Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luigi Muglia

Il problema della retrazione ottimale e soluzioni di sistemi integrodifferenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 299-302

Il problema della retrazione ottimale e soluzioni di sistemi integrodifferenziali

LUIGI MUGLIA

Nella tesi di Dottorato, vengono studiate le seguenti problematiche connesse alla teoria dei punti fissi: 1) esistenza di soluzioni per sistemi integrodifferenziali con o senza impulso; 2) il problema della retrazione ottimale e dello spostamento minimo.

1. – Soluzioni di sistemi integrodifferenziali.

Nella prima sezione sono trattare alcune applicazioni della teoria dei punti fissi alle equazioni differenziali ordinarie (nel seguito ODEs).

Ci soffermiamo in particolare su due specifiche classi di equazioni: le equazioni differenziali neutrali e le equazioni differenziali impulsive.

Le ragioni per le quali studiamo questo tipo di equazioni sono due.

Da un lato perché esse sono strumenti efficaci per rappresentare modelli matematici di fenomeni reali come fenomeni economici, fisici o problemi ingegneristici.

Dall'altro, poiché, a nostra conoscenza, risultano essere ben pochi i lavori presenti in letteratura che riguardino l'esistenza di soluzioni definite su intervalli non limitati.

I nostri risultati principali, dunque, compendiano teoremi di esistenza di soluzioni "strong" definite su intervalli non limitati sia per equazioni semilineari neutrali impulsive, sia per equazioni integrodifferenziali neutrali impulsive della forma:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x(t) - g(t, x_t)] = A(t)x(t) + f(t, x_t, \displaystyle\int_0^t h(t, s, x_s)ds), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t \geq 0,\ t \neq t_k,\ k = 1, \dots, l \\ x({t_k}^+) - x({t_k}^-) = I_k(x({t_k}^-)) \quad k = 1, \dots, l \\ Lx = H(x) \end{cases}
$$

Al termine della prima sezione, abbiamo inserito un'appendice riguardante la teoria dei punti fissi comuni e la sua applicazione ai sistemi di equazioni differenziali.

Come per le ODEs, la ricerca di soluzioni comuni a sistemi di equazioni differenziali può essere interpretata come una ricerca di punti fissi comuni per opportune mappe.

In alcuni casi le ipotesi sembrano troppo forti per dare luogo a risultati interessanti.

Noi proviamo che, attraverso ipotesi sulla condizione di Cauchy, e insieme ad ipotesi di debole isotonia sulle funzioni (Dhage 1999), è possibile mostrare che esiste esattamente una soluzione comune a due sistemi di equazioni differenziali e che tale soluzione può essere trovate esplicitamente.

TEOREMA 1. – *Sia E un reticolo di Banach. Consideriamo i problemi di Cauchy:*

$$(a)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad (b)\begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad t \in J = [0,a], x \in \mathcal{C}(J,E)$$

sotto le seguenti ipotesi:

(H1) *Le funzioni $f, g : J \times E \to E$ sono continue e limitate su $J \times E$.*
(H2) *Le funzioni $f(t,x)$ e $g(t,x)$ sono nondecrescenti in $x \in E$ per ogni $t \in J$.*
(H3) *$f(t,x) \leq g(t,f(t,x))$ e $g(t,x) \leq f(t,g(t,x))$ per ogni $(t,x) \in J \times E$.*
(H4) *$f(t,x(t)) \leq x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau$ e $g(t,x(t)) \leq x_0 + \int_0^t g(\tau,x(\tau))d\tau$ per ogni $(t,x) \in J \times \mathcal{C}(J,E)$ e per ogni fissato $x_0 \in E$ in (a) e (b).*

Allora, se $M := sup\{f(t,x) : (t,x) \in J \times E\}$, entrambi i problemi (a) e (b) si riducono al problema

$$(c)\begin{cases} x' = f(t,M) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e dunque hanno la soluzione comune $x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,M)d\tau$.

2. – Il problema della retrazione ottimale.

Nel secondo capitolo presentiamo conseguenze metriche alla teoria topologica dei punti fissi. In particolare, noi studiamo il *problema dello spostamento minimo* introdotto da Goebel nel 1973 e *il problema della retrazione ottimale* che trova radici nel celebre *Scottish Book*.

Nel primo problema, Goebel, servendosi della costante di spostamento minimo, misura quanto manca ad una generica mappa k-lipschitziana $T : X \to X$, X spazio di Banach infinito dimensionale, per avere punto fisso:

$$d(T) = \inf_{x \in X} \|x - Tx\|.$$

In seguito, egli definisce la funzione $\varphi_X(k)$ per descrivere l'estremo superiore degli spostamenti al variare della mappe k-lipschitziane definite da X in sé, e la funzione

$\psi_X(k)$ per descrivere l'estremo superiore degli spostamenti delle mappe k-lipschitziane definite sulla palla B di X.

È noto che per ogni spazio di Banach $\psi_X(k) \leq \varphi_X(k) \leq 1 - \frac{1}{k}$. Se $\psi_X(k) = 1 - \frac{1}{k}$ lo spazio è detto *estremale*. Alcuni esempi noti di spazi estremali sono lo spazio delle funzioni continue $C[a,b]$ e lo spazio delle successioni convergenti a zero c_0. Per lo spazio l^1, invece, risulta:

$$\psi_{l^1}(k) < \varphi_{l^1} = 1 - \frac{1}{k}$$

Rimane un problema aperto (eccetto per spazi estremali) quello di trovare una formula chiusa per $\varphi_X(k)$ e per $\psi_X(k)$ per ogni spazio di Banach.

Nel problema della retrazione ottimale, invece, ci si chiede quale sia la minima costante di Lipschitz ($k_0(X)$) in uno spazio di Banach per la quale esiste una $k_0(X)-$retrazione della palla sulla sfera.

È sconosciuto, a tutt'oggi, il valore di $k_0(X)$ per ogni spazio di Banach (inclusi gli spazi estremali).

Molti autori tuttavia ne danno delle approssimazioni sia nel caso di spazi estremali sia per spazi particolarmente significativi per l'Analisi Matematica.

Il nostro contributo riguarda questa seconda questione.

Sia K un insieme arbitrario non vuoto e infinito e sia $B(K)$ lo spazio di Banach delle funzioni a valori reali definite su K e limitate, con la norma $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Diciamo che un sottoinsieme $X \subset B(K)$ è invariante per tagli se, per ogni $f \in X$, $(a \circ f) \in X$ dove:

$$a(t) = \begin{cases} -1 & t < -1, \\ t & -1 \leq t \leq 1, \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

Ad esempio $BC(I)$ con I non limitato è invariante per tagli; lo spazio $C(K)$ con K compatto, oppure lo spazio c_0 delle successioni convergenti a zero sono invarianti per tagli. Noi proviamo che:

TEOREMA 2. – *Sia X uno spazio di Banach invariante per tagli. Allora $k_0(X) \leq 23.31$.*
e inoltre:

TEOREMA 3. – *Sia $BC_z(K)$ lo spazio di funzioni limitate, definite su uno spazio metrico connesso K che si annullano in un punto $z \in K$ risulta. Allora $k_0(BC_z(K)) \leq 12$.*

TEOREMA 4. – *$k_0(X) \leq 8$ per gli spazi $L_1[0,1]$, $AC_0[0,1]$ e $BV[0,1] \cap C_0[0,1]$.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] MARINO G., PIETRAMALA P. e MUGLIA L., *Impulsive neutral integrodifferential equations on unbounded intervals*, Mediterr. J. Math., **1** (2004), 93-108.

[2] MARINO G., PIETRAMALA P. e MUGLIA L., *Impulsive neutral semilinear equations on unbounded intervals*, Nonlinear Funct. Anal. Appl., **9**, no. 4 (2004), 527-543.

[3] MARINO G., COLAO V. e MUGLIA L., *A note on weakly isotone maps and common solutions for differential systems*, Acta Math. Sin. (English series), **22**, no. 4 (2006), 1171-1174.

[4] GOEBEL G., MARINO G., MUGLIA L. e VOLPE R., *The retraction constant and the minimal displacement characteristic of some Banach spaces*, to appear in Nonlinear Analysis TMA.

Dipartimento di Matematica, Università della Calabria,
e-mail: muglia@mat.unical.it
Dottorato di ricerca in Matematica e Informatica
(sede amministrativa: Università della Calabria) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Giuseppe Marino, Università della Calabria