Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Morando

Soluzioni olomorfe temperate di D-moduli su curve complesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 295–298.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_295_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 295-298

Soluzioni olomorfe temperate di $\mathcal{D}$-moduli su curve complesse

GIOVANNI MORANDO

In questa nota ricordiamo la definizione di sito subanalitico e del fascio subanalitico delle funzioni olomorfe temperate. In seguito, enunciamo due risultati ottenuti nello studio delle soluzioni olomorfe temperate di $\mathcal{D}$-moduli su curve analitiche complesse. Il primo risultato riguarda le soluzioni temperate dei $\mathcal{D}$-moduli generati da funzioni esponenziali e più genericamente dei buoni modelli. Il secondo risultato è un teorema di esistenza per la topologia subanalitica.

1. – Le funzioni olomorfe temperate.

In [1], M. Kashiwara e P. Schapira hanno studiato gli ind-fasci e i fasci sul sito subanalitico relativo a una varietà analitica complessa, in particolare hanno definito le sei operazioni di Grothendieck per gli ind-fasci rendendo così possibile l'utilizzo delle funzioni olomorfe temperate nello studio funtoriale delle equazioni differenziali lineari: la teoria dei $\mathcal{D}$-moduli. Successivamente, in [2], hanno dato un esempio dell'utilità che possono avere le soluzioni temperate nello studio delle equazioni differenziali ordinarie irregolari.

Sia X una varietà analitica complessa, $X_{\mathbb{R}}$ la varietà analitica reale soggiacente. Dato k un anello commutativo, denotiamo con $\mathrm{Mod}(k_X)$ la categoria dei fasci in k-moduli su X.

Denotiamo con Op_X la categoria degli aperti di X e con $\mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ la sottocategoria degli aperti subanalitici relativamente compatti di X. Si munisce $\mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ della seguente topologia di Grothendieck: $S \subset \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ è un ricoprimento di $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ se e solo se S contiene un sottoricoprimento finito di U. Si denota con X_{sa} il sito così ottenuto e lo si chiama il sito subanalitico relativo a X. Inoltre denotiamo con $\mathrm{Cov}(U)$ la famiglia dei ricoprimenti di $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ per la topologia subanalitica e con $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ la categoria dei fasci in k-moduli su X_{sa}.

Denotiamo con $\rho : X \to X_{sa}$, il morfismo naturale di siti. Rimandiamo a [1] per la definizione dei funtori

$$\mathrm{Mod}(k_X) \underset{\rho^{-1}}{\overset{\rho_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \ .$$

Il funtore ρ^{-1} è l'aggiunto a sinistra di ρ_*. Si dimostra che ρ^{-1} ammette un aggiunto a sinistra, denotato $\rho_!$, che è descritto come segue. Dati $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ e $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$, si ha che $\rho_!(F)$ è il fascio su X_{sa} associato al prefascio $U \mapsto F(\overline{U})$.

Denotiamo con $\mathcal{D}b_X$ il fascio delle distribuzioni su $X_{\mathbb{R}}$ e, dato un sottoinsieme chiuso $Z \subset X$, denotiamo con $\Gamma_Z(\mathcal{D}b_X)$ il sottofascio delle sezioni a supporto in Z. Si denota con $\mathcal{D}b^t_{X_{sa}}$ il prefascio delle distribuzioni temperate su $X_{\mathbb{R}}$, definito da

$$\mathrm{Op}^c_{X_{sa}} \ni U \longmapsto \mathcal{D}b^t_{Xsa}(U) := \Gamma(X; \mathcal{D}b_X) / \Gamma_{X \setminus U}(X; \mathcal{D}b_X) \ .$$

In [1], M. Kashiwara e P. Schapira dimostrano che $\mathcal{D}b^t_{X_{sa}} \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$.

Denotiamo con $\mathcal{D}_X$ il fascio su X degli operatori differenziali a coefficienti olomorfi. Denotiamo con $\overline{X}$ la varietà analitica coniugata e con $D^b(\rho_! \mathcal{D}_X)$ la categoria derivata dei complessi limitati di $\rho_! \mathcal{D}_X$-moduli. Sia $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_{\overline{X}}$) il fascio strutturale di X (risp. $\overline{X}$).

Si definisce il fascio $\mathcal{O}^t_{X_{sa}} \in D^b(\rho_! \mathcal{D}_X)$ delle funzioni olomorfe temperate come

$$\mathcal{O}^t_{X_{sa}} := R\mathcal{H}om_{\rho_! \mathcal{D}_{\overline{X}}}\left(\rho_! \mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{D}b^t_{X_{\mathbb{R}}}\right) \ .$$

In [1], si dimostra che se $\dim X = 1$, allora $R\rho_* \mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}^t_{X_{sa}}$ sono concentrati in grado 0. Inoltre, se $\dim X = 1$, si può dare la seguente descrizione delle funzioni olomorfe temperate. Dato $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$, si ha

$$\mathcal{O}^t_{X_{sa}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_X(U);\ \exists C, M > 0 \text{ tali che } \forall z \in U,\ \left|f(z)\right| \leq \frac{C}{\mathrm{dist}(z, \partial U)^M} \right\} \ .$$

2. – Soluzioni temperate di $\mathcal{D}$-moduli generati da esponenziali

Dato un $\mathcal{D}_X$-modulo olonomo $\mathcal{M}$ su una curva analitica complessa X, poniamo

$$\mathcal{S}ol^t(\mathcal{M}) := R\mathcal{H}om_{\rho_! \mathcal{D}_X}\left(\rho_! \mathcal{M}, \mathcal{O}^t_{X_{sa}}\right) \ .$$

Poniamo inoltre $\mathcal{S}^t(\mathcal{M}) := H^0 \mathcal{S}ol^t(\mathcal{M})$.

Sia $\varphi \in z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$. Poniamo $\mathcal{L}^\varphi := \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \exp(\varphi)$. Dati $\varphi_j \in z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$, $\mathcal{R}_j$ $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-moduli olonomi indecomponibili regolari all'origine ($j = 1, \ldots, n$), il $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulo olonomo

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{L}^{\varphi_j} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{R}_j$$

è detto un buon modello. Il Teorema di Turrittin-Levelt asserisce che, a meno di ramificazione, ogni connessione meromorfa è formalmente isomorfa a un unico buon modello. Risulta quindi importante lo studio delle soluzioni olomorfe temperate dei buoni modelli nello spirito della corrispondenza di Riemann-Hilbert. Per un'introduzione alle connessioni formali e al Teorema di Turrittin-Levelt rimandiamo a [3] ed alla bibliografia ivi contenuta.

Dato $\tau \in \mathbb{R}$, $R, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, l'insieme

$$S_{\tau\varepsilon,R} := \left\{ \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times;\ \rho \in \left]0, R\right[,\ \theta \in \left]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon\right[\right\}$$

è detto un settore aperto centrato in τ, di ampiezza 2ε e raggio r o semplicemente un settore aperto. Introduciamo ora un'utile classe di aperti subanalitici.

DEFINIZIONE 1. – *Dato $\tau \in \mathbb{R}$, diciamo che $U \in \mathrm{Op}^c_{\mathbb{C}_{sa}}$ è concentrato lungo τ se U è connesso, $0 \in \partial U$ e, per ogni $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un intorno aperto dell'origine $W \subset \mathbb{C}$ tale che $U \cap W \subset S_{\tau\pm\varepsilon,1}$.*

LEMMA 1. – *Sia $\varphi \in z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ di grado n. Esistono $\tau \in \mathbb{R}$ e $U_0, \ldots, U_{2n-1} \in \mathrm{Op}^c_{\mathbb{C}_{sa}}$ tali che U_j sia concentrato lungo $\tau + j\,\dfrac{\pi}{n}$ e $\exp\big(\varphi(z)\big), \exp\big(-\varphi(z)\big) \in \mathcal{O}^t_{\mathbb{C}_{sa}}(U_j)$ $(j = 0, \ldots, 2n-1)$.*

Dato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denotiamo con GM_n la categoria dei buoni modelli con invariante di Katz $< n$. Usando il Lemma 1 si può dimostrare il seguente

TEOREMA 1. – *1. Dati $\varphi, \psi \in z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$, si ha che $\mathcal{S}^t(\mathcal{L}^{\varphi}) \simeq \mathcal{S}^t(\mathcal{L}^{\psi})$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $\varphi = \lambda\psi$.*

2. Il funtore $\mathcal{S}^t(\,\cdot\,\otimes\mathcal{L}^{1/z^n})$ è pienamente fedele sulla categoria GM_n.

3. – Teorema di esistenza-

In questa sezione enunciamo un teorema di esistenza per gli operatori differenziali a coefficienti olomorfi nelle funzioni olomorfe temperate.

La Proposizione 1 si basa sulla geometria subanalitica, in particolare fa uso della decomposizione cellulare degli insiemi subanalitici.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $U \in \mathrm{Op}^c_{\mathbb{R}^2_{sa}}$, $0 \in \partial U$. Esiste un intorno aperto $W \subset \mathbb{C}$ di 0, un insieme finito J, settori aperti $S_{j,k}$, $f_{j,k} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\big(\overline{S_{j,k}}\big)$ $(j \in J, k = 1, 2)$ tali che $f_{j,k}(0) = 0$, $f_{j,k}|_{\overline{S_{j,k}}}$ sia iniettiva $(j \in J, k = 1, 2)$ e*

$$U \cap W = \bigcup_{j \in J} \Big(f_{j,1}(S_{j,1}) \cap f_{j,2}(S_{j,2})\Big) \;.$$

PROPOSIZIONE 2. – *Siano X un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(X)$, $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$ tale che $f|_{\overline{U}}$ sia una mappa iniettiva. Data $h \in \mathcal{O}_X\big(f(U)\big)$, si ha che $h \in \mathcal{O}^t_{\mathbb{C}_{sa}}\big(f(U)\big)$ se e solo se $h \circ f \in \mathcal{O}^t_{X_{sa}}(U)$.*

I teoremi di esistenza per operatori differenziali a coefficienti costanti in spazi di funzioni con condizioni di crescita sono largamente trattati nella letteratura, si veda [3] e i lavori di J.P. Ramis-Y. Sibuya. Tali risultati si basano sul fondamentale Teorema Asintotico di Hukuhara-Turrittin, per il quale rimandiamo a [4]. Combinando le Proposizioni 1 e 2, il Teorema Asintotico di Hukuhara-Turrittin e i metodi classici di integrazione su cammini si può dimostrare il seguente

TEOREMA 2. – *Sia P un operatore differenziale a coefficienti olomorfi in un intorno $X \subset \mathbb{C}$ dell'origine. Sia $U \in \mathrm{Op}^c_{X_{sa}}$, $0 \in \partial U$. Esiste un intorno aperto $W \subset \mathbb{C}$ di 0 tale che, per ogni $g \in \mathcal{O}^t_{\mathbb{C}_{sa}}(U)^m$, esistano $\{U_j\}_{j \in J} \in \mathrm{Cov}(U \cap W)$ e $u_j \in \mathcal{O}^t_{\mathbb{C}_{sa}}(U_j)^m$ che soddisfino $Pu_j = g|_{U_j}$ per ogni $j \in J$.*

Usando il Teorema 2, alcuni risultati classici sulle equazioni differenziali ordinarie e la fascificazione sul sito subanalitico, si arriva infine a dimostrare il seguente

TEOREMA 3. – *Sia X una varietà analitica complessa, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-modulo olonomo. I morfismo naturale di fasci su X_{sa}*

$$H^1\Big(\mathcal{S}ol^t(\mathcal{M})\Big) \longrightarrow H^1\Big(\mathcal{S}ol(\mathcal{M})\Big) \tag{1}$$

è un isomorfismo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. KASHIWARA e P. SCHAPIRA, *Ind-sheaves,* Asterisque, **271** (2001),

[2] M. KASHIWARA e P. SCHAPIRA, *Microlocal study of Ind-sheaves I: micro-support and regularity,* Astérisque, **284** (2003), 143-164.

[3] B. MALGRANGE, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux,* Progress in Mathematics, **96** (1991).

[4] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations,* Pure and Applied Mathematics, Vol. **XIV** (1965).

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
e-mail: gmorando@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XVII
Direttori di ricerca: Andrea D'Agnolo (Università di Padova), Pierre Schapira
(Université Pierre et Marie Curie)