Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lilia Rosati

Foliazioni di codimensione uno con singolarità Morse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 335–338.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_335_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 335-338

Foliazioni di codimensione uno con singolarità Morse

LILIA ROSATI

Un'equazione differenziale ha un'interessante interpretazione geometrica: essa definisce un campo vettoriale nello spazio ambiente. In $\boldsymbol{R}^n$, il teorema di Cauchy-Lipschitz fornisce condizioni per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni, a cui corrispondono le traiettorie del campo associato. Nel caso autonomo, l'insieme delle soluzioni determina una partizione di un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ per mezzo di curve.

In generale, data una varietà differenziabile di dimensione n, una *foliazione* di dimensione $k < n$, e codimensione $n - k$, è una sua partizione in sottovarietà k-dimensionali, le foglie (etimologicamente, il termine deriva dal latino *folium*, così che foliazione traduce l'idea di una pila di fogli). Localmente una foliazione si presenta come una partizione in sottovarietà "embedded" (in coordinate è una suddivisione di $\boldsymbol{R}^n$ in sottovarietà affini) ma globalmente le foglie saranno, in generale, solo "immersed" e lo spazio delle foglie piuttosto complicato (non Hausdorff). La differenza che intercorre tra le foliazioni di dimensione 1 e quelle di dimensione $k > 1$ è la stessa esistente tra le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni alle derivate parziali. In termini geometrici, è la differenza che intercorre tra un campo vettoriale e una k-distribuzione ($1 < k < n$). Parleremo, rispettivamente, di condizioni di compatibilità (che derivano dalla commutatività delle derivate parziali seconde), ovvero di integrabilità. Quest'ultimo termine è giustificato dal teorema di Frobenius (XIX sec.), secondo il quale le condizioni necessarie sono anche sufficienti (e l'integrabilità risulta una proprietà infinitesimale). Come è noto, i campi vettoriali o le distribuzioni non sono l'unico modo per definire foliazioni; altri esempi sono forniti dalle sommersioni e da particolari azioni di gruppi di Lie.

Senza la pretesa di voler esere esaustivi, vorremmo dare qualche cenno sulle origini e sugli sviluppi della *teoria delle foliazioni*, con particolare interesse verso la teoria geometrica ed i collegamenti con la topologia delle varietà.

L'idea di uno studio geometrico delle foliazioni nasce alla fine del XIX secolo con Paul Painlevè, che ne intuì l'utilità per comprendere meglio il comportamento delle soluzioni di equazioni differenziali olomorfe in campo complesso, un argomento che presenta tuttora questioni aperte. Ma lo studio vero e proprio nasce negli anni '40 con il contributo di Charles Ehresmann, matematico eclettico -egli individuò le *varietà foliate* nell'ambito dei suoi studi sui fibrati e sugli pseudogruppi di trasformazioni-, ma soprattutto con i risultati di Georges Reeb. Allievo di Ehresmann, Reeb costruì un esempio [3] di foliazione di dimensione due di S^3 con un'unica foglia torica (compatta) su cui si accumulano asintoticamente tutte le altre foglie, aperte, omeomorfe a piani.

Questo risultato fu stimolato da una domanda di Heinz Hopf, in seguito alla sua scoperta dell'omonima fibrazione $S^3 \to S^2$, che, di fatto, definisce una foliazione di dimensione uno di S^3.

Fin dalle origini, lo studio delle foliazioni presenta dei legami interessanti con la topologia delle varietà. Come è noto, una varietà compatta ammette una foliazione di dimensione uno se e solo se la sua caratteristica di Eulero-Poincarè è zero. L'esempio di Reeb si inquadra nell'ambito di una ricerca di legami tra topologia della varietà ed esistenza di foliazioni di codimensione uno. Il fatto che queste ultime determinino l' esistenza di una foliazione di dimensione uno complementare, la foliazione *trasversa*, chiarifica, solo in parte, questi legami.

Tra le altre cose, a Reeb dobbiamo anche due importanti teoremi sulla stabilità di foglie compatte. Questi si avvalgono implicitamente del concetto di olonomia di una foglia, uno strumento descritto poi da Ehresmann in un lungo lavoro del '61.

Un altro grande impulso è dovuto a André Haefliger, a cominciare dalla sua tesi del 1958, in cui dimostrò che ogni foliazione di codimensione uno di S^3 non è analitica. Di fatto, il teorema è molto più generale; vale per varietà n-dimensionali con gruppo fondamentale finito. Lo stesso Haefliger definì e studiò, poi, oggetti molto più generali, le Γ_q-strutture, che servirono, più tardi, per lo sviluppo di una teoria *quantitativa*.

Nel 1965, Sergei Novikov pubblicò il seguente risultato: *Ogni foliazione C^2 di dimensione due di S^3, ammette una foglia compatta, omeomorfa a un toro.* Ciò rese l'esempio di Reeb ancora più significativo; essenzialmente, la foliazione di Reeb era l'unica, di dimensione due, di S^3.

Il risultato di Novikov, molto articolato, fondato sul teorema di Haefliger, pur avendo poche conseguenze e dimostrandosi impossibile da generalizzare, ebbe una grandissima risonanza e attrasse l'interesse di molti matematici verso questo campo. In particolare, furono riprese le idee alla base dell'esempio di Reeb; mediante la combinazione di queste con tecniche di splitting di varietà, dovute ad Alexander (1923), si dimostrò che ogni 3-varietà ammette foliazioni lisce di codimensione uno. In seguito, l'idea che l'esistenza/non-esistenza di foliazioni potesse costituire un invariante non omotopico per la classificazione delle 3-varietà, dovette essere, se non accantonata, rivista. In questo contesto si colloca il contributo di John Milnor, che definì il *rango* di una varietà, come il massimo numero di campi sulla varietà, linearmente indipendenti, che commutano, e propose di determinare il rango di S^3. Una varietà compatta, semplicemente connessa, risultò avere rango uno (Elon Lages Lima). Successivamente (1970), Jonathan M. Rosenberg, Robert Roussarie e Daniel Weil classificarono le 3-varietà di rango due.

In un ricchissimo lavoro, H. Blaine Lawson, jr. (1974) documenta l'esplosione della ricerca in quegli anni (significativo, oltre a quanto già riportato, il risultato, a cui ha contribuito anche lo stesso Lawson, secondo il quale ogni sfera di dimensione dispari, ammette una foliazione liscia di codimensione uno). La nuova direzione, presa all'inizio degli anni '70 fu lo sviluppo della teoria quantitativa. Segnaliamo brevemente la scoperta, per foliazioni di codimensione 1, dell'invariante di Godbillon-Vey, un numero reale che dipende solo dalla foliazione.

Tra gli argomenti di ricerca che hanno mantenuto vivo l'interesse verso la teoria geometrica, citiamo la topologia e il comportamento asintotico di foglie non compatte in varietà foliate compatte. Negli ultimi anni, tra le altre cose, l'interesse si è rivolto verso le foliazioni di codimensione uno con singolarità ([4], [1]). Ciò trova le sue origini ancora in un teorema di Reeb, il *Teorema della Sfera* secondo il quale una n-varietà compatta che ammette una foliazione trasversalmente orientabile, con singolarità non degeneri, di tipo centro, è omeomorfa alla n-sfera.

Il Teorema della Sfera di Reeb è un'applicazione di teoria di Morse; altrettanto si può dire di un risultato di Eells e Kuiper, che in [2] studiano e classificano varietà che ammettono funzioni reali con esattamente 3 singolarità non-degeneri.

In questa tesi vengono studiate foliazioni lisce, di codimensione uno, con singolarità (isolate, oppure, unione disgiunta di insiemi diffeomorfi a circonferenze embedded, nell'ipotesi che ciascuno di essi sia accumulato da foglie compatte). Questi ultimi insiemi singolari vengono presi in considerazione per stabilire eventuali estensioni dei teoremi di Haefliger e di Novikov, mentre le foliazioni con singolarità isolate vengono studiate in relazione alla topologia della varietà, con le motivazioni date dal Teorema della Sfera di Reeb e dalla classificazione di Eells e Kuiper. Di seguito riportiamo alcuni dei risultati più importanti.

DEFINIZIONE 1. – *Sia M una varietà n-dimensionale compatta. Una foliazione (liscia) di codimensione uno con singolarità isolate è una coppia $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^*, Sing(\mathcal{F}))$, dove $Sing(\mathcal{F}) \subset M$ è un insieme discreto e $\mathcal{F}^*$ è una foliazione (liscia) di codimensione uno, nel senso usuale, di $M^* = M \setminus Sing(\mathcal{F})$. Le foglie di $\mathcal{F}$ sono le foglie di $\mathcal{F}^*$ e $Sing(\mathcal{F})$ è l'insieme singolare. Un punto $p \in Sing(\mathcal{F})$ è una singolarità Morse se esiste una funzione C^∞, $f_p : U_p \subset M \to \boldsymbol{R}$, definita in un intorno U_p di p, con un (unico) punto critico non-degenere in p e tale che f_p è un itegrale primo locale della foliazione, cioè le foglie della restrizione $\mathcal{F}|_{U_p}$ sono date dalle componenti connesse delle superfici di livello di f_p in $U_p \setminus \{p\}$. Una singolarità Morse, p, di indice (di Morse) l è un centro se $l \in \{0, n\}$ e una sella se $0 < l < n$. Diciamo che la foliazione ha una connessione tra selle se esiste una foglia accumulata da almento due singolarità (di tipo sella) distinte. Una foliazione Morse è una foliazione con singolarità isolate, il cui insieme singolare è costituito da singolarità Morse, e tale che non ha connessioni tra selle. Una sella si dice autoconnessa se due separatrici locali sono contenute nella stessa separatrice (globale).*

Motivati dal Lemma di Morse e dal Teorema di Stabilità Locale di Reeb, diamo la seguente:

DEFINIZIONE 2. – *Sia $\dim M = n \geq 2$. Definiamo l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{F}) \subset M$ come l'unione delle singolarità di tipo centro e delle foglie diffeomorfe a sfere S^{n-1} (con olonomia banale, se $n = 2$), e per una singolarità di tipo centro, p, denotiamo con $\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ la componente connessa di $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ che contiene p.*

TEOREMA 1. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione Morse, liscia, di codimensione uno, trasversalmente orientabile di una varietà n-dimensionale compatta, M ($n \geq 3$). Sia $q \in \partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ una sella. Sia $L \subset \mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ una foglia sferica che interseca un intorno U di q, in cui vale il Lemma di Morse per q.* (1) *Se q ha indice $l \notin \{1, n-1\}$, abbiamo che $\partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F}) \setminus \{q\}$ ha una sola componente connessa ed è omeomorfo a S^{n-1}/S^{l-1}.*

Se F è una foglia tale che $F \cap (U \setminus \overline{\mathcal{C}_p(\mathcal{F})}) \neq \emptyset$, allora F è omeomorfa a $\boldsymbol{B}^l \times S^{n-l-1} \cup_\phi \boldsymbol{B}^l \times S^{n-l-1}$, dove ϕ è un diffeomorfismo del bordo (può risultare, ad esempio, $F \simeq S^l \times S^{n-l-1}$, o $F \simeq S^{n-1}$, se $l = n/2$). (2) *Se q ha indice 1 o $n-1$, abbiamo le seguenti possibilità:* (i) *$\partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ contiene una sola separatrice della sella ed è omeomorfo a S^{n-1};* (ii) *$\partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ contiene entrambe le separatrici, $S_i (i = 1, 2)$, della sella ed è omeomorfo a $S^{n-1}/S^{n-2} \simeq S^{n-1} \vee S^{n-1}$. In questo caso esistono due foglie, $F_i (i = 1, 2)$, tali che F_i e L intersecano componenti connesse di $U \setminus S_i$ distinte; allora F_i è omeomorfa a S^{n-1} $(i = 1, 2)$;* (iii) *q è una sella autoconnessa e $\partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ è omeomorfo a S^{n-1}/S^0; $U \setminus \partial\mathcal{C}_p(\mathcal{F})$ ha tre componenti connesse e L ne interseca due. Se F è una foglia che interseca la terza componente, F è omeomorfa a $S^1 \times S^{n-2}$, oppure a $\boldsymbol{R} \times S^{n-2}$.*

Questo teorema ci permette di identificare coppie centro-sella *banali* e di eliminarle, ottenendo, sulla varietà, una foliazione con un minor numero di singolarità. Similmente possiamo identificare, tra coppie di selle di indici consecutivi, coppie eliminabili.

DEFINIZIONE 3. – *Una varietà che ammette una funzione reale differenziabile, con esattamente tre punti singolari non degeneri sarà chiamata varietà di Eells e Kuiper.*

Estendendo un risultato [1] valido per $n = 3$, abbiamo:

TEOREMA 2 (Teorema Centro-Sella). – *Sia M una varietà n-dimensionale, con $n \geq 2$, con una foliazione Morse $\mathcal{F}$, liscia, di codimensione uno, trasversalmente orientabile. Inoltre $\mathcal{F}$ sia senza olonomia, se $n = 2$. Sia $Sing(\mathcal{F})$ l'insieme singolare di $\mathcal{F}$, con cardinalità $\#Sing(\mathcal{F}) = k + l$, dove k, l sono, rispettivamente, il numero di centri e di selle.* (1) *Se $k = l + 2$, M è omeomorfa a una sfera n-dimensionale;* (2) *se $k = l + 1$, M è una varietà di Eells e Kuiper.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] C. CAMACHO, B. SCÁRDUA, *On codimension one foliations with Morse singularities on three-manifolds*, Topology and its Applications **154** (2007), 1032-1040.

[2] J. EELLS, N. H. KUIPER, *Manifolds which are like projective planes*, Pub. Math. de l'I.H.E.S. **14** (1962), 1032-1040.

[3] G. REEB *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique* CRAS, **222** (1946), 847-849.

[4] E. WAGNEUR *Formes de Pfaff à singulariés non dégénérées* Annales de l'institut Fourier **28**, no. 3 (1978), 165-176.

Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze
e-mail: rosati@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Bruno Scárdua, Universidade Federal do Rio de Janeiro