Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Michele Sciacca

Equazione non lineare di Schrödinger del terzo ordine in fibre ottiche con caratteristiche di non omogeneità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 351–354.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_351_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 351-354

Equazione non lineare di Schrödinger del terzo ordine in fibre ottiche con caratteristiche di non omogeneità

MICHELE SCIACCA

Una delle più importanti equazioni evolutive della Fisica Matematica è l'equazione non lineare di Schrödinger (NLS), che appare in molte branche della fisica e della matematica applicata, in particolare nell'ottica non lineare. Le soluzioni più note di tale equazione sono i solitoni, che sono stati oggetto di intensi studi teorici e sperimentali durante gli ultimi tre decadi per le loro potenziali applicazioni nelle comunicazioni a lunga distanza su fibra ottica [1].

La propagazione di impulsi ottici $u(z, t)$ della durata temporale dell'ordine dei picosecondi ($t_0 > 5$ ps) in una fibra ottica mono-modo è governata dalla ben nota equazione non lineare di Schrödinger [1]:

$$\mathrm{i}u_z - \frac{\beta_2}{2}\, u_{tt} + \gamma u|u|^2 + \mathrm{i}\,\frac{a}{2}\, u = 0, \tag{1}$$

dove β_2, γ e a sono il coefficiente di dispersione della velocità di gruppo (*Group Velocity Dispersion*, GVD), il coefficiente di auto-modulazione di fase (*Self-Phase Modulation*, SPM) e il coefficiente di dissipazione della fibra, rispettivamente, mentre z e t sono la cooordinata spaziale lungo l'asse della fibra ed il tempo. Molti autori hanno analizzato l'equazione (1) dal punto di vista della completa integrabilità [3, 4], arrivando alla conclusione che tale equazione non è completamente integrabile almeno che non si trascuri il termine dissipativo, cioè si ponga $a = 0$.

Poichè per una fibra ottica reale $a \neq 0$, per rendere l'equazione (1) completamente integrabile alcuni autori hanno considerato generalizzazioni dell'equazione NLS (1) con coefficienti variabili, in particolare con coefficiente β_2 dipendente da z. Tale scelta ha avuto notevoli applicazioni in particolar modo nelle fibre ottiche a dispersione decrescente lungo l'asse della fibra (*Dispersion Decreasing Fiber*, DDF). Nelle fibre DDF, infatti, la decrescenza della dispersione della velocità di gruppo al crescere di z comporta la compressione temporale del solitone, il quale all'uscita della fibra presenta un profilo di ampiezza minore o uguale a quello iniziale, il che permette una migliore decodifica del segnale.

Al fine di aumentare la velocità del bit (bit rate) nei sistemi di comunicazione in fibra ottica su una singola portante, è necessario diminuire la durata temporale dell'impulso t_0. La propagazione di impulsi ottici ultracorti ($t_0 < 1$ ps) all'interno di una fibra ottica è governata dall'equazione NLS (1) in cui, però, si aggiungano alcuni termini non lineari e lineari di ordine più alto. A tal proposito, Hasegawa and

Kodama proposero un'equazione di evoluzione non lineare di Schrödinger del terzo ordine (HNLS) [1]:

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{i}u_z + \mathrm{i}\frac{a}{2}u - \frac{\beta_2}{2}u_{tt} + \gamma u|u|^2 - \mathrm{i}\frac{\beta_3}{6}u_{ttt} + \gamma\left(-T_R u(|u|^2)_t + \frac{\mathrm{i}}{\omega_0}\left(U|U|^2\right)_t\right) = 0,$$

dove β_3 è il coefficiente di dispersione del terzo ordine (*Third Order Dispersion* TOD), mentre gli ultimi due termini non lineari rappresentano, rispettivamente, *self-frequency shift* dovuta allo *Stimulated Raman Scattering* (SRS) e *self-steepening* (detta anche *Dispersion Kerr*).

L'equazione non lineare (2), in generale non completamente integrabile, come evidenziato da alcuni autori, risulta completamente integrabile solo in quattro casi, cioè per quattro combinazioni dei coefficienti: di esse le due più interessanti conducono all'equazione di Hirota e l'equazione di Sasa-Satsuma, che può essere scritta nella seguente forma:

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{i}u_z + a_1 u_{tt} + a_2 u|u|^2 + \sigma_1\left(\mathrm{i}\,\frac{a_1}{3}\,u_{ttt} - \mathrm{i}\,\frac{a_2}{2}\,u(|u|^2)_t + \mathrm{i}a_2(u|u|^2)_t\right) = 0,$$

dove a_1, a_2 si riferiscono a GVD e a SPM, mentre gli ultimi tre termini si riferiscono a TOD, self-frequency shift e self-steepening, rispettivamente. È da notare che nell'equazione di Sasa-Satsuma (3) non è presente il termine dissipativo a.

La possibilità di usare fibre con dispersione variabile e, più in generale, fibre ottiche con proprietà locali variabili, per la manipolazioni degli impulsi solitonici, ha suggerito lo studio della completa integrabilità di un'equazione di evoluzione che sia la generalizzazione dell'equazione (2) al caso non autonomo [2], in analogia a quanto fatto da altri autori che hanno considerato equazioni NLS a coefficienti variabili come generalizzazioni dell'equazione (1).

Fra le varie definizioni di completa integrabilità, nella tesi si è utilizzata quella secondo cui un'equazione di evoluzione è completamente integrabile se soddisfa il Test di Painlevè (assenza di singolarità critiche mobili nella soluzione generale) ed è riconducibile ad un problema spettrale intrinsecamente lineare, mediante il metodo della zero-curvatura. Tale metodo comporta la ricerca della cosiddetta coppia di Lax $\boldsymbol{A}(z,t,u,u^*,\lambda)$ e $\boldsymbol{B}(z,t,u,u_1,\lambda)$, con λ parametro isospettrale e u^* coniugato di u, di modo che la condizione di compatibilità:

$$\text{(4)}\qquad \boldsymbol{A}_z - \boldsymbol{B}_t + [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}] = 0$$

per il sistema lineare:

$$\text{(5)}\qquad \boldsymbol{\Psi}(z,t)_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(z,t) \qquad \boldsymbol{\Psi}(z,t)_z = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Psi}(z,t),$$

sia equivalente all'equazione differenziale in esame.

Tale studio ha permesso di ottenere un'equazione differenziale non lineare a coefficienti variabili completamente integrabile, che è una generalizzazione dell'equazione di Sasa-Satsuma (3) contenente il termine dissipativo. Tale equazione assume la seguente forma:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\tilde{u}_{\tilde{z}} + A(\tilde{z})\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} + B\tilde{u}|\tilde{u}|^2 + \left(\left(\frac{C_1}{\sigma_1} + \frac{A(\tilde{z})_{\tilde{z}}}{2\sigma_1 A(\tilde{z})}\right)\tilde{t} + K_2(\tilde{z}) + \mathrm{i}C_1\right)\tilde{u} \\
&\quad + \mathrm{i}\left(\left(C_1 + \frac{A(\tilde{z})_{\tilde{z}}}{2A(\tilde{z})}\right)\tilde{t} + K_1(\tilde{z})\right)\tilde{u}_{\tilde{t}} \\
&\quad + \sigma_1\left(\mathrm{i}\,\frac{A(\tilde{z})}{3}\,\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}\tilde{t}} - \mathrm{i}\,\frac{B}{2}\,\tilde{u}(|\tilde{u}|^2)_{\tilde{t}} + \mathrm{i}B(\tilde{u}|\tilde{u}|^2)_{\tilde{t}}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

dove $A(\tilde{z})$, B e C_1 sono rispettivamente la GVD, la SPM e la dissipazione, mentre $K_1(\tilde{z})$ e $K_2(\tilde{z})$ sono generiche funzioni di $\tilde{z}$. È da notare che il coefficiente del termine $\tilde{u}_{\tilde{t}}$ è l'inverso della velocità di gruppo dell'impulso ottico. La (6) rappresenta l'equazione di evoluzione di un impulso solitonico ultracorto all'interno di una fibra ottica avente proprietà di non omogeneità lungo l'asse della fibra.

Dal punto di vista della completa integrabilità, l'equazione (6) supera il Test di Painlevè ed è equivalente ad un problema spettrale intrinsecamente lineare mediante il metodo della zero-curvatura [2]. Sono state trovate tre possibili coppie di Lax, di cui una 2×2 e due 3×3, che qui verranno omesse per semplicità, e che hanno confermato quanto già ottenuto con l'ausilio del Test.

In fine, dato che l'equazione (6) rappresenta la generalizzazione dell'equazione di Sasa-Satsuma (3) al caso non omogeneo con termine dissipativo, si è trovata una trasformazione del tipo:

$$
\tilde{u} = u(\tilde{z}, \tilde{t}) f(z) e^{\mathrm{i}g(z,t)},
\tag{7}
$$

con $f(z)$ e $g(z,t)$ funzioni opportunamente scelte, che riconduce l'equazione integrabile non autonoma (6) alla sua controparte autonoma (3). Tale trasformazione, quindi, permette di ricavare soluzioni dell'equazione (6) semplicemente conoscendo soluzioni dell'equazione di Sasa-Satsuma (3).

La possibiltà di avere solitoni *bright* (*dark*), con profilo $\sinh$ ($\tanh$), nella comunicazione in fibra ottica è dovuta principalmente al bilanciamento tra effetti di dispersione anomale (normale) della velocità di gruppo ed effetti non lineari, quali l'auto-modulazione di fase. Da un punto di vista tecnico, tale possibilità dipende sia dalla costruzione della fibra che dalla procedura seguita per la generazione dell'impulso. In definitiva avremo la propagazione di solitoni bright, rispettivamente dark, a seconda che il segno del coefficiente della dispersione della velocità di gruppo GVD sia di segno positivo, rispettivamente negativo.

In conclusione, vengono mostrate due soluzioni solitoniche, che si presentano in due casi particolari di fibra ottica, utilizzando due soluzioni note dell'equazione autonoma (3) e la trasformazione (7) sopra definita [2].

Solitone Bright: In questo primo caso, scegliamo $A(\tilde{z})$ e B in modo da bilanciare GVD e SPM per $\tilde{z} = 0$, cioè scegliamo $A(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2C_1\tilde{z}}$, in modo da avere $1/2$ per $\tilde{z} = 0$ e 0 per $\tilde{z} \longrightarrow \infty$, e $B = 1$. Pertanto, l'equazione a coefficienti variabili (6), con la precedente scelta dei coefficienti, rappresenta una generalizzazione dell'equazione di Sasa-Satsuma (3) con $a_1 = 1/2$ e $a_2 = 1$. Per semplicità di calcolo supporremo anche K_1 costante.

Nota una soluzione solitonica dell'equazione di Sasa-Satsuma (3), e utilizzando le trasformazioni (7) sopra definite, abbiamo ottenuto il seguente solitone brigth come soluzione dell'equazione non autonoma (6) [2]:

$$\tilde{u} = \eta \mathrm{e}^{-C_1 \tilde{z}} \operatorname{sech}(\sqrt{2}\eta\phi) \exp\left\{ \mathrm{i}\left(\frac{t}{\sigma_1} - \frac{K_1}{\sigma_1}\tilde{z} \right) \right\}, \tag{8}$$

dove $\phi = \tilde{t} - K_1\tilde{z} + \dfrac{\beta}{2C_1}(1 - \mathrm{e}^{-2C_1\tilde{z}})$ e $\eta = \sqrt{\dfrac{-3 - 6\beta\sigma_1}{2\sigma_1^2}}$. Come si può notare dall'espressione (8), abbiamo ottenuto un solitone, soluzione dell'equazione (6), la cui ampiezza temporale rimane costante lungo tutta la fibra e la cui cresta decresce al crescere di $\tilde{z}$, ma che si muove con una velocità di gruppo crescente al crescere di $\tilde{z}$.

Solitone Dark: In modo del tutto analogo a quanto fatto per il solitone bright, si ha bilanciamento tra GVD e SPM scegliendo $A(\tilde{z}) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2C_1\tilde{z}}$ e $B = 1$; inoltre, per semplicità di calcolo sceglieremo nuovamente K_1 costante. Dopodichè nota una soluzione dell'equazione (3) per $a_1 = -1/2$ e $a_2 = 1$, e utilizzando le trasformazioni (7) sopra definite, abbiamo ottenuto il seguente solitone dark come soluzione dell'equazione (6):

$$\tilde{u} = \eta \mathrm{e}^{-C_1 \tilde{z}} \tanh(\sqrt{2}\eta\phi) \exp\left\{ \mathrm{i}\left(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{K_1\tilde{z}}{\sigma_1} \right) \right\}, \tag{9}$$

dove $\phi = \tilde{t} - K_1\tilde{z} + \dfrac{(1+\beta\sigma_1)}{2C_1\sigma_1}(1 - \mathrm{e}^{-2C_1\tilde{z}})$ e $\eta = \sqrt{\dfrac{3 - 6\beta\sigma_1}{4\sigma_1^2}}$. Anche in questo caso, come si può notare dall'espressione (9), abbiamo ottenuto un solitone dark, soluzione dell'equazione (6), la cui ampiezza temporale rimane costante lungo tutta la fibra e con un profilo decrescente al crescere di $\tilde{z}$, ma che si muove con una velocità di gruppo crescente al crescere di $\tilde{z}$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] AGRAWAL G. P., *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, New York, (2001).

[2] BRUGARINO T. e SCIACCA M., *Singularity analysis and integrability for a HNLS equation governing pulse propagation in a generic fiber optics*, Optics Communications, **262** (2006), 250-256.

[3] CONTE R., *The Painlevé Property One Century Later*, Springer-Verlag, New York, (1999).

[4] WEISS J., TABOR M. e CARNEVALE G., *The The Painlevé property for partial differential equations*, J. Math. Phys., **24** (1983), 522-526.

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici, Università di Palermo
e-mail: msciacca@unipa.it; micheles@math.unipa.it
Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica
(sede amministrativa: Università di Palermo) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Greco, Università di Palermo
Co-Direttore di ricerca: Prof. Tommaso Brugarino, Università di Palermo