Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano Pasotti

Fibrati vettoriali su curve algebriche: terne olomorfe in genere basso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 315–318.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_315_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 315-318

Fibrati vettoriali su curve algebriche: terne olomorfe in genere basso

STEFANO PASOTTI

1. – Scenario e risultati noti.

Sia X una curva proiettiva liscia su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$ di caratteristica 0. Una *terna olomorfa* su X è una terna (E_1, E_2, φ), dove E_1 ed E_2 sono fibrati vettoriali su X e φ è un morfismo di $\mathrm{Hom}(E_2, E_1)$. Lo studio delle terne olomorfe e delle loro proprietà è stato avviato da Bradlow e García-Prada nel 1994 in [3] dove gli autori sono interessati a determinare le soluzioni di alcune equazioni ottenute tramite "dimensional reduction" di opportune equazioni su $X \times \mathbb{P}^1$. Per le terne olomorfe, una volta precisato cosa sono le sottoterne olomorfe, è possibile introdurre, similmente a quanto si fa per i fibrati vettoriali sulle curve, una nozione di *stabilità* che però nel caso specifico dipende da un parametro reale a. Più in dettaglio:

DEFINIZIONE 1. – *Sia $\mathcal{T} = (E_1, E_2, \varphi)$ una terna olomorfa. Si chiama a-slope di $\mathcal{T}$*

$$\mu_a(\mathcal{T}) := \frac{\deg E_1 + \deg E_2 + a \cdot \mathrm{rank}\, E_2}{\mathrm{rank}\,(E_1) + \mathrm{rank}\,(E_2)}.$$

$\mathcal{T}$ viene detta a-stabile (risp. a-semistabile) se per ogni sottoterna propria $\mathcal{T}'$ di $\mathcal{T}$ vale $\mu_a(\mathcal{T}') < \mu_a(\mathcal{T})$ (risp. $\mu_a(\mathcal{T}') \le \mu_a(\mathcal{T})$). $\mathcal{T}$ viene detta a-polistabile se è somma diretta di terne a-stabili della stessa a-slope.

A partire da questa definizione di stabilità è possibile costruire gli spazi dei moduli delle terne olomorfe a-(semi)stabili, che risultano dipendere da diversi parametri, ovvero dai ranghi n_1, n_2 e dai gradi d_1, d_2 dei fibrati vettoriali, oltre che, ovviamente, dal parametro a stesso. Nel seguito indicheremo con $\mathcal{N}_a(n_1, n_2, d_1, d_2)$ lo spazio dei moduli delle terne a-stabili con parametri indicati, e con $\mathcal{N}_a^{ss}(n_1, n_2, d_1, d_2)$ quello delle classi di S-equivalenza delle terne a-semistabili.

Le principali proprietà delle terne olomorfe e dei loro spazi di moduli sono state in seguito studiate da diversi autori, oltre ai due precedentemente citati Gothen in [1] e, più recentemente, in [2] e Hernández Ruipérez, Pioli and Tejero Prieto in in [4]. In particolare nei lavori citati è stato provato che esistono dei vincoli a cui deve sottostare il parametro a affinché esistano terne olomorfe a-stabili e, di più, fissati i ranghi e i gradi dei due fibrati vettoriali E_1 e E_2, al variare di a tra i valori ammissibili, che lo spazio dei moduli varia solo in un numero discreto di punti, chiamati *punti critici*, pertanto che esistono solo un numero finito di spazi dei moduli essenzialmente distinti. Nel seguito indicheremo con α_m e α_M i valori rispettivamente minimo e massimo del parametro α affinché esistano terne α-stabili.

Inoltre, quando per un fissato insieme di parametri $(\alpha, n_1, n_2, d_1, d_2)$ lo spazio dei moduli risulta essere non vuoto, allora è anche irriducibile e liscio, ed è possibile fornire un calcolo della sua dimensione.

Una delle tecniche utilizzate per dimostrare l'esistenza di terne olomorfe α-stabili è quella dei *flips*. Questo metodo, che sfrutta la teoria della deformazione e delle estensioni delle terne olomorfe, si preoccupa di determinare come le condizioni di α-stabilità variano al variare di α nell'intervallo ammissibile una volta che ranghi e gradi siano fissati, e consente pertanto di dimostrare l'esistenza per particolari (e comodi) valori di α, e da questa dedurre risultati di esistenza per i rimanenti valori.

Buona parte della teoria sviluppata nei lavori citati precedentemente è indipendente dal genere g della curva X. Alcuni risultati però necessitano dell'ulteriore assunzione che g sia maggiore o uguale a 2, infatti i casi della retta proiettiva ($g = 0$) e delle curve ellittiche ($g = 1$) necessitano di un trattamento particolare. Questo è particolarmente vero per i risultati di esistenza e di irriducibilità dello spazio dei moduli, ed è principalmente dovuto a due ragioni. Prima di tutto sulla retta proiettiva e sulle curve ellittiche i fibrati vettoriali stabili o semistabili sono oggetti abbastanza rari, e proprio tali oggetti sono spesso utili per costruire terne olomorfe per cui è particolarmente facile (o comunque più facile) dimostrare l'α-stabilità. In secondo luogo la tecnica dei flips precedentemente citata sfortunatamente non è in grado a priori di fornire informazioni utili in questi due casi perché è fondata su alcune stime dimensionali che coinvolgono proprio il genere della curva e che risultano essere banalmente vere in genere basso.

Giova probabilmente anche osservare che le terne olomorfe si inquadrano nel più ampio ambito dei cosiddetti *augmented bundles*, ovvero degli oggetti costituiti da uno o più fibrati vettoriali su X e da una serie di dati accessori (sezioni globali, mappe, ...). Gli augmented bundles presentano entro una certa misura comportamenti simili che permettono per alcuni aspetti una trattazione unificata. In particolare una classe di questi oggetti ampiamente studiata per i loro legami con la teoria di Brill-Noether è quella costituita dai *sistemi coerenti*, ovvero dalle coppie (E, V) dove E è un fibrato vettoriale su X e V un sottospazio vettoriale dello spazio $H^0(X, E)$ delle sezioni globali di E.

2. – Risultati ottenuti.

Lo scopo del nostro lavoro è stato quello di approfondire lo studio delle terne olomorfe proprio nei casi che restano esclusi dalla trattazione presente il letteratura, pertanto quando X è la retta proiettiva oppure una curva ellittica.

I risultati presentati sono stati ottenuti in collaborazione con Edoardo Ballico e Francesco Prantil dell'Università degli Studi di Trento, e sono descritti più nel dettaglio nelle seguenti sezioni.

2.1 – *Il caso della retta proiettiva.*

Il caso in cui X sia la retta proiettiva è indubbiamente quello che presenta le maggiori difficoltà. È pur vero che i fibrati vettoriali sulla retta proiettiva sono stati completamente classificati da Grothendieck e risultano essere somme dirette di twisted sheaves, ma tale classificazione mette in luce quanto siano rari i fibrati vettoriali stabili (una condizione necessaria è che il loro rango sia 1) e semistabili, che sono estremamente utili per costruire terne olomorfe che siano a-stabili. Queste difficoltà intrinseche hanno pesato sulla qualità finale dei risultati ottenuti che in questo caso, purtroppo, non sono esaustivi quanto si potrebbe sperare. Siamo infatti in grado di dimostrare alcune proprietà delle terne olomorfe a-stabili e alcune condizioni necessarie per la loro esistenza, ma possiamo esibire condizioni sufficienti solo per alcuni valori particolari dei parametri coinvolti. È opportuno osservare che nel caso $X = \mathbb{P}^1$ problemi analoghi a quelli da noi riscontrati si presentano anche nelle altre situazioni esaminate in letteratura per le altre classi di augmented bundles, e in particolare per i sistemi coerenti per i quali i casi di genere basso sono stati oggetto di una recente (e tuttora in corso) trattazione.

In particolare con il nostro lavoro abbiamo provato che l'intervallo di valori di a per cui esistono terne a-stabili è più piccolo di quello usuale (a_m, a_M): per valori prossimi agli estremi soliti dell'intervallo infatti in generale lo spazio dei moduli potrebbe essere vuoto. È interessante allora chiedersi se questi nuovi bounds da noi determinati siano in effetti ottimali, ovvero preoccuparsi di dimostrare che per valori di a appartenenti a questo nuovo intervallo esistono terne olomorfe a-stabili. Di fatto siamo riusciti in questo intento solo in alcuni casi particolari, ovvero quelli in cui $\mathrm{rank}\,(E_2) = 1, 2$, per i quali abbiamo esibito condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza.

Sono stati anche persi in esame i casi $\mathrm{rank}\,(E_2) = \mathrm{rank}\,(E_1) - 1$ e $\mathrm{rank}\,(E_2) = \mathrm{rank}\,(E_1)$, ma in queste situazioni i risultati ottenuti sono solo parziali: lo spazio dei moduli risulta essere non vuoto purché il parametro a assuma valori sufficientemente grandi e si assuma l'ulteriore ipotesi che il fibrato vettoriale E_2 sia semistabile.

Abbiamo inoltre mostrato che quando lo spazio dei moduli $\mathcal{N}_a(n_1, n_2, d_1, d_2)$ è non vuoto, è anche irriducibile e uno o entrambi fibrati vettoriali del generico elemento sono della forma $E_i = \mathcal{O}(q)^{n_i - t} \oplus \mathcal{O}(q-1)^t$, dove $\deg\,(E_i) = n_i q - t$ e $0 \leq t < n_i$.

2.2 – *Il caso delle curve ellittiche e biellittiche.*

Nel caso delle curve ellittiche siamo in grado di fornire condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di terne a-stabili, e, quando lo spazio dei moduli è non vuoto, di provarne l'irriducibilità. Come primo passo della nostra indagine ci siamo occupati di approfondire i legami esistenti tra terne olomorfe e sistemi coerenti, che risultano essere una loro specializzazione. I risultati ottenuti permettono di provare i nostri risultati di esistenza e irriducibilità, ma solo per la sottoclasse delle terne olomorfe costituita da quelle terne in cui E_2 è triviale, e sono in effetti superflui alla luce dei risultati generali che abbiamo ottenuto in seguito, ma ci sembrano comunque interessanti proprio per il loro aspetto di collegamento tra diverse categorie di oggetti. Nel caso generale (quindi senza assumere ulteriori ipotesi sulla natura dei fibrati vettoriali E_1 e E_2), i nostri principali risultati sono riassunti nel teorema seguente, in cui si è indicato $\mu(E_i) := \deg(E_i)/\operatorname{rank}(E_i)$. Nell'enunciato vengono utilizzati fibrati vettoriali polistabili: si noti che questo non è restrittivo, infatti è possibile dimostrare che tali fibrati esistono per ogni rango e grado fissati.

TEOREMA 1. – *Siano E_1 ed E_2 fibrati vettoriali polistabili con* $\operatorname{rank} E_2 < \operatorname{rank} E_1$ *e* $\mu(E_2) < \mu(E_1)$. *Allora esiste un morfismo* $\varphi \in \operatorname{Hom}(E_2, E_1)$ *tale che la terna* $\mathcal{T} = (E_1, E_2, \varphi)$ *è a-stabile per ogni* $a \in (a_m, a_M)$. *Inoltre* $\mathcal{N}_a(n_1, n_2, d_1, d_2)$ *è irriducibile, liscio di dimensione* $-n_1d_2 + n_2d_1 + 1$ *per ogni* $a \in (a_m, a_M)$.

Risultati analoghi sono formulabili anche nei casi $\operatorname{rank} E_2 = \operatorname{rank} E_1$ e $\operatorname{rank} E_2 > \operatorname{rank} E_1$.

A completamento del lavoro svolto sulle curve ellittiche, ci siamo occupati delle curve che sono un ricoprimento doppio di una curva ellittica (curve *biellittiche*) e abbiamo dimostrato che anche in questo caso lo spazio dei moduli è non vuoto per tutti i valori ammissibili del parametro a. Per ottenere tale risultato abbiamo studiato come la condizione di a-stabilità varia quando una terna olomorfa viene trasformata per pullback e tramite una trasformazione elementare di uno o di entrambi i fibrati vettoriali coinvolti. I risultati ottenuti sono riassunti nel seguente enunciato.

TEOREMA 2. – *Siano* $a \in \mathbb{R}$, *C una curva ellittica,* $f : X \longrightarrow C$ *un ricoprimento doppio con X curva liscia di genere* $g \geq 2$ *e* (E_1, E_2, φ) *una terna a-stabile su C con E_1 e E_2 polistabili con addendi diretti a due a due non isomorfi. Allora le terne* $(f^*(E_1), f^*(E_2), f^*(\varphi))$, $(F'_1, f^*(E_2), f^*(\varphi))$ *e* (F'_1, F'_2, ψ') *sono $2a$-stabili, dove F'_1 e F'_2 sono ottenuti da $f^*(E_1)$ e $f^*(E_2)$ operando una generica trasformazione elementare positiva supportata in un punto $p \in X$ dove f non è ramificata.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] S. B. BRADLOW, O. GARCÍA-PRADA e P. B. GOTHEN, *Moduli spaces of holomorphic triples over compact Riemann surfaces*, Math. Ann. **328**, no. 1-2 (2004), 299-351.

[2] S. B. BRADLOW, O. GARCÍA-PRADA e P. B. GOTHEN, *Homotopy groups of moduli spaces of representations*, arXiv:math.AG/0506444 v2, April 2006.

[3] O. GARCÍA-PRADA, *Dimensional reduction of stable bundles, vortices and stable pairs*, Internat. J. Math., **5**, no. 1 (1994), 1-52.

[4] O. GARCÍA-PRADA, D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, F. PIOLI e C. TEJERO PRIETO, *Fourier-Mukai and Nahm transforms for holomorphic triples on elliptic curves*, J. Geom. Phys., **55** no. 4 (2005), 353-384.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento
e-mail: pasotti@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Edoardo Ballico, Università degli Studi di Trento