Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano D. Sarti

Aspetti algebrici e combinatorici della teoria delle rappresentazioni dei gruppi simmetrico e generale lineare in caratteristica libera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 347–350.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_347_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 347-350

Aspetti algebrici e combinatorici della teoria delle rappresentazioni dei gruppi simmetrico e generale lineare in caratteristica libera

STEFANO D. SARTI

Un soggetto di grande rilevanza nella teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico S_n e del gruppo generale lineare GL_m è costituito dalle cosiddette *regole di decomposizione*. Classicamente – cioè su campi di caratteristica zero – queste regole descrivono a meno di isomorfismo la decomposizione completa di un dato modulo in somma diretta di moduli irriducibili. Le più note sono la regola di Young, la regola del Branching, la regola di Pieri e la regola di Littlewood-Richardson. Tradizionalmente, questi risultati vengono dimostrati sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi ovvero, usando metodi combinatorici, sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Su campi di caratteristica positiva queste regole di decomposizione sono in generale false.

Molti ricercatori si sono posti il problema di trovare versioni delle regole citate valide su campi qualsiasi. Nella letteratura ci si riferisce a questo tipo di risultati con i termini di *versioni in caratteristica libera*, *forme universali*, *teoremi di filtrazione invariante* [1].

La Tesi si colloca nell'ambito di queste ricerche: dimostriamo delle versioni in caratteristica libera delle regole classiche (tranne quella di Littlewood-Richardson). Inoltre, quale risultato accessorio, viene presentata una costruzione della rappresentazione naturale di Young per il gruppo simmetrico su un campo qualsiasi.

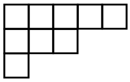
Ad esempio, consideriamo il gruppo generale lineare $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ delle matrici invertibili $m \times m$ ad elementi in $\mathbb{C}$. È noto che ogni rappresentazione polinomiale di $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ è completamente riducibile, di conseguenza si può decomporre in somma diretta di rappresentazioni omogenee irriducibili. Le rappresentazioni omogenee irriducibili sono dunque in questo caso le strutture semplici con cui si possono costruire tutte le rappresentazioni del gruppo.

Un sistema completo di rappresentazioni n-omogenee irriducibili di $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ è costituito dalla famiglia dei moduli di Schur-Weyl

$$\left\{ W_\lambda^m \right\}_{\lambda \text{ partizione di } n,\ \lambda_1 \leq m}$$

Ricordiamo che una partizione di n è una sequenza di interi positivi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, debolmente decrescente e tale che $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = n$. Una partizione si può rappresentare in modo naturale mediante un diagramma (detto diagramma di Ferrers).

Per esempio la partizione $(5, 3, 1)$ corrisponde al diagramma



Una *tabella di Young* di forma λ sull'alfabeto $[m] = \{1 < 2 < \ldots < m\}$ è un riempimento del diagramma di Ferrers di λ coi simboli dell'alfabeto. Una tabella di Young si dice *standard* se ogni riga è strettamente crescente e ogni colonna debolmente crescente rispetto all'ordine dell'alfabeto.
Il teorema della base standard implica che la dimensione del modulo irriducibile W_λ^m è pari al numero di tabelle standard di forma λ sull'alfabeto $[m]$.

Regola del Branching. Il gruppo $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbb{C})$ può essere immerso in modo naturale nel gruppo $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Il modulo W_λ^m è irriducibile come $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$-modulo, ma non come $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbb{C})$-modulo. Il problema del branching è quello di decomporre W_λ^m rispetto all'azione di $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbb{C})$. La regola classica è

$$W_\lambda^m \cong \bigoplus_{\tilde{\mu} \text{ intreccia } \tilde{\lambda}} W_\mu^{m-1}.$$

Nell'enunciato, con $\tilde{\lambda}$ denotiamo la partizione coniugata a λ, cioè la partizione che si ottiene leggendo per colonna il diagramma di Ferrers di λ. La relazione "$\tilde{\mu}$ intreccia $\tilde{\lambda}$" significa $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \tilde{\mu}_2 \geq \cdots \geq \tilde{\lambda}_r \geq \tilde{\mu}_r \geq \tilde{\lambda}_{r+1} := 0$.

Regola di Pieri. La Regola di Pieri descrive la decomposizione, rispetto all'azione di $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, di un prodotto tensoriale di moduli di Schur-Weyl della forma

$$W_\lambda^m \otimes W_{(1,1,\ldots)}^m$$

ove λ è una partizione qualsiasi e $(1, 1, \ldots)$ è una partizione composta da parti uguali a 1.

Regola di Young. La Regola di Young descrive la decomposizione completa di certi sottomoduli dell'algebra di gruppo $\mathbb{C}[S_n]$ del gruppo simmetrico S_n. In questo caso il sistema completo dei moduli irriducibili è la famiglia dei moduli di Specht, anch'essa indicizzata dalle partizioni di n.

L'estensione di questi risultati alle rappresentazioni su campi qualsiasi comporta dei problemi. Come abbiamo mostrato nella Tesi con vari controesempi, le regole di decomposizione, così come sono state enunciate, non sono valide. Nell'ambito del programma inaugurato da Akin, Buchsbaum & Weyman [1], possiamo porre la questione in termini di *filtrazioni invarianti*.

Una filtrazione invariante di un modulo V è una successione di sottomoduli, ciascuno contenuto nel precedente

$$V = U_1 \geq U_2 \geq \cdots \geq U_s \geq U_{s+1} := 0. \tag{1}$$

Nel caso riduttivo (moduli semisemplici), il modulo V è isomorfo al graduato associato alla filtrazione, cioè

$$V \cong \frac{U_1}{U_2} \oplus \frac{U_2}{U_3} \oplus \cdots \oplus \frac{U_s}{U_{s+1}}. \tag{2}$$

Considerando dei $\mathbb{K}G$-moduli, dove $\mathbb{K}$ è un campo e G è il gruppo simmetrico o il gruppo generale lineare, una condizione sufficiente affinché V sia isomorfo al graduato associato è che il campo $\mathbb{K}$ abbia caratteristica zero. Pertanto la filtrazione (1) si può considerare una versione in caratteristica libera della decomposizione (2).

Nella Tesi, per ciascuna delle regole menzionate, costruiamo una filtrazione invariante del modulo in oggetto il cui graduato associato coincide, a meno di isomorfismi, con la decomposizione che si ottiene in caratteristica zero.

L'estensione dei risultati a campi qualsiasi richiede un'ulteriore precisazione. Le costruzioni classiche dei moduli di Schur-Weyl e di Specht, pur essendo ben definite, non sono significative nella teoria delle rappresentazioni su campi di caratteristica positiva. Una fondamentale generalizzazione delle costruzioni di tali moduli fu ottenuta nel 1974 da Carter & Lusztig [3], nell'ambito delle rappresentazioni modulari del gruppo generale lineare e del gruppo simmetrico. Qualche anno più tardi Clausen [4], ispirandosi a queste ricerche, definì su un campo qualsiasi, sia per GL_m sia per S_n, due famiglie di moduli – chiamate rispettivamente di primo e di secondo tipo – con le quali costruì dei sistemi completi di moduli irriducibili. In generale i moduli di primo e secondo tipo non sono tra loro isomorfi; per questa ragione nella Tesi ogni regola viene enunciata e dimostrata sia per i moduli di primo tipo sia per quelli di secondo tipo.

L'ambiente nel quale sono stati ottenuti i risultati è quello delle *letterplace algebre supersimmetriche* nel quale è possibile descrivere e utilizzare in modo naturale l'*algoritmo di straightening superalgebrico* di Grosshans, Rota & Stein [6].
Osserviamo, a questo proposito, che nelle costruzioni di Clausen i moduli sono descritti come sottomoduli di una letterplace algebra *commutativa*; nello studio dei moduli di secondo tipo questa costruzione conduce a grandi difficoltà sia dal punto di vista algebrico sia dal punto di vista combinatorico. Per aggirare l'ostacolo abbiamo seguito l'approccio di Barnabei & Brini [2] che consiste nel costruire i moduli di secondo tipo in una letterplace algebra supersimmetrica. Questo passaggio, dall'algebra commutativa all'algebra supersimmetrica, permette di trattare i due tipi di modulo con metodi analoghi.

In conclusione, il tema principale della nostra ricerca è stato quello di dimostrare (a meno di filtrazioni invarianti) dei risultati classici della teoria delle rappresentazioni *senza fare ipotesi sul campo*.

Ciò è stato possibile grazie ai metodi della combinatoria algebrica e, in particolare grazie al linguaggio delle letterplace algebre supersimmetriche e al corrispondente algoritmo di straightening superalgebrico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] K. Akin, D. A. Buchsbaum e J. Weyman, *Schur functors and Schur Complexes*, Advances in Math., **44** (1982), 207-279.
[2] M. Barnabei e A. Brini, *The Littlewood-Richardson Rule for Coschur Modules*, Advances in Math., **67** (1988), 143-173.
[3] R. W. Carter e G. Lusztig, *On the modular representations of the general linear and symmetric groups*, Math. Zeit. **136** (1974), 193-242.
[4] M. Clausen, *Letter place algebras and charatteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, I*, Advances in Math., **33** (1979), 161-191.
[5] M. Clausen, *Letter place algebras and charatteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, II*, Advances in Math., **38** (1980), 152-177.
[6] F. Grosshans, G.-C. Rota e J. Stein, *Invariant theory and Super-algebras*, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: sarti@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Andrea Brini, Università di Bologna