Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Teresa Radice

Su alcuni risultati di regolarità dei determinanti Jacobiani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 331–334.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_331_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 331-334

Su alcuni risultati di regolarità dei determinanti Jacobiani

TERESA RADICE

In questa tesi si studia la regolarità dello Jacobiano di mappe a distorsione finita e si considerano alcune applicazioni dei risultati ottenuti.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di R^n, con $n \geq 2$. Data una funzione $f = (f^1, f^2, ..., f^n)$ di classe $W^{1,n}_{loc}(\Omega, R^n)$ denoteremo con Df la matrice gradiente

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \frac{\partial f^n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e con $J = J(x,f) = \det Df(x)$ il determinante jacobiano. La funzione $J(x,f)$ interviene in molti contesti ad esempio nella teoria geometrica della misura e dell'integrazione, nell'analisi quasiconforme, nell'elasticità non lineare.

Spesso l'espressione $J(x,f)$ è utilizzata come elemento di volume in Ω

$$J(x,f)dx = df^1 \wedge ... \wedge df^n = d(f^1 df^2 \wedge ... \wedge df^n)$$

al fine di utilizzare l'integrazione per parti. Se $f \in W^{1,n}(\Omega, R^n)$ la disuguaglianza di Hadamard

$$|J| \leq |Df^1|\,|Df^2| ... |Df^n| \leq |Df|^n$$

assicura che $J \in L^1$.

Sorprendentemente, la sola ipotesi che f conservi l'orientamento cioè risulti $J(x,f) \geq 0$, per q.o. $x \in \Omega$, implica una maggiore sommabilità dello Jacobiano.

Tale studio è stato iniziato dal Prof. Müller, che ha dimostrato che se $f \in W^{1,n}_{loc}$ allora J appartiene allo spazio $L \log L(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$.

La seguente stima, dimostrata da T. Iwaniec e C. Sbordone in [4]

$$\int_K J(x,f)dx \;\leq\; c(n,K) \int_\Omega \frac{|Df(x)|^n}{\log\left(e + \frac{|Df(x)|}{|Df(x)|_\Omega}\right)} dx \tag{1}$$

dove K è un qualunque sottoinsieme compatto di Ω e $|Df|_\Omega$ indica la media integrale di $|Df|$ su Ω, può essere vista come duale del risultato di Müller.

A questo punto è evidente che si possono ottenere risultati di maggiore sommabilità di $J(x,f)$ negli spazi di Orlicz-Sobolev vicino $W^{1,n}(\Omega,R^n)$. In tal senso ricordiamo che se $|Df|^n \in L^n \log^{-a} L$, $a \in [0,1]$ allora H.Brèzis, N.Fusco e C.Sbordone in [2] hanno provato che

$$\int_K J(x,f) \overset{1-a}{\log}\left(e + \frac{|J(x,f)|}{|J|_K}\right) dx \leq c(n,K) \int_\Omega \frac{|Df(x)|^n}{\log^a\left(e + \frac{|Df(x)|}{|Df(x)|_\Omega}\right)} dx. \tag{2}$$

Successivamente tale risultato è stato esteso per ogni $a \in R$ da L.Greco.

Per $a = 1$ in [6], G.Moscariello ha migliorato (2) dimostrando che $J(x,f)$ appartiene allo spazio $L \log\log L_{loc}(\Omega)$. Successivamente L. Greco, T. Iwaniec e G. Moscariello dimostrarono che se $|Df|^n \in L^P(\Omega)$ ove P è una funzione log-convessa e se $J \geq 0$ allora $J \in L^{\Psi}_{loc}(\Omega)$ ove $\Phi(t) = P(t) + t\int_0^t \frac{P(s)}{s^2} ds$. Ulteriori risultati nell'ambito degli spazi di Orlicz sono stati evidenziati in lavori successivi. A tale proposito tenendo presente i risultati precedenti, è naturale studiare lo Jacobiano in spazi più generali. Come suggerito da [2] è interessante studiare la regolarità dello Jacobiano di mappe aventi gradiente in uno spazio di Lorentz. Al fine di ottenere migliori risultati occorre considerare gli spazi di Lorentz Zygmund.

Indichiamo con g^* il riordinamento decrescente della funzione $g : \Omega \subset R^n \to R$ e con Ω un insieme di misura finita, per semplicità $|\Omega| = 1$. Allora

DEFINIZIONE 1. – *Se $1 \leq q,p \leq \infty$ e $-\infty < a < +\infty$, lo spazio di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^a$ su Ω dominio limitato con $|\Omega| = 1$, è costituito dalle (classi di) funzioni misurabili f su Ω, per cui il funzionale*

$$\|f\|_{L^{p,q}(\log L)^a} = \begin{cases} \left(\int_0^1 \left[t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^a f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<1} \left[t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^a f^*(t)\right] & q = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

è finito.

In particolare se $p = q$ si ottengono gli spazi di Zygmund, per $a = 0$ gli spazi di Lorentz, per $p = q$ e $a = 0$ gli spazi di Lebesgue.

Nel capitolo III della tesi si stabilisce il seguente

TEOREMA 1. – *Se $|Df| \in L^{n,q}(\log L)^{-\frac{s}{n}}(\Omega)$, $J \geq 0$, $0 \leq s < \dfrac{n}{q} \leq 1$ allora $J \in L^{1,\frac{q}{n}}(\log L)^{-s+\frac{n}{q}}(K)$ per ogni sottoinsieme compatto K di Ω.*

Il risultato del Teorema 3 è stato poi esteso alle coppie (B,E), $B : \Omega \to R^n$, $E \to R^n$, di campi vettoriali su Ω, tali che $\operatorname{div} B = 0$ e $\operatorname{rot} E = 0$ aventi il prodotto scalare $\langle B, E\rangle$ non negativo. In questo caso si ottengono risultati di maggiore integrabilità per il prodotto scalare $\langle B, E\rangle$. Si osservi che se $A(x)$ è una matrice simmetrica e si considera l'equazione $\operatorname{div} A(x)\nabla u = 0$ si ottiene una coppia div-rot considerando $B = A(x)\nabla u$ e $E = \nabla u$.

Un altro esempio di coppia div-rot si ottiene considerando l'operatore ∞-laplaciano, ottenuto come caso limite del p-laplaciano quando p tende all'infinito. Nel capitolo IV è stato affrontato il problema di scrivere l'equazione ∞-laplaciana in forma di divergenza, moltiplicata per una opportuna funzione $\lambda = \lambda(\nabla u)$. Ciò ha permesso di parlare di "very weak solutions" ∞-armoniche nella classe di Sobolev $W^{1,2}_{loc}$.

Lo studio della regolarità dello Jacobiano di mappe che non necessariamente conservano l'orientamento e, in connessione, lo studio di coppie (B,E), $\operatorname{div}B = 0$ e $\operatorname{rot}E = 0$, il cui prodotto scalare può assumere segno qualunque, è stato affrontato da R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer e S. Semmes in [3].

Tali risultati si sono rivelati particolarmente utili nello studio sulle equazioni ellittiche non in forma di divergenza.

Più precisamente nel capitolo VI sono state studiate le equazioni ellittiche non in forma di divergenza con coefficienti nello spazio BMO.

Il Prof. C. Miranda ha dimostrato in [5] che se i coefficienti $a_{ij}(x)$ dell'operatore $Lu = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ appartengono a $W^{1,n}$ allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = h, \\ u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega). \end{cases} \tag{4}$$

è ben posto. Si ipotizza che Ω sia un aperto limitato di R^n e $h \in L^2(\Omega)$.

Tale risultato è ottimale. Infatti se $a_{ij} \in W^{1,n-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ viene meno l'unicità.

Un miglioramento del risultato di C. Miranda è dovuto ai Proff. A. Alvino e G. Trombetti in [1], che suppongono che le derivate dei coefficienti appartengono allo spazio di Marcinkiewicz L^n_{weak} e che la norma di $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}$ sia in L^n_{weak} sufficientemente piccola.

Nel capitolo VI della tesi si stabilisce la maggiore integrabilità per $|\nabla^2 u|$ nell'ipotesi che i coefficienti $a_{ij}(x)$ siano limitati e abbiano norma sufficientemente piccola in BMO. Si può osservare che l'ipotesi che la norma BMO dei coefficienti a_{ij} sia piccola è qualitativamente più debole dell'ipotesi di A.Alvino e G.Trombetti.

L'ultima parte del capitolo VI è dedicata allo studio di equazioni ellittiche con coefficienti non limitati che abbiano norma BMO sufficientemente piccola nell'ambito degli spazi di Orlicz-Zygmund. Più precisamente il risultato principale è la seguente stima

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2 \log L(R^n)} \leq c(n)\|h\|_{L^2 \log L(R^n)}. \tag{5}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. ALVINO e G. TROMBETTI, *Second order elliptic equations whose coefficients have their first derivatives weakly-L^n*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **138** (1984), 331-340.

[2] H. BREZIS, N. FUSCO e C. SBORDONE, *Integrability for the Jacobian of orientation preserving mappings*, J.Funct. Anal., **115** (1993), 425-431.

[3] R. COIFMAN, P. L. LIONS, Y. MEYER e S. SEMMES, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl., **72**, (1993), 247-286.

[4] T. IWANIEC, C. SBORDONE, *On the integrability of the jacobian under minimal hypothesis*, Arch. Rational Mech. Anal., **119** (1992), 129-143.

[5] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo variazionale a coefficienti non discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **63** (1963), 353-386.

[6] G. MOSCARIELLO, *On the integrability of the Jacobian in Orlicz Spaces*, Math. Japon., **40** (1994), 323-329.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli ”,
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
e-mail: teresa.radice@unina.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche
(sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli “Federico II”) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. G. Moscariello, Università degli Studi di Napoli “Federico II”