoto (se si prescinde dalla differenza tra latitudine geografica e geocentrica), e corrisponde ai due terzi di quella di Guglielmini. Per una caduta di qualche secondo, nt non raggiunge che alcuni minuti d'arco al massimo, pertanto x e la seconda parte di z sono trascurabili e si può scrivere:

$$y = \ -\frac{2}{3} \ z \ \cos\varphi \ \ nt$$

Per la caduta nell'aria, integrando le equazioni differenziali precedenti tenendo conto della resistenza dell'aria, e considerati gli sviluppi in serie delle espressioni di x, y, z, secondo le potenze di n ed M, la parte principale di x è, come prima:

$$x = \frac{1}{6} \cos\varphi \ \ \sin\varphi \ \ g \, n^2 \, t^4$$

ed è dunque trascurabile, mentre y e z , trascurando i quadrati e le potenze superiori di n e M, sono espressi da:

$$y = \frac{1}{3}\cos\varphi\, g\, n\, t^3 - \frac{1}{12}\cos\varphi\, Mg^2nt^5$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{12}M\, g^2t^4$$

La deviazione meridionale dopo Gauss

Mentre Laplace si era limitato a riconoscere che, nell'ambito delle sue approssimazioni, la deviazione meridionale era nulla, Gauss aveva dato una formula della deviazione meridionale nel vuoto, approssimata al termine nel quadrato della velocità angolare:

$$\frac{1}{6}g\cos\varphi\sin\varphi\; t^4\omega^2$$

Tale formula venne poi sostanzialmente confermata da Siméon Denis Poisson ([21]) e da molti autori successivi anche se alcuni (M. Jullien, Ph. Gilbert) avevano osservato che il coefficiente di ω^2 non era più significativo, essendo stati trascurati termini derivanti dalla variazione della gravità, che potevano diventare rilevanti a quel grado di approssimazione.

Anche se gli esperimenti sulla deviazione dei gravi persero di interesse in relazione alla verifica sperimentale della rotazione terrestre, dopo lo spettacolare esperimento di Léon Foucault, realizzato nel Panthéon di Parigi con un pendolo lungo 67 metri (1851), la formula della deviazione lungo il meridiano continuò ad essere oggetto di indagine. Altri esperimenti sulla caduta dei gravi furono portati avanti, poiché, in contrasto con la teoria, essi sembravo manifestare una debole, ma non trascurabile, deviazione a sud. Citiamo solo i più celebri condotti in pozzi di miniera da Ferdinand Reich in Sassonia (1831) e da

([21]) Poisson [1838-39].

W. W. Rundell in Cornovaglia (1848), (22) quelli condotti da Edwin Herbert Hall nel laboratorio di Harvard nel 1902, con piccole sfere di bronzo da un'altezza di 23 metri, (23) e quelli di Johann Georg Hagen, direttore della Specola Vaticana, del 1912, utilizzando però una macchina di Atwood per rallentare la caduta. (24)

A tener conto della variazione della gravità con l'altezza fu Magnus de Sparre, considerando la terra sferica e omogenea. In tal caso è da notare che la forza di gravità all'esterno della Terra varia inversamente al quadrato della distanza dal centro, mentre all'interno della Terra varia proporzionalmente a tale distanza, quindi teoricamente la caduta in pozzi di miniera segue una legge diversa da quella all'interno di torri o campanili. Per la caduta da una torre (nel nostro emisfero) De Sparre trovava una debole deviazione a nord, per quella all'interno di un pozzo una deviazione a sud. Criticato da Maurice Fouché, De Sparre estese il calcolo a terra ellissoidale trovando una deviazione a sud pari a: $(\omega^2/23)\sin\lambda\cos\lambda\, g\, t^4$. Fouché considerò un'altra quantità variabile con l'altezza: la deviazione del filo a piombo, che se molto lungo, poiché le linee di forza non sono rettilinee, indica una direzione diversa da quella della tangente nel punto d'attacco. Maurice Rudski osservò che a quel punto terra e corpo non potevano considerarsi un sistema dinamico isolato ma bisognava tener conto della attrazione lunare, e di altri fattori non più trascurabili come la resistenza dell'aria. (25)

Ulteriori raffinamenti furono portati da William Roever negli anni 1911-12, tenendo conto anche dell'effetto prodotto dalla variazione della forza gravitazionale e della forza assifuga sul filo a piombo, che davano un valore cinque volte superiore a quello di Gauss per la

(22) In quegli anni si discusse anche della possibile influenza del campo magnetico terrestre sulla deviazione meridionale del filo a piombo (H. C. Oersted, J. Hershell, W. Grove).

(23) Hall [1903], [1904], [1910].

(24) Hagen [1911-12].

(25) De Sparre [1905], Fouché [1905], Rudzki [1906]. Tra Rudski, Denizot e altri si svolgeva in quegli anni un dibattito sulla corretta interpretazione della forza di Coriolis.

deviazione lungo il meridiano. Altre trattazioni nei lavori di R. S. Woodward e Alfred Denizot del 1913. (26)

Un calcolo che corregge quello di Gauss si può fare considerando il problema della deviazione come un caso particolare di quello che viene chiamato il problema dei due corpi o problema di Keplero, ossia considerando Terra e corpo che cade come un sistema di un pianeta e un satellite cui viene applicata la legge delle aree. Questo calcolo, di interesse puramente teorico poiché prescinde dalla resistenza dell'aria come da altri fattori esterni e presuppone la terra sferica e di densità a simmetria sferica, è stato proposto in tempi recenti da Jacques Gapaillard. (27)

BIBLIOGRAFIA

P. Acloque, *Histoire des expériences pour la mise en évidence du mouvement de la Terre*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 4 (1982).

A. Armitage, *The Deviation of Falling Bodies*, Annals of Science, 5 (1947), 342–351.

J. F. Benzenberg, *Versüche über das Gesetz des Falls, über den Widerstand der Luft und über die Umdrehung der Erde, nebst der Geschichte aller früheren Versüche von Galiläi bis auf Guglielmini*, Dortmund, Mallinckrodt, 1804.

D. Bertoloni Meli, *St Peter and the rotation of the earth. The problem of fall around 1800*, in: *An investigation of difficult things. Essays on Newton and the History of Exact Sciences*, ed. by P. M. Harman and A. E. Shapiro, Cambridge University Press, 1992, 421–447.

T. Bonati, *Di un esperimento proposto per iscoprire se realmente la Terra stia quieta oppur si muova,* 1791.

T. Bonati, *Carteggio scientifico, Lorgna, Canterzani, Frisi, Saladini, Calandrelli, Venturi*, a cura di M. T. Borgato - A. Fiocca - L. Pepe, Firenze Olschki, 1992.

M. T. Borgato - L. Pepe, *Giambattista Guglielmini: la biblioteca di uno scienziato nell'Italia napoleonica*, Ferrara, Corbo, 1999.

(26) Roever [1911], [1912], Woodward [1913], Denizot [1913].

(27) Gapaillard [1988] pp. 91-105. Anche questa teorizzazione ha dei precedenti storici: Giuseppe Lorenzoni, *Sulla deviazione dal piede della perpendicolare di un grave liberamente caduto dalla superficie della terra sul fondo di una cava*, Atti del R. Istituto Veneto, t. VII, (1889).

M. T. BORGATO, *La prova fisica della rotazione della Terra e l'esperimento di Guglielmini*, in: *Copernico e la questione copernicana in Italia*, a cura di L. Pepe, Firenze, Olschki, 1996, 201–261.

A. BRACCESI, *Un dimenticato experimentum crucis: la prova fisica della rotazione terrestre ottenuta nel 1791 da G. B. Guglielmini...*, Giornale di astronomia, **9**, n. 4 (1983), 319–332.

P. CHARBONNIER, *Étude de l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles dans l'air*, Journal de l'École Polytechnique, 2e série, cah. 12 (1908), 87–196.

G.-G. CORIOLIS, *Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps.* Journal de l'Ecole Polytechnique, **15** (1835), 142–154.

A. DENIZOT, *Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung*, Leipzig, Teubner, 1913, 42–58.

M. DE SPARRE, *Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **33** (1905), 65–72; *Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre*, Ivi, 146–149.

A. FIOCCA, *The Southern Deviation of Freely Falling Bodies: from Robert Hooke's Hypothesis to Edwin H. Hall's Experiment (1679-1902)*, Physis, **35**, 1 (1998), 51–83.

M. FOUCHÉ, *Sur la déviation des graves et les champs des forces*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **33** (1905), 150–156.

P. GALLUZZI, *Galileo contro Copernico*, Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, **2** (1977), 87–148.

J. GAPAILLARD, *Le mouvement de la Terre. La détection de sa rotation par la chute des corps*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, **25** (1988). *Et pourtant, elle tourne! Le mouvement de la Terre*, Paris, Éditions du Seuil, 1993.

C. F. GAUSS, *Werke,* Göttingen, 1863-1929, vol. V, 495–503.

PH. GILBERT, *Les preuves mécanique de la rotation de la Terre*, Bulletin des Sciences Mathématiques et astronomiques, s. II, **6** (1882), 189–223.

G. B. GUGLIELMINI, *Carteggio De diurno Terrae Motu*, a cura di M. T. Borgato, A. Fiocca, Firenze, Olschki, 1994.

G. B. GUGLIELMINI, *Riflessioni sopra un nuovo esperimento in prova del diurno moto della Terra*, Roma, 1789. *De diurno Terrae motu*, Bologna, 1792.

J. C. HAGEN, *La rotation de la Terre. Ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles*, Tipografia Poliglotta Vaticana, 1911-12.

H. HALL, *Do Falling Bodies Move South?*, Phys. Rev. Series I, **17** (1903) 179–190, 245–254; *Experiments on the Deviation of Falling Bodies*, Proceeding of the American Academy of Arts and Sciences, **39** (1904), 341–349; *Air Resistance to Falling Inch Spheres*, Ivi, **45** (1910), 379–384.

D. T. WHITESIDE, *Newton's Early Thoughts on Planetary Motion: a Fresh Look*, The British Journal for the History of Science, **2**, p. 2 n. 6 (1964), 117–137.

M. HOSKIN (ed.), *The General History of Astronomy*, Cambridge, Cambridge University Press, vol. 2, 1995-2003.

M. JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1866-67.

A. KOYRÉ, *A Documentary History of the Problem of Fall from Kepler to Newton*, Transactions of the American Mathematical Society, n. s. 45, p. 4 (1955), 329–395 (trad. franc. J. Tallec: *Chute des corps et mouvement de la Terre de Kepler à Newton*, Paris, Vrin, 1973); *Newtonian Studies*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1965.

J.J. LALANDE, *Astronomie*, 3ª ed., Paris, Didot, 1792.

P. S. LAPLACE, *Sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur*, Bulletin de la Societé Philomatique, **3** (1803), 109–115. *Traité de Mécanique céleste*, Paris, Courcier, 1805, tomo IV, 294–305. *Œuvres complètes*, Paris, Gautier-Villars, 1878-1912 (voll. IV e XIV).

J. LHONE, *Hooke versus Newton. An analysis of the Documents in the Case on Free Fall and Planetary Motion*, Centaurus, **7**, n. 1 (1960), 7–51.

S. D. POISSON, *Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre,* Journal de l'Ecole Polytechnique, **16** (1838-39), cahier 26, 1–68.

W. H. ROEVER, *The Southerly Deviation of Falling Bodies*, Transaction of The A.M.S, **12** (1911), 335–353; *The Southerly and Easterly Deviations of Falling Bodies for an Unsymmetrical Gravitational Field of Force*, Ivi, **13** (1912), 469–490.

M. P. RUDZKI, *Note sur la chute des corps pesants*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **34** (1906), 163–164.

G. SALADINI, *De meridionali gravium libere decidentium declinazione,* Atti Acc. Fisiocritici Siena, **7** (1794) 55–60. *Memoria circa la deviazione meridionale de' gravi liberamente cadenti*, Mem. Mat. Fis. Soc. Ital., **9** (1802) 352–369. *Memoria II sulla deviazione dei gravi liberamente cadenti,* Mem. Mat. Fis. Soc. Ital., **12**, parte I (1805), 292–295.

G. TABARRONI, *Giovanni Battista Guglielmini e la prima verifica sperimentale della rotazione terrestre (1790)*, Angelicum, **60** (1983), 462–486.

G. A. TADINI, *Intorno alla deviazione de' corpi cadenti dall'alto*, Avanzamenti della medicina e fisica (Giornale Brugnatelli), 1796, t. I, 171–193; *Volgarizzamento del calcolo della deviazione orientale*, Ivi, t. III, 123–143; *Della deviazione australe e d'altri minuti articoli di calcolo*; Ivi, t. IV, 146–172. *Quotidiana Terrae conversio, devio corporum casu demonstrata,* Mediolani, 1815.

R.S. WOODWARD, *The Orbits of Freely Falling Bodies*, The Astronomical Journal, **28** (1913), 17–29.

Maria Teresa Borgato,
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara