BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

CLAUDIO BERNARDI, PAOLO FRANCINI

Ordinare numeri e ordinare parole

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.3, p. 441–464.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_3_441_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Dicembre 2007, 441-464

Ordinare numeri e ordinare parole

CLAUDIO BERNARDI - PAOLO FRANCINI [1]

0. – Cifre e sequenze di cifre.

Fin dalle Scuole Elementari si impara ad impiegare la consueta notazione posizionale, in cui numeri naturali e numeri decimali sono rappresentati con sequenze di cifre, cioè di simboli in un certo alfabeto. Tale notazione si rivela adatta a vari scopi, in particolare per *confrontare* due numeri: basta guardare le due scritture per stabilire rapidamente quale dei due numeri è maggiore dell'altro. Una situazione concettualmente analoga si presenta quando si ordinano le parole secondo l'ordine alfabetico: anziché cifre e numeri abbiamo lettere e parole, ma c'è sempre l'idea che l'ordinamento fra i simboli base permette di confrontare due sequenze finite. Tutto appare semplice e naturale, tanto che a scuola non si dedica troppo tempo all'argomento.

In realtà, se proviamo ad esplicitare con precisione i criteri di confronto, il discorso si fa più complesso e forse meno spontaneo. In particolare, i tre criteri che si introducono negli insiemi dei numeri naturali, dei numeri decimali limitati, delle parole, sono *nettamente diversi tra loro* (e quindi almeno due non sono così naturali...). Basti notare che, pur considerando sempre sequenze finite, l'ordine dei naturali è discreto, l'ordine dei decimali è denso, l'ordine alfabetico non è né discreto né denso.

In questo articolo cercheremo di approfondire l'argomento, sia su un piano teorico, sia dal punto di vista didattico, mettendo in evidenza legami con altri concetti matematici. Invece dell'abituale insieme di

[1] Lavoro realizzato nell'ambito del programma di ricerca cofinanziato dal MIUR «Problemi di insegnamento-apprendimento in matematica: significati, modelli, teorie» (prot. 2003011072).

cifre {0, 1, ..., 9}, per semplicità faremo uso principalmente di un alfabeto con 2 soli simboli. Nel caso dei numeri, useremo quindi il sistema binario e ci serviremo dell'alfabeto $\{0, 1\}$. Disponendo di questo alfabeto si rappresentano, mediante sequenze o parole, sia i numeri naturali, sia i «decimali» (che in base 2 andrebbero forse chiamati in altro modo...), per mezzo di scritture terminate o non terminate.

L'ordinamento delle cifre $0 < 1$ induce un ordine fra le sequenze di cifre, corrispondente all'abituale ordine numerico. Ma le differenti descrizioni formali (un logico direbbe *sintattiche*) degli ordinamenti delle sequenze di cifre, come dicevamo, risultano più laboriose di quanto non appaia dall'uso intuitivo che se ne fa. Nella pratica, ci si appoggia molto spesso al significato concreto dei numeri: ciò può essere causa di difficoltà e di misconcezioni in quegli studenti che si aggrappano a criteri sintattico-procedurali. Alla fine dell'articolo vedremo alcune considerazioni didattiche in tal senso.

Richiamiamo le definizioni di alcuni termini di uso corrente, che avremo modo di impiegare nel seguito.

Per *parola* in un dato alfabeto, intenderemo una sequenza, generalmente finita (ma nulla vieta che sia infinita), di simboli appartenenti all'alfabeto considerato.

Se A e B sono insiemi ordinati, possiamo introdurre nel prodotto cartesiano $A \times B$ l'ordine *lessicografico*, definito da $(a, b) < (a', b')$ se $a < a'$ oppure $a = a'$ e $b < b'$. Possiamo estendere questa nozione al prodotto di un numero qualsiasi di insiemi.

Un ordine si dice *simmetrico* se è isomorfo al proprio ordine inverso.

Un ordine è *denso* se, per ogni coppia di elementi distinti $a < b$, c'è un elemento x con $a < x < b$, mentre è *discreto* se ogni elemento che abbia un successore [o un predecessore] ha un successore immediato [o un predecessore immediato].

Un *buon ordine* è un insieme ordinato dove ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo, o, equivalentemente, non esistono successioni infinite strettamente decrescenti.

Ricordiamo anche un risultato classico di Cantor, secondo cui ogni insieme numerabile totalmente ordinato, denso, privo di massimo e di minimo è isomorfo all'insieme $\boldsymbol{Q}$ dei razionali.

1. – Ordine su parole di lunghezza fissata.

L'unico ordinamento davvero spontaneo indotto dalla relazione $0 < 1$ si introduce nell'insieme delle parole di una fissata lunghezza (finita), *ma non è totale*: si tratta dell'ordine di *dominanza*. Date due parole X e Y della stessa lunghezza, si dice che la parola X *domina* la Y se, per ogni coppia di cifre che occupano la stessa posizione, la cifra di X è maggiore o uguale a quella di Y. (2) Questo ordine dà luogo ad un'algebra di Boole finita. (3) In effetti, se n è la lunghezza fissata, possiamo considerare un insieme A con n elementi $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e, quindi, identificare ogni parola X di lunghezza n con il sottoinsieme di A dato dagli elementi che corrispondono alla cifra 1 nella scrittura di X. Si trova così che l'insieme ordinato delle parole di lunghezza n è isomorfo all'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$, ordinato dall'inclusione. Naturalmente, per ottenere questo isomorfismo è essenziale limitarsi ad un alfabeto con due soli simboli.

Per rendere totale l'ordine, una possibilità è di scegliere un verso, attribuendo quindi maggiore importanza alle prime ovvero alle ultime cifre: nei due casi si ottiene così l'ordine lessicografico (detto talvolta ordine lessicografico diretto), ovvero l'ordine lessicografico inverso. In entrambi i modi abbiamo un insieme finito totalmente ordinato; pertanto l'ordine risulta discreto e simmetrico (l'isomorfismo con l'ordine inverso consiste nello scambiare gli 0 e gli 1).

(2) L'ordine di dominanza è «spontaneo» nel senso che mette d'accordo tutti. Chiunque preferirebbe una vacanza lunga, divertente e gratuita, piuttosto che una breve, noiosa e carissima (come già sosteneva un comico di qualche anno fa). I dubbi, e i differenti criteri di scelta, sorgono quando invece l'alternativa è, per esempio, tra una vacanza breve, divertente e carissima ed una lunga, noiosa e gratuita; oppure quando entra in gioco un'altra informazione per una sola delle due vacanze (e quindi dobbiamo confrontare una terna con una quaterna).

(3) Infatti, in primo luogo esistono un minimo (la parola con tutti 0) ed un massimo (la parola con tutti 1). Nell'insieme delle parole, si definiscono due operazioni binarie, $\wedge$ e $\vee$, associando ad ogni coppia X, Y da un lato la massima parola minore di X e Y (indicata con $X \wedge Y$), dall'altro la minima parola maggiore di X ed Y (indicata con $X \vee Y$). Tali operazioni godono delle proprietà che definiscono le algebre di Boole: in particolare, per ogni parola X esiste una parola X' (quella che si ottiene scambiando gli 0 con gli 1 e viceversa) tale che $X \wedge X'$ è il minimo mentre $X \vee X'$ è il massimo.

Nell'ordine lessicografico, per trovare la successiva di una parola, basta sommare 1 al numero naturale che corrisponde alla parola letta nel sistema binario. Chiaramente c'è un elemento minimo (tutti 0) e uno massimo (tutti 1), e si tratta di un buon ordine.

2. – Ordine alfabetico su parole di lunghezza variabile.

Possiamo confrontare anche parole (finite) di lunghezze differenti, secondo l'abituale *criterio alfabetico* del dizionario. Al posto delle cifre 0 e 1, ci serviremo dell'alfabeto $\{a, b\}$ (con $a < b$), che appare più familiare in questo contesto. Nell'ordine del dizionario, se si aggiungono altre lettere in coda a una parola X, si ottiene una parola che segue X. Più precisamente, per stabilire quale fra due parole precede l'altra, si confrontano, come nel caso dell'ordine lessicografico, le lettere che compaiono nelle posizioni corrispondenti delle due parole, aggiungendo però che, se una di esse si interrompe prima dell'altra, allora quest'ultima è la maggiore.

L'ordine alfabetico, per quanto familiare, ha in realtà una struttura abbastanza complicata. Intanto c'è una parola minima (la parola vuota) ma non c'è una parola massima. Ogni elemento ha un successore immediato, ottenuto aggiungendo una a in coda (quindi l'ordine non è denso).

Se una parola finisce per a, essa ha anche un predecessore immediato, mentre non ce l'ha se finisce per b. In effetti, *l'insieme delle parole che terminano con b ha ordinamento isomorfo* a $\boldsymbol{Q}$. Si tratta infatti di un insieme totalmente ordinato numerabile, denso e privo di massimo e minimo.

Per dimostrare la densità, consideriamo due parole Xb e Yb, con $Xb < Yb$. Se Xb è una parte iniziale di Y, allora si ha $Xb < Yab < Yb$; in caso contrario, c'è una posizione dove in Xb compare a, mentre in Yb compare b: in tal caso si ha $Xb < Xbb < Yb$.

Ciò implica, tra l'altro, che l'ordinamento alfabetico non è discreto, e che non è un buon ordine: per esempio si ha la successione decrescente $b > ab > aab > aaab > \dots$

Una stranezza dell'ordine alfabetico.
Se X e Y sono due parole con $X < Y$ e se W è a sua volta una parola, allora ovviamente $WX < WY$. Può sembrare altrettanto plausibile che da $X < Y$ segua $XW < YW$. Ma quest'ultima implicazione non vale: ad esempio, si ha $ba < baa$, e tuttavia $baab < bab$.
Per fare un esempio relativo alla lingua italiana: *per* precede *perdo*, ma, aggiungendo la sillaba *no*, troviamo che *perno* segue *perdono*. O ancora: *ma* precede *maggio*, tuttavia *mare* viene dopo *maggiore*.
Discorso analogo per le regole di cancellazione: per quanto detto si ha che $WX < WY$ implica $X < Y$, mentre $XW < YW$ non implica $X < Y$ (basta rifarsi all'esempio precedente).

La struttura dell'ordine alfabetico può essere descritta in modo sintetico: si tratta di $\boldsymbol{N}$ seguito da $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{N}$, dove $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{N}$ è ordinato lessicograficamente.

Il segmento iniziale $\boldsymbol{N}$ corrisponde alle parole formate solo da a, mentre $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{N}$ corrisponde alle parole contenenti almeno una b. Ciascuna di tali parole W si può scrivere nella forma $W = I_W\, b\, A_W$, dove I_W è la parte iniziale di W, fino all'ultima cifra b (esclusa) e A_W è la coda (eventualmente vuota) che contiene solo cifre a. Si è detto prima che l'insieme delle parole che terminano per b ha ordine isomorfo a $\boldsymbol{Q}$. Associando a W la coppia $(q; n)$, dove q è il numero razionale che corrisponde a $I_W\, b$ secondo tale isomorfismo ed n è il numero di a presenti in A_W, si ottiene un isomorfismo d'ordine tra l'insieme delle parole con almeno una b e $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{N}$.

Questa caratterizzazione chiarisce l'intreccio, nell'ordine alfabetico, che abbiamo riscontrato fra aspetti discreti e densi.

L'insieme ordinato Λ di tutte le parole finite soddisfa l'equazione

$$\Lambda = \boldsymbol{N} + (\boldsymbol{Z}^{-} \times \Lambda),$$

dove il segno «=» è da intendersi come isomorfismo, il «+» rappresenta la somma ordinata, $\boldsymbol{Z}^{-}$ indica l'ordinamento inverso dei naturali. Dopo la parola vuota, viene la successione di elementi a, aa, aaa, ... (il segmento iniziale isomorfo a $\boldsymbol{N}$). Una parola V in cui compaia almeno una b avrà la forma $A_V\, bW$, dove A_V è l'inizio (eventualmente vuoto) fatto di sole a e W è a sua volta una parola finita. Possiamo denotare tale elemento con la coppia $(n; W)$, indicando con n il numero naturale che conta le a iniziali. Troviamo così l'isomorfismo citato. Occorre considerare $\boldsymbol{Z}^-$ e non $\boldsymbol{N}$ perché più sono numerose le a iniziali e prima viene l'elemento: per esempio, $aabU$, che corrisponde alla coppia $(2, U)$, precede la coppia abV, che corrisponde a $(1, V)$.

Prima di chiudere questo argomento, vale la pena chiedersi se e come vanno modificate le precedenti considerazioni se l'alfabeto comprende 3 o più lettere a, b, c, ... In tal caso, abbiamo comunque all'inizio un segmento iniziale isomorfo a $\boldsymbol{N}$ (si tratta ancora delle parole formate solo da a). D'altra parte, per un ragionamento analogo al precedente, l'insieme delle parole che non finisce per a è ancora denso, privo di minimo e massimo. Ne segue che, sebbene la struttura sembri più complicata, si ottiene ancora $\boldsymbol{N}$ seguito da $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{N}$, cioè la medesima struttura d'ordine delle parole costruite con 2 lettere. Ciò varrebbe anche se le parole fossero costruite con un alfabeto infinito (ordinato come i naturali). Cambia, invece, l'equazione precedente: nel caso di 3 lettere, essa diventa $\Lambda = \boldsymbol{N} + (\boldsymbol{Z}^- \times \{b, c\} \times \Lambda)$. Infatti, ogni parola V dove compaia almeno una b o una c è del tipo $A_V\, xW$, dove A_V contiene solo a, mentre x è uno dei caratteri b o c.

3. – Numeri di Conway di lunghezza finita.

Un ordine diverso per le sequenze finite costruite con due simboli si ritrova nell'ambito dei numeri di Conway, detti anche *numeri surreali*. La situazione è, per certi versi, più naturale rispetto all'usuale ordine alfabetico, se non altro perché ritroviamo la simmetria.

Invece di 0 e 1, o di a e b, usiamo come cifre i segni $-$ e $+$ (che rendono meglio l'idea), assumendo $- < +$. La definizione dell'ordine si può esprimere sinteticamente dicendo che, per ogni parola W (eventualmente vuota), si ha $W- < W < W+$. La situazione richiama l'ordine alfabetico, ma, a differenza di quanto accade nel vocabolario, non è vero che, se una parola si interrompe prima di un'altra, allora quest'ultima è la maggiore; qui occorre distinguere: se aggiungiamo in coda ad una parola W il segno $-$ otteniamo una parola che precede W, mentre aggiungendo il segno $+$ otteniamo una parola che segue W. A parte ciò, le parole vanno lette e ordinate ancora in maniera alfabetica.

Quel che ne risulta somiglia ad una sorta di «tiro alla fune» tra i segni $-$ e $+$, dove i primi strattoni dell'uno o dell'altro non possono mai essere del tutto recuperati successivamente, come se i colpi perdessero via via di intensità. Scambiare ogni cifra $-$ con $+$, e viceversa, ha l'effetto di portare ciascun numero nel proprio opposto.

In termini numerici, l'ordine si spiega con questa lettura: la sequenza iniziale di simboli uguali rappresenta altrettante unità, positive o negative a seconda del segno. Dalla prima variazione in poi, il valore di ogni cifra dimezza rispetto alla precedente, mantenendo ciascuna il rispettivo segno. Le scritture ottenute vanno lette additivamente, sommando i valori attribuiti a ciascuna cifra. Per esempio, la parola $++-++$ va interpretata come $1+1-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=1{,}875$. Si ottengono quindi tutti i razionali *diadici*, vale a dire le frazioni con denominatore potenza di 2. Ognuno di essi ha un'unica rappresentazione in questa forma. L'ordine delle parole coincide con l'ordine dei numeri corrispondenti (quindi è isomorfo a $\boldsymbol{Q}$).

Per ritrovare *tutti* i numeri surreali, occorre rimuovere la limitazione che il «tiro alla fune» abbia durata finita, e anzi accettare come lunghezza della sequenza un qualsiasi ordinale (rimandiamo al classico [4] per un'esposizione dettagliata). La totalità dei numeri di Conway comprende in un'unica classe tutti gli ordinali, i reali, i reali non standard (con infinitesimi e infiniti).

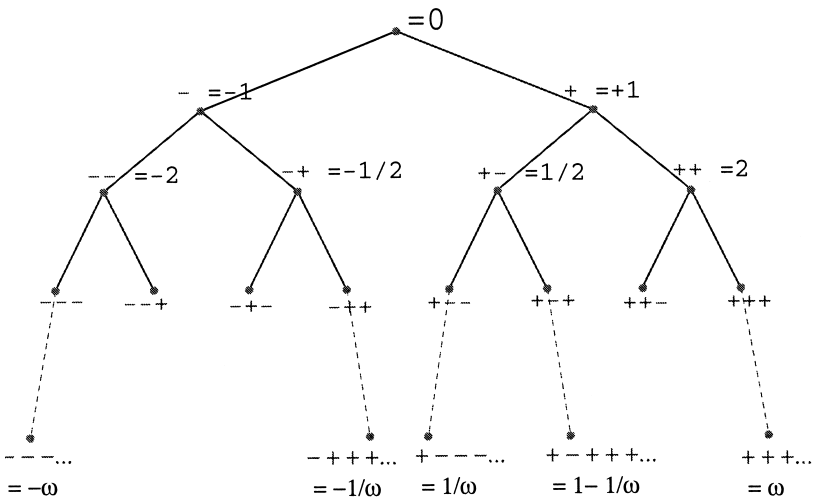

Fig. 1. – Albero genealogico dei numeri di Conway, fino alla generazione ω.

L'ordinamento dei numeri di Conway si può illustrare con un diagramma ad albero (fig. 1), ripreso da [4]. Nell'albero, ogni livello (cioè l'insieme dei nodi ad una fissata distanza dalla radice) corrisponde alla lunghezza della scrittura dei numeri che compaiono in quel livello. Possiamo immaginare un livello come la data di nascita dei numeri che contiene: il giorno 0 abbiamo solo il numero 0 (vale a dire la sequenza vuota), il giorno 1 compaiono -1 e 1, il giorno 2 anche -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 2, e così via. [Il significato dell'ultima riga disegnata nell'albero verrà illustrato in maniera più precisa nel paragrafo n° 8.]

Qual è il minimo fra i seguenti «numeri»?

11   101   1010

La domanda sembra banale, perfino per un bambino delle Elementari. Tuttavia, la risposta varia a seconda di come leggiamo le sequenze. Se si tratta di numeri naturali, il minimo è 11. Se si tratta delle parti decimali di numeri fra 0 ed 1, il minimo è dato dalle altre due scritture, che sono uguali fra loro: 0,101 = 0,1010. Se pensiamo ai numeri di Conway, allora, scrivendo $-$ al posto di 0 e $+$ al posto di 1, le parole diventano $++$, $+-+$, $+-+-$: stavolta il minimo è $+-+-$, cioè 1010.

Una situazione simile si presenta con la domanda:

Quanti «numeri» sono compresi fra 1 e 11?

Se si parla di numeri naturali (scritti in notazione binaria), c'è un solo numero nelle condizioni richieste, vale a dire il 10. Se pensiamo 1 e 11 come parti dopo la virgola di numeri fra 0 e 1, esistono infiniti numeri compresi fra 0, 1 e 0, 11, come 0, 101, 0, 1001, e così via. Curiosamente, però, l'unico numero prima trovato (che ora scriviamo 0, 10), non va più bene perché coincide con uno dei due estremi. Se poi passiamo ai numeri di Conway, la situazione è ancor più curiosa: esistono infiniti numeri tra quelli che ora indichiamo con $+$ e $++$, ma non va bene nessuna delle parole trovate nell'ambiente dei numeri decimali: per esempio 0, 101 corrisponde a $+-+$, che è minore di $+$.

In effetti, con le notazioni usuali abbiamo:

- nei numeri naturali $1 < 11 < 101$,
- nei numeri decimali $0{,}1 < 0{,}101 < 0{,}11$,
- nei numeri di Conway $+-+ < + < ++$,

anche se le tre parole considerate, al di là delle specifiche convenzioni di scrittura, sono composte dalla stessa sequenza di cifre.

4. – Numeri naturali e decimali limitati.

Un ordinamento estremamente familiare sulle parole finite è quello dei *numeri naturali*. L'ordine è discreto. Una sequenza iniziale di simboli 0 in una parola non altera il valore numerico associato alla parola: ossia, l'insieme delle parole è considerato a meno dell'equivalenza generata dalle coppie $(W; 0W)$, al variare di W tra le parole finite.

Date due scritture binarie finite senza nessuno 0 iniziale, per determinare quale rappresenta un intero maggiore, è necessario prima confrontare le loro lunghezze. Se una delle due è più lunga, essa è maggiore. Se hanno la stessa lunghezza, si ricorre all'ordine lessicografico.

Una descrizione più sintetica del confronto fra due parole consiste nell'aggiungere eventuali cifre uguali a 0 nelle posizioni iniziali, in modo da «pareggiare» le lunghezze, e quindi seguire l'ordine lessicografico.

Un ordinamento decisamente diverso, sul piano sia sintattico che strutturale, si ottiene leggendo le parole finite come parti dopo la virgola dei numeri «decimali» limitati, compresi tra 0 e 1. In questo caso l'aggiunta di cifre uguali a 0 in coda a una parola non modifica l'interpretazione numerica: pertanto stiamo considerando l'insieme delle parole finite a meno dell'equivalenza generata dalle coppie $(W; W0)$, al variare di W tra le parole finite. Per confrontare due parole, occorre prima pareggiare le loro lunghezze aggiungendo eventuali 0 in coda, e poi seguire l'ordine lessicografico. Un metodo alternativo è quello di eliminare gli eventuali 0 in coda ad entrambe le parole, e quindi ricorrere all'ordine alfabetico.

Visto che, tranne le parole corrispondenti al numero 0, tutte le altre devono contenere almeno un 1, l'insieme dei decimali limitati (privato di 0) rientra nella struttura, già esaminata al punto 2, formata dall'insieme delle parole che terminano con 1. Si tratta quindi di un insieme denso e numerabile, con ordine isomorfo a $\boldsymbol{Q}$ (in effetti abbiamo ancora a che fare con i razionali diadici). La struttura d'ordine rimarrebbe la stessa, naturalmente, anche adottando basi diverse da quella binaria, e perfino se disponessimo di un alfabeto con infinite cifre differenti.

Riassumiamo alcune delle proprietà viste in una tabella, relativa a diversi criteri con sui si possono ordinare parole di *lunghezza finita* su un *alfabeto finito*.

	simboli base dell'alfabeto	elementi diversi sono identificati	la lunghezza è fissata	l'ordine è simmetrico	l'ordine è discreto	l'ordine è denso
ordine di dominanza	$0, 1$	no	sì	sì	sì	no
ordine lessicografico	$0, 1$	no	sì	sì	sì	no
ordine alfabetico	a, b	no	no	no	no	no
ordine nei naturali	$0, 1$	sì	no	no	sì	no
ordine nei decimali	$0, 1$	sì	no	sì	no	sì
ordine di Conway	$-, +$	no	no	sì	no	sì

Notiamo che, fra gli ordini considerati:

- l'ordine di dominanza è l'unico parziale;
- l'ordine dei naturali è l'unico che non si può estendere a parole di lunghezza infinita.

Inoltre, la tabella evidenzia che l'ordine sui numeri naturali e quello sui numeri di Conway (forse l'unico ordinamento totale davvero «naturale») hanno proprietà del tutto diverse.

5. – Alcuni casi infiniti.

L'infinito entra in gioco in questa discussione sia perché possiamo accettare anche parole di lunghezza infinita, sia perché possiamo partire da un alfabeto infinito.

Usiamo il consueto termine «successione» per indicare una parola di lunghezza numerabile, più precisamente una funzione da $\boldsymbol{N}$ (o meglio da ω, il più piccolo ordinale infinito) all'alfabeto. Non considereremo qui le sequenze indicizzate da ordinali più grandi.

Iniziamo con l'ordine di dominanza. Date due successioni X e Y in $\{0, 1\}$, la parola X domina la Y se, per ogni n, abbiamo $X_n \geq Y_n$. La struttura d'ordine che ne deriva è l'algebra di Boole $\mathcal{P}(\boldsymbol{N})$.

È un ordine simmetrico, non denso [due successioni che differiscono solo su una coordinata sono consecutive], che tuttavia induce una topologia non discreta (la successione di elementi $\overline{1}$, $0\overline{1}$, $00\overline{1}$, ... ammette limite $\overline{0}$). (4)

Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, in $\mathcal{P}(\boldsymbol{N})$ sono presenti catene (sottoinsiemi totalmente ordinati) più che numerabili, sebbene sia tutt'altro che agevole immaginarne una. Per vedere ciò, conviene pensare all'insieme $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ che è isomorfo a $\mathcal{P}(\boldsymbol{N})$, data l'equipotenza di $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{Q}$ (ogni biiezione tra due insiemi induce in maniera naturale un isomorfismo tra i rispettivi insiemi delle parti). Adesso, ad ogni numero reale z associamo l'elemento $\boldsymbol{L}_z$ di $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ così definito:

$$\boldsymbol{L}_z = \{x \in \boldsymbol{Q} | \, x \leq z\}.$$

Chiaramente, per $z < z'$ si ha $\boldsymbol{L}_z \subset \boldsymbol{L}_{z'}$: pertanto gli insiemi $(\boldsymbol{L}_z)_{z \in \boldsymbol{R}}$ formano una catena in $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ di cardinalità continua. (5)

A quale criterio corrisponde il seguente elenco dei numeri minori di 8?

0 4 2 6 1 5 3 7

A prima vista, l'ordine appare artificioso e non sembra obbedire a regole «naturali». Eppure...
Consideriamo le successioni formate da 0 ed 1 aventi solo un numero finito di 1. Queste, lette da destra verso sinistra, rappresentano i numeri naturali in notazione binaria (conviene leggere da destra verso sinistra, in modo che a successioni diverse corrispondano numeri distinti: per esempio $001\overline{0}$ $=$ 001000... si legge come 100, mentre $1011\overline{0}$ è 1101). D'altra parte, le stesse successioni si possono interpretare, leggendo le cifre da sinistra verso destra, come le parti dopo la virgola di numeri decimali fra 0 ed 1.
Si stabilisce così una biiezione tra i numeri naturali e i decimali limitati nell'intervallo [0,1). Per esempio, al numero naturale 10010 (cioè al nostro 18) si associa la successione (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, ...), che corrisponde al decimale 0,01001 $\left(\text{il nostro } \dfrac{9}{32}\right)$. In altre parole, identificando i sottoinsiemi di $\boldsymbol{N}$

(4) Come di consueto, la soprallineatura indica una cifra o un gruppo di cifre *periodiche*, ossia che si ripetono indefinitamente.

(5) Questo esempio ci è stato suggerito da Franco Montagna.

con le relative funzioni caratteristiche (pensate a loro volta come successioni), ad ogni sottoinsieme finito A di $\boldsymbol{N}$ si associa da un lato il numero naturale $\sum_{j \in A} 2^j$ e, dall'altro lato, il decimale $\sum_{j \in A} 2^{-(j+1)}$. Nel caso precedente $A = \{1, 4\}$.
Se ora si ordinano nel modo consueto i numeri decimali e quindi si sostituiscono ai decimali i naturali corrispondenti, si trova l'ordine «artificioso» indicato all'inizio per i numeri minori di 8, vale a dire: $0 < 0,001 < 0,01 < 0,011 < 0,1 < 0,101 < 0,11 < 0,111$. In conclusione: con una biiezione «naturale», un ordinamento «naturale» diventa «innaturale».
Induttivamente, l'ordine ottenuto può essere così descritto: una volta messi in fila i naturali minori di 2^k, per ottenere l'elenco ordinato dei naturali minori di 2^{k+1}, si tratta di inserire, immediatamente dopo ciascun numero n, il numero $n + 2^k$.

6. – Ordine lessicografico tra parole infinite - Insieme di Cantor.

Consideriamo l'insieme $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ delle successioni nell'alfabeto $\{0,1\}$, e ordiniamolo lessicograficamente. Tale insieme ha la potenza del continuo. La struttura d'ordine che ne risulta è simmetrica (basta cambiare ogni 0 con 1 e viceversa), ammette massimo (la successione $\overline{1}$, con tutte le cifre uguali ad 1) e minimo (la successione $\overline{0}$, con tutti 0). L'ordine non è denso: ci sono coppie di elementi consecutivi, per esempio $0\overline{1}$ e $1\overline{0}$. Tutti gli elementi che terminano con $0\overline{1}$ hanno un successore immediato, ottenuto scrivendo $1\overline{0}$ al posto di $0\overline{1}$. Si tratta, in effetti, delle uniche coppie di elementi consecutivi, che quindi sono in quantità numerabile.

Se ci restringiamo all'insieme delle successioni con un dato prefisso iniziale (finito), la struttura ottenuta è ancora isomorfa all'intero insieme. Dal punto di vista dell'ordine, abbiamo dunque un insieme *autosimilare* (lo ritroviamo in copie isomorfe all'interno di se stesso, come accade per gli intervalli di retta) e tuttavia contiene dei salti. In particolare, fra due elementi o non è compreso alcun altro elemento, oppure ve n'è un'infinità più che numerabile.

La naturale interpretazione geometrica è l'insieme ternario di Cantor $\boldsymbol{K}$, vale a dire l'insieme dei reali in $[0,1]$ che si possono scrivere in base 3 con le sole cifre 0 e 2 (banalmente $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ equivale a $\{0,2\}^{\boldsymbol{N}}$). Nell'insieme di Cantor, diversamente che in $\boldsymbol{R}$, l'indirizzo di ciascun punto è univoco: differenti successioni di cifre corrispondono a punti differenti. Se identifichiamo le coppie di elementi consecutivi in $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ cioè le coppie del tipo $\{W0\overline{1}; W1\overline{0})$, otteniamo appunto l'intervallo reale $[0,1]$, il cui ordinamento è indotto da quello di $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ L'intervallo $[0,1]$ può infatti essere visto come l'insieme delle successioni in $\{0,1\}$ (ordinato lessicograficamente), a meno delle identificazioni del tipo $W0\overline{1} = W1\overline{0}$, dove W è una qualsiasi sequenza finita.

La funzione corrispondente a questo collasso da $\boldsymbol{K}$ a $[0,1]$, estesa in maniera monotona all'intervallo $[0,1]$, è la cosiddetta *funzione a scala* di Cantor, la cui rappresentazione è suggerita in fig. 2. Essa è continua e non decrescente, il suo grafico raggiunge la lunghezza 2, pari alla somma di due lati del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ (perciò il massimo possibile, tra le funzioni monotone da $[0,1]$ a $[0,1]$).

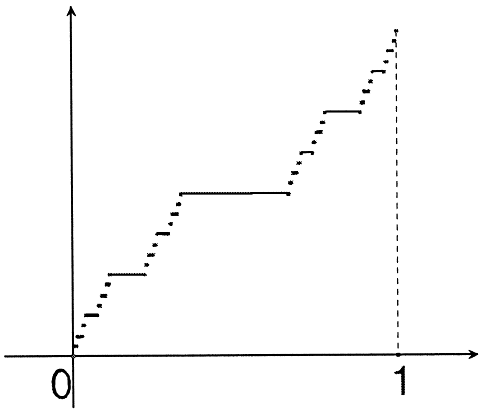

Fig. 2. – La scala di Cantor.

7. – Ordine alfabetico con parole finite o infinite.

L'ordinamento alfabetico sull'insieme Λ^* di tutte le parole finite o infinite costruite con l'alfabeto $\{a, b\}$ è definito dalle tre clausole seguenti:

- la parola vuota è l'elemento minimo;
- $aW < bW'$ per tutte le parole W, W';
- se Z è una parola finita e se $Y < Y'$, allora $ZY < ZY'$.

La struttura d'ordine che ne deriva è piuttosto complicata. Oltre alla parola minima, c'è una massima, ossia $\overline{b}$. Ogni parola finita ha un successore immediato (basta aggiungere a alla fine) e, salvo la parola vuota, anche un predecessore immediato (se una parola termina con b, questo si ottiene rimpiazzando il b finale con $a\overline{b}$). Tra le parole infinite, hanno un successore immediato solo quelle che terminano per $a\overline{b}$, e nessuna ha un predecessore immediato. Pertanto l'ordine non è simmetrico.

Dopo la parola vuota, c'è la sequenza a, aa, aaa, ... fino ad $\overline{a}$: essa costituisce un segmento iniziale di Λ^* che possiamo indicare con $\boldsymbol{N}^*$ (in termini di ordinali, si tratta di $\omega + 1$). Un elemento in cui compaia almeno una b avrà la forma $A_W\, bW$, dove A_W è l'inizio (eventualmente vuoto) fatto di sole a e W è a sua volta una parola in Λ^*. Possiamo denotare tale elemento con la coppia $(n; W)$, indicando con n il numero naturale che conta le a iniziali. Ragionando come nel paragrafo n° 2, si trova l'equazione $\Lambda^* = \boldsymbol{N}^* + (\boldsymbol{Z}^- \times \Lambda^*)$ (da modificare nel caso l'alfabeto abbia oltre due simboli). Una descrizione geometrica di questa struttura d'ordine si ottiene a partire dall'insieme di Cantor $\boldsymbol{K}$: si tratta di aggiungere, a sinistra di 0 e al posto di ogni intervallo rimosso da $[0, 1]$, una successione che tende all'estremo destro dell'intervallo.

L'insieme delle parole finite è denso in Λ^*: ogni intervallo aperto non vuoto contiene parole di lunghezza finita; d'altra parte, ogni parola infinita è il limite dei suoi segmenti iniziali.

Se usiamo $\{0, 1\}$ come alfabeto, ritroviamo uno stretto legame con l'ordine usuale dell'intervallo $[0, 1]$. La differenza è ancora legata alle identificazioni: per ottenere l'intervallo reale $[0, 1]$ ogni parola finita W va identificata con $W0$ e anche con $W\overline{0}$, mentre ogni parola infinita del tipo $W0\overline{1}$ va identificata con $W1$.

8. – L'ordine simmetrico su parole finite o infinite (... ancora i numeri di Conway).

L'ordine simmetrico descritto al punto 3 si può estendere all'insieme di tutte le sequenze, finite o infinite, formate da simboli «$-$» e «$+$». Ad esempio, la parola $+ - + - \overline{+} = + - + - + + + \ldots$ precede $+ - +$. Se vogliamo dare una lettura numerica di queste parole, mentre la seconda scrittura corrisponde a $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, la prima va immaginata come un numero più piccolo di $\frac{3}{4}$ di un infinitesimo.

Queste stringhe, così interpretate, formano l'insieme dei cosiddetti numeri «surreali» di lunghezza (al più) ω.

Ancora, abbiamo a che fare con una struttura d'ordine piuttosto complessa: gli elementi di lunghezza finita (che sono densi) hanno un predecessore e un successore immediati. Eccettuate queste terne, nessun elemento ha predecessori o successori immediati, e ciascun intervallo non incluso in terne di questo tipo ha cardinalità del continuo. Gli elementi massimo e minimo di questo insieme (indicati con $\omega = \overline{+}$ e $-\omega = \overline{-}$) possono essere concepiti come interi infiniti.

Così all'albero dei numeri surreali di lunghezza finita, aggiungiamo la riga che compare nell'estremità in basso della figura 1, che corrisponde al giorno ω, quando vengono alla luce numeri come $\dfrac{1}{\omega} = +\overline{-}$ e $1 - \dfrac{1}{\omega} = + - \overline{+}$. Naturalmente la creazione della totalità dei numeri di Conway non termina qui: c'è da proseguire ancora a lungo!

9. – Parole su alfabeti con infiniti simboli.

Vediamo alcuni ordinamenti delle parole che si presentano se disponiamo di *un alfabeto con infiniti simboli, ordinati come i naturali*. A priori, può sembrare artificioso pensare ad un alfabeto con infiniti simboli, ma ordini di questo tipo si ritrovano in vari contesti.

In primo luogo, consideriamo l'ordine lessicografico sulle parole di una fissata lunghezza finita. Si ottiene allora l'ordinale (numerabile) ω^n. Ogni suo elemento ha un successore, ma ci sono infiniti elementi senza predecessore immediato. È un buon ordine, evidentemente non simmetrico.

C'è una situazione familiare in cui tale ordine viene impiegato: nella classifica del medagliere olimpico si guarda prima il numero degli ori, a parità di ori si contano gli argenti, e infine i bronzi (in questo caso $n = 3$, supposto che il numero di medaglie possa essere illimitato).

Possiamo ampliare questo ordine immaginando che a tutti i partecipanti venga assegnata in ogni gara una medaglia, di pregio decrescente con l'ordine d'arrivo, e poi ordinando i medaglieri con il criterio usuale. Evidentemente supponiamo di avere a disposizione una varietà imprecisata di differenti metalli, ma ogni squadra riceverà un numero finito di medaglie. L'ordine risultante tra i medaglieri è lo stesso dei decimali limitati, con la precisazione che si possono però usare infinite cifre per ciascuna posizione. Se si eccettua la parola vuota, il resto dei possibili medaglieri ha dunque la stessa struttura d'ordine dei razionali (come già accennato nel paragrafo n° 4).

Una variante è data dall'insieme di tutte le parole finite costruite su un alfabeto con infiniti simboli, ordinate guardando prima la lunghezza e poi l'ordine lessicografico. Si ottiene così l'ordinale (numerabile) ω^ω, unione di tutti gli ω^n (dove n è finito). Questa struttura è in sostanza l'estensione ad un alfabeto infinito dell'ordine usuale dei numeri naturali. Se ne può dare una semplice rappresentazione algebrica con l'*insieme dei polinomi a coefficienti naturali*, ordinati ponendo $p(x) < q(x)$ allorché $\lim_{x\to+\infty}[q(x) - p(x)] > 0$, vale a dire se, da un certo punto in poi, i valori di $p(x)$ sono maggiori dei corrispondenti valori di $q(x)$. Per esempio, alle parole $U = 1\ 0\ 15\ 4$, $V = 1\ 0\ 15\ 2$ e $W = 120\ 27\ 38$, si associano i polinomi $u(x) = x^3 + 15x + 4$, $v(x) = x^3 + 15x + 2$ e $w(x) = 120x^2 + 27x + 38$: pertanto risulta $U > V > W$.

Se poi consideriamo l'ordine di dominanza sulle parole infinite (con cifre dall'alfabeto $\boldsymbol{N}$), limitandoci però alle sequenze con un numero finito di cifre non nulle, si trova il reticolo degli interi positivi ordinato per divisibilità. I numeri primi corrispondono a parole con una sola cifra 1 e tutte le altre 0; il numero 1 corrisponde a $\overline{0}$. Più in generale, alla successione $(a_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ si associa l'intero $\prod_j p_j^{a_j}$, dove p_j è il $(j+1)$-esimo numero primo: per esempio, alla successione (0, 4, 0, 1, 0, 0, ...) si associa $3^4 \cdot 7 = 567$. Le operazioni date da $((a_j)_{j\in\boldsymbol{N}} \wedge (b_j)_{j\in\boldsymbol{N}})_n = \min\{a_n, b_n\}$ e $((a_j)_{j\in\boldsymbol{N}} \vee (b_j)_{j\in\boldsymbol{N}})_n = \max\{a_n, b_n\}$ corrispondono alle procedure di calcolo del *MCD* e del *mcm* partendo dalle scomposizioni in fattori primi.

Infine, considerando la classe di tutte le successioni di naturali, troviamo $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$. In termini topologici, pensando $\boldsymbol{N}$ con la topologia discreta, lo spazio $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ è omeomorfo all'insieme degli *irrazionali* positivi. L'omeomorfismo è legato al fatto che ogni numero irrazionale positivo si esprime in uno e un sol modo come frazione continua illimitata. Tuttavia, per ritrovare il consueto ordinamento degli irrazionali, occorre che i fattori $\boldsymbol{N}$ del prodotto $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \times \ldots$ siano ordinati alternativamente nel modo naturale e nel modo inverso (in altre parole, si considera il prodotto $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}^{-} \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}^{-} \times \ldots$).

Alcune immersioni.

Un insieme ordinato è immergibile in un altro se esiste una funzione iniettiva dal primo al secondo che rispetta l'ordine.
Ogni ordine totale numerabile è immergibile nell'ordine dei decimali limitati, isomorfo a $\boldsymbol{Q}$. D'altra parte, l'ordine dei decimali limitati è immergibile nell'ordine alfabetico. Poiché essi non sono isomorfi, fra le strutture d'ordine non vale un analogo del teorema di Cantor-Bernstein.
Un ulteriore esempio è la doppia immersione $\boldsymbol{K} \subset [0,1] \subset \boldsymbol{K}$, dove $\boldsymbol{K}$ è l'insieme di Cantor: la prima immersione è quella geometrica nella retta reale, la seconda si ottiene cambiando in 2 ogni 1 di uno sviluppo binario. Anche in questo caso, $\boldsymbol{K}$ e $[0,1]$ non sono isomorfi.

10. – Considerazioni didattiche.

In questa panoramica, abbiamo descritto varie possibilità per ordinare le parole formate con un alfabeto ordinato. Diverse di esse trovano impiego comune nella pratica matematica o perfino nella vita quotidiana. Le strutture d'ordine che ne derivano sono molto variegate, con alcune correlazioni tra una e l'altra. In particolare, i due ordinamenti più familiari (quello dei naturali e quello dei decimali) presentano analogie e differenze didatticamente insidiose. La parentela di entrambi con l'ordine lessicografico è un tradizionale veicolo di errore quando si tratta di confrontare due numeri decimali. Il quadro si complica ulteriormente con la comparsa dei numeri negativi.

Come abbiamo accennato, a Scuola non si dedica molto tempo a questioni legate all'ordinamento fra numeri. Del resto, mentre si studiano le principali proprietà delle varie operazioni (commutativa, associativa, distributiva, etc), per quanto riguarda l'ordinamento si parla talora, al più, di densità. La mancanza di una trattazione teorica ha come conseguenza che, per evitare errori quando si confrontano e si ordinano numeri, è indispensabile riferirsi al significato dei numeri stessi e delle rispettive notazioni (per esempio, collocando i numeri lungo una retta). In altre parole, nel contesto esaminato è difficile per uno studente appoggiarsi a definizioni o a criteri operativi.

Le difficoltà si riscontrano dunque soprattutto negli studenti che si basano su approcci essenzialmente sintattici (tendenza a leggere i numeri come mere sequenze di cifre), senza una chiara comprensione del ruolo posizionale delle varie cifre e senza alcuna visualizzazione. In tali casi, le abitudini acquisite nell'ordinamento più familiare — i numeri naturali — facilmente si infiltrano laddove i medesimi simboli numerici sono da interpretare in maniera diversa. Ad esempio, un numero decimale limitato può essere erroneamente pensato come coppia ordinata di numeri naturali (parte intera e parte decimale), il che genera inevitabilmente confusione tra l'ordinamento dei decimali e i possibili ordinamenti delle coppie di naturali (ad esempio quelli visti nei paragrafi precedenti).

A tal proposito, errori come questi si riscontrano di frequente:

$$0{,}6 < 0{,}18 \qquad 0{,}600 > 0{,}60 \qquad 1{,}07 > 1{,}3 \qquad 1{,}6 < 1{,}18.$$

Essi trovano motivazioni di sapore «formale»: 18 è maggiore di 6, così come $600 > 60$ e $7 > 3$ (in questi casi ritroviamo un'interferenza con la struttura vista nel paragrafo n^{o} 9 per il medagliere olimpico).

Una diffusa degenerazione degli errori precedenti è la cosiddetta «regola della frazione» : siccome i centesimi sono più piccoli dei decimi, alcuni studenti sono portati ad affermazioni come $0{,}3 > 0{,}47$.

Questo tipo di errore è più ricorrente di quanto si potrebbe credere: ad esempio, in Australia è stato riscontrato circa nel 20% degli studenti al decimo anno di scolarità, rimanendo relativamente persistente con l'aumentare dell'età (si veda in proposito [7]).

L'esistenza e la rilevanza delle difficoltà menzionate sono state confermate da diverse esperienze, quali ad esempio [3], [5] e [8]. In particolare, si osserva nelle indagini riportate in [3] che gli errori più frequenti nell'ordinare i numeri decimali provengono da coloro che più si affidano a criteri mnemonici o formali, mentre una corretta comprensione della materia richiede il coordinamento e l'interiorizzazione di diverse abilità e rappresentazioni (rappresentazione decimale, frazionaria, quantitativa, geometrica). In [5] viene posta in rilievo la tendenza negli studenti a concepire i decimali come sequenze di simboli su cui eseguire specifiche manovre formali, mentre gli aspetti quantitativi e frazionari appaiono spesso secondari e non adeguatamente padroneggiati.

Si noti inoltre che, nell'usuale scrittura da sinistra verso destra, c'è una netta differenza fra un numero naturale ed un decimale: il valore di una cifra è immediatamente fissato per i decimali, mentre dipende dal seguito (da quante sono le cifre seguenti) nel caso dei naturali. Si pensi ad un numero naturale digitato su una calcolatrice: lo scorrimento delle cifre del numero, mentre questo viene scritto, altera il valore delle cifre già scritte, al contrario di quanto accade per le cifre decimali.

Gran parte dei problemi di confronto osservati (specialmente nei paragrafi n° 2-4) sono dovuti al fatto che si confrontano sequenze che hanno *lunghezze diverse*. A Scuola si usa talvolta il verbo «pareggiare»: la cosa è spontanea solo se, al solito, ci si rifà al significato dei numeri e alla scrittura posizionale. In generale, il ruolo dello 0 è in qualche modo peculiare: parlando delle lettere a, b, è chiaro che nessuna è privilegiata rispetto all'altra (semplicemente, a precede b), mentre le cifre 0 e 1 non hanno un ruolo simmetrico nelle considerazioni viste.

La presenza di diverse scritture che indicano uno stesso numero (cioè delle identificazioni citate nella tabella a conclusione del paragrafo n° 4) è, in un certo senso, un'anomalia del nostro sistema di notazione. Un fenomeno similare accade anche per le notazioni dei numeri razionali, allorché si incontrano frazioni equivalenti, e, anche in tal caso, ciò è causa di notevoli difficoltà. Ma a questo tema in genere si dedica maggiore attenzione, perché l'equivalenza tra frazioni entra in gioco negli algoritmi per eseguire le somme. L'esecuzione di tali algoritmi permette agli studenti di appoggiarsi a pratiche procedurali, anche senza che ciò comporti una comprensione sostanziale dell'argomento.

Una manifestazione esemplare delle difficoltà osservate presso gli studenti nel contesto descritto è offerta da un quesito presente nella recente indagine INVALSI, effettuata nell'aprile del 2005. Il seguente quesito era rivolto agli studenti del 1° anno delle Scuole Secondarie Superiori italiane:

Quanti numeri razionali sono compresi tra 2, 4 e 2, 85?

A. Infiniti.
B. Quattro
C. Quarantacinque.
D. Ottantuno.

Circa il 36% ha risposto correttamente «infiniti» (45% nei Licei, 30% nei Professionali), mentre il 26% circa ha scelto «45» (operando quindi una «discretizzazione» dei razionali in centesimi), e circa il 26% ha scelto «81» (oltre alla medesima discretizzazione, qui interviene anche una pretesa equiparazione tra 2,4 e 2,04).

Si può facilmente congetturare che un fattore in parte fuorviante risieda già nelle denominazioni impiegate: la parte decimale viene sostanzialmente letta come se si trattasse di un secondo numero intero giustapposto alla parte intera, con la virgola a fare da separatore. La lettura, assimilata acriticamente, di 0,623 e 0,8 come «zero virgola seicentoventitré» e «zero virgola otto» (senza specificare che si tratta, in un caso, di millesimi e, nell'altro, di decimi) può suscitare confusione e non favorire una corretta costruzione del «senso del numero».

Introdurre i numeri decimali usando all'inizio delle scansioni più esplicite, sebbene più faticose, (ad esempio: «zero virgola 6 decimi 2 centesimi 3 millesimi» o qualcosa di simile) aiuterebbe ad ancorare la scrittura dei numeri decimali alla loro natura frazionaria. Sono ben noti i fenomeni di dissociazione fra le rappresentazioni decimali e frazionarie dei numeri razionali e le difficoltà connesse alle traduzioni fra i due linguaggi. È auspicabile che l'introduzione dell'euro, con i suoi sottomultipli, possa rivelarsi vantaggiosa nel ristabilire una certa familiarità in questo senso. In proposito, segnaliamo il volume [2], dove tra l'altro si sottolineano le opportunità didattiche legate all'uso dei centesimi. Analoghe possibilità sono studiate e sperimentate in [6].

Una situazione simile, in cui un ostacolo didattico è accompagnato o accentuato da fattori nominalistici, si ritrova nell'aritmetica binaria. Fondamentalmente, ci mancano vocaboli adeguati alla lettura di un numero scritto in forma binaria: l'usuale denominazione dei numeri reca un'impronta eminentemente decimale. Non c'è accordo generale su come vada letto il numero binario «11»: leggere «tre» si discosta molto dalla scrittura e corrisponde ad una norma difficilmente generalizzabile. (6) Spesso si legge «uno uno»: ma ciò ri-

(6) Disponiamo di una serie di regole univoche per assegnare un nome a ciascun numero, a partire dalla sua scrittura in base 10 (e viceversa). Non altrettanto accade in base 2. La questione si è presentata, peraltro, nell'informatica, dove è venuta a crearsi una

manda ad un approccio essenzialmente sintattico alla scrittura binaria. La riduzione dei numeri a sequenze di cifre, anche nella loro designazione, li priva di identificabilità e percezione intuitiva: diventa essenziale mettersi a contare il numero delle cifre per avere idea dell'ordine di grandezza allorché un numero viene pronunciato. Molte volte, la scrittura binaria «11» viene letta semplicemente come «undici», con tutte le conseguenze del caso: di per sé la lettura non è scorretta, ma diventa il nome di una notazione che indica un numero, invece che il nome di un numero. Non diamo alcun consiglio su quale lettura sia preferibile. Notiamo piuttosto che queste difficoltà hanno presumibilmente contribuito agli esiti deludenti dei tentativi di introdurre i sistemi in base qualunque già nella Scuola Elementare, contestualmente alla numerazione in base 10.

Un non-sense in binario.

Esistono 10 tipi di persone:
chi capisce il sistema binario e chi non lo capisce

Le successioni infinite di cifre si incontrano a livelli più avanzati e corrispondono a concetti matematici più raffinati e profondi (ad esempio, come visto nei paragrafi n° 6 e n° 9, i numeri reali, l'insieme di Cantor, i numeri surreali). Le difficoltà cognitive riscontrabili in simili contesti sono serie: anche sul piano storico, sono serviti secoli per trattare in maniera (oggi ritenuta) soddisfacente la retta numerica.

Per esempio, è frequente che uno studente pensi all'ultima cifra di un allineamento illimitato, o che trovi inaccettabile un'uguaglianza come $2,\overline{9} = 3$. (7) Già un fatto assolutamente familiare (sebbene, non

certa confusione. Diversamente da quanto stabilito dalla I.E.C. (*International Electrotechnical Commission*), si è di fatto instaurata la prassi di chiamare «byte» una stringa di 8 bit, mentre un «kilobyte» è dato da 1024 ($= 2^{10}$) byte, un «megabyte» da 1024 kilobyte, un «gigabyte» da 1024 megabyte, e così via. Al contrario, la I.E.C. suggeriva di chiamare «kilobyte» un gruppo di 1000 byte, «megabyte» un gruppo di 1000 kilobyte, etc.

(7) Per giustificare la tesi secondo cui $2,\overline{9} < 3$, può capitare che lo studente adotti motivazioni come $3 - 2,\overline{9} = 0,\overline{0}1$, o che, alla richiesta di esibire un numero compreso tra $2,\overline{9}$ e 3, si abbiano risposte come $2,\overline{9} < 2,\overline{9}4 < 3$, in genere oggetto di giusta disapprovazione, ma non prive di senso nel contesto dei numeri surreali.

per caso, fra i più trascurati nell'insegnamento), quale la corrispondenza tra frazioni e numeri periodici, comporta in maniera essenziale l'esperienza dell'infinito nella matematica (in forma sia potenziale che attuale). Peraltro, proprio l'approccio ai numeri reali basato sugli allineamenti infiniti di cifre è visto con crescente favore, specie se paragonato alle classi contigue o alle sezioni di Dedekind. Esso è il metodo generalmente impiegato nelle scuole francesi, come illustrato per esempio in [9].

Del resto, un preciso filo conduttore, che permette di concepire come numeri le varie entità via via introdotte (naturali, interi, decimali, razionali, reali) e soprattutto di raccordarle fra loro, è la possibilità di stabilire un ordinamento lineare, giacché le genesi dei diversi tipi di numeri appaiono alquanto diversificate (in alcuni casi algebriche, in altri geometriche, in altri analitiche o topologiche). L'ordine riveste quindi un ruolo unificante: le proprietà dei vari ordinamenti via via ottenuti riflettono strettamente gli aspetti algebrico-topologici degli oggetti che vengono di volta in volta indicati come «numeri».

Una delle principali difficoltà nell'estensione da $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{C}$ risulta in effetti legata proprio alla non ordinabilità di $\boldsymbol{C}$ come campo; è vero che $\boldsymbol{C}$ è ordinabile come gruppo, ma i numeri complessi non possono venir disposti in un ordine totale secondo un criterio naturale. Come segnalato in [1], molti studenti tendono a non riconoscere come numeri entità tra le quali non si possa stabilire intuitivamente quali siano più grandi e quali più piccole.

Con gli allineamenti infiniti arbitrari, inevitabilmente ci si imbatte nella presenza dell'ineffabile in matematica: l'esistenza di oggetti non esprimibili ed in nessun modo indicabili, e forse pensabili solo in maniera vaga. Accade allora che solo pochi e privilegiati elementi possano fregiarsi di un qualche nome (ad esempio gli elementi periodici, o con certe regolarità nella successione delle cifre, o caratterizzati da speciali proprietà). Ma è cruciale che tutti gli allineamenti esistano in un qualche senso.

Come si osserva in [9], la nozione di numero reale, pensato singolarmente come sviluppo decimale infinito, una volta introdotta finisce per rimanere pressoché inutilizzata: non vi sono esercizi né problemi che chiamino in causa direttamente questa costruzione. Il discorso si riconduce appunto alla difficoltà di esprimere e di manipolare esplicitamente un allineamento arbitrario di infinite cifre, a meno di non considerare casi del tutto speciali.

Siamo in presenza di quella che, parlando dei numeri irrazionali, Michael Stifel ebbe a chiamare la «nebbia di infinito» che li nasconderebbe. L'incontro con l'infinito, anche nel caso delle successioni di cifre, segna l'ingresso di difficoltà concettuali, operative ed epistemologiche certamente profonde, il cui superamento rappresenta, non di meno, una conquista essenziale per lo sviluppo del pensiero matematico.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare Giorgio Bagni, Fabio Bellissima, Marco P. Bernardi, Lucilla Cannizzaro, che, in tempi e modi differenti, hanno fornito suggerimenti, indicazioni o idee utili alla stesura di questo lavoro. Un grazie particolare va poi ai referee, le cui osservazioni hanno apportato miglioramenti in diverse parti dell'articolo.

RIFERIMENTI

[1] N. ALMOG - D. TIROSH, *Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers*, Proceedings PME, **13** (1989), 221-227.

[2] C. BERNARDI - L. CANNIZZARO - M. FERRARI - M. REGGIANI, *Facciamo i conti con l'euro*, Ministero della Pubblica Istruzione (2000).

[3] M. BROWN, *Place values and decimals*, in *Children's understanding of Mathematics: 11-16*, a cura di K. Hart, ed. John Murray (1981).

[4] J.H. CONWAY, *On Numbers and Games*, AK Peters (2ª edizione, 2000).

[5] J. HIEBERT - D. WEARNE, *Students' conceptions of decimal numbers*, Annual Meeting of the American Educational Research Association (Montreal, Canada, 11-15 aprile 1983).

[6] K.C. IRWIN, *Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding*, Journal for Research in Mathematics Education, nº **32** (2001), 399-420.

[7] I. PELED - J.A. SHAHBARI, *Improving decimal number conception by transfer from fractions to decimals*, Proceedings PME 27, vol. 4 (2003), 1-6.

[8] L.B. RESNICK - P. NESHER - F. LEONARD - M. MAGONE - S. OMANSON - I. PELED, *Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions*, Journal for Research in Mathematics Education, n° **20** (1989), 8-27.

[9] J. ROBINET, *Les Réels: quels modèles en ont les élèves?*, Cahier de Didactique de Mathematiques, n° 21, I.R.E.M. Paris VII (1998).

Claudio Bernardi,
Dip. di Matematica «G. Castelnuovo», Università di Roma «La Sapienza»,
e-mail: claudio.bernardi@uniroma1.it

Paolo Francini,
Ist. di Istruzione Superiore «W.O. Darby», Cisterna LT,
e-mail: paolo.francini@uniroma1.it